Розділ 5.

МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ ПРОЦЕСІВ

Введемо деякі поняття і визначення, необхідні для викладу матеріалу розділу.

Оптимізація (від латинського optimus – найкращий) – це:

- пошук найкращої альтернативи;
- вибір найкращого варіанту з декількох можливих;
- приведення системи в найкращий стан шляхом варіювання параметрів її стану;
- пошук екстремуму цільової функції процесу (системи).

На відміну від поняття «термодинамічна система – тіло або сукупність тіл, фізично або уявно виділених з навколишнього середовища» тут використовується більш широке поняття системи. ***Система*** включає: власне термодинамічну систему; процеси, що протікають в ній; апарати, в яких протікають ці процеси, а також засоби контролю і управління з всіма зв'язками. Система є складним об'єктом, який можна розбити на ***підсистеми***, пов'язані між собою через інформаційні канали. Сукупність зв'язків утворює ***структуру системи***. Кожна така система має певний порядок функціювання, направлений на досягнення заданої мети. Системи бувають малі і великі. *Малі системи* повністю визначаються властивостями самого процесу. Як правило, вони обмежені одним *типовим процесом* з його внутрішніми зв'язками і особливостями роботи агрегату (реактора, апарату і ін.).

Великі системи – це сукупність малих систем. Прикладом великої системи служить підприємство (цех, завод).

Оптимальна система (процес) – це система, для якої вибраним певним чином критерій якості стану або роботи є оптимальним.

Критерій оптимізації – деякий показник, що характеризує систему або процес, пов'язаний з параметрами їх стану і управління. Це може бути технологічний показник (продуктивність, якість і ін.), економічний показник (мінімум витрат при заданій продуктивності), або узагальнений показник, що є функцією декількох величин.

Цільова функція – залежність критерію оптимізації від параметрів системи або процесу.

Таким чином, задачею оптимізації конкретного процесу є пошук екстремуму його цільової функції. Звичайно, треба мати на увазі, що необхідність в оптимізації виникає в тих випадках, коли потрібно вирішувати компромісну задачу поліпшення декількох показників системи, що по-різному залежать від її параметрів.

У випадку, коли процес «включений» до системи автоматичного регулювання (САР), його оптимізація складається з двох стадій - статичної і динамічної.

Статична оптимізація вирішує задачі створення і реалізації оптимального стаціонарного режиму процесу, у випадках, що викликаються зміною зовнішніх умов. Така оптимізація передбачає можливість миттєвого перекладу процесу з одного сталого стану до іншого. Задача може вирішуватися за допомогою механічних оптимізаторів, що застосовують метод «чистого пошуку» (прості типові системи), і за допомогою обчислювальних машин, що використовують математичну модель процесу (складні системи). Застосовуються, також, комбіновані методи.

Динамічна оптимізація вирішує задачі створення і реалізації системи оптимального управління процесом по мірі його розвитку. Це метод управління, що забезпечує як підтримку оптимального сталого рівню процесу, так і оптимальний режим переходу в інший стан. На відміну від статичної оптимізації тут функція оптимальності є функцією часу.

Характер використаних математичних моделей систем, що підлягають оптимізаційному управлінню, визначає вибір математичних методів оптимізації. Більшість з цих методів зводиться до пошуку екстремуму цільової функції. Якщо «параметрами» цільової функції виступають також функції, то цільова функція стає *функціоналом*, пошук екстремуму якого в складних випадках ведеться методами варіаційного числення. При числі параметрів системи більш трьох не існує наочна геометрична інтерпретація функціоналу і тоді користуються поняттям *фазового простору*, в якому стани об'єкту управління представляються у вигляді точок. У загальному разі довільного числа n "вихідних змінних" фазовий простір представляється як n-мірний. При n = 2, фазовий простір переходить в фазову площину і зображення стану об'єкта стає наочним. Лінії, вздовж яких цільова функція зберігає постійне значення при зміні вхідних в неї параметрів, називаються *контурними* або *лініями рівня*. Наприклад, якщо цільова функція (Y,%) представляє вихід продукту із заданими властивостями в залежності від параметрів X_1 і X_2, то для постійних значень Y маємо поверхню відгуку, показану на рис. 4.1.

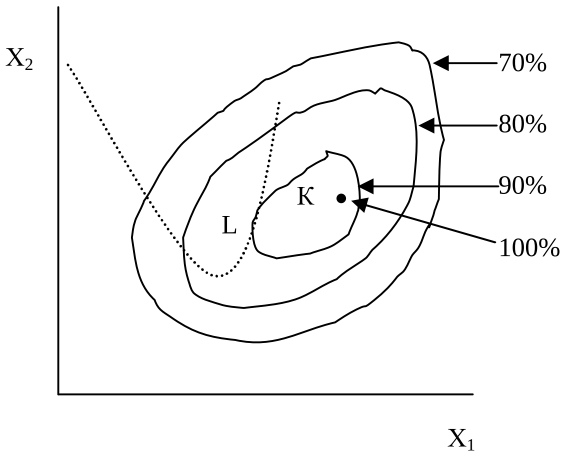

Рис. 4.1. Поверхня відгуку $Y = \varphi(X_1,X_2)$

Через K тут позначений *безумовний* екстремум функції $Y = (X_1, X_2)$.

У випадку, коли на цільову функцію накладені обмеження у вигляді рівнянь, на графік наносять відповідні лінії (див. пунктир на рис. 4.1). У цьому разі екстремум функції з накладеними на неї обмеженнями стає *умовним (*точка L) і він, як правило, не співпадає з безумовним екстремумом (K). Лінії рівня, відповідні заданим різним значенням Y_i не перетинаються і вкладені одна в іншу в напрямі зростання або убування функції.

Методи оптимізації, що застосовуються для систем подібним металургійним, систематизовані в [7]. Це:

- Аналітичні методи: аналітичний пошук екстремуму; метод множників Лагранжу; варіаційні методи, включаючи метод максимуму Понтрягіна.
- Градієнтні методи.
- Методи математичного програмування: геометричне, лінійне і динамічне програмування.
- Автоматичні методи з самонастроючимися моделями.
- Статистичні методи: регресійний і кореляційний аналіз і ін.

Використання обчислювальної техніки і набір стандартних програм для перерахованих методів значно полегшує розрахунки. Але для цільової функції системи, що оптимізується, потрібно створювати спеціальну програму. Вибір конкретного методу оптимізації диктується виглядом і мірою складності цільової функції. Розглянемо деякі методи детальніше.

Аналітичні методи оптимізації. Тут використовуються класичні методи пошуку екстремуму функції. Вони застосовні для детермінованих процесів заданих функціями, що диференціюються, з обмеженим числом параметрів. Суть пошуку екстремуму полягає в прирівняні до нуля приватних похідних цільової функції за параметрами.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} dx = 0 \ \text{ або } \ \sum_{i=1}^{n} \frac{dF}{dx_i} = 0\,. \quad i = 1,2,\ldots,n \qquad (4.1)$$

Цей метод вельми широко використовується для однопараметричних функцій – це тривіальний метод дослідження функцій математичного аналізу.

Метод множників Лагранжу. Застосовується для детермінованих процесів заданих функціями, що диференціюються, з обмеженнями у вигляді рівності. Якщо, наприклад, потрібно знайти екстремум функції $F(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ за наявності обмежень у вигляді рівності на незалежні змінні $f_i(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0$; $i = 1,2,\ldots,m$; $m<n$, то за даним методом вводиться додаткова функція

$$\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n, \lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m) = F(x_1,x_2,\ldots,x_n) + \sum_{i=1}^{m} l_i f_i(x_i)\,, \quad (4.2)$$

де $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$ – невизначені множники Лагранжу.

Екстремальні точки функції знаходять рішенням системи рівнянь, що отримізується, прирівнюванням нулю похідних від функції (2) по незалежним змінним, в тому числі і по множниках Лагранжу:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial j\,(x_1,\ldots,x_n,\, l_1,\ldots,\, l_m)}{\partial x_k} = 0 \qquad\qquad k = 1,\ldots,n \\ &\frac{\partial j\,(x_1,\ldots,x_n,\, l_1,\ldots,\, l_m)}{\partial l_i} = f_i(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0;\ i = 1,2,\ldots,m \end{aligned}\right\} \quad (4.3)$$

Система рівнянь (3) містить (m+n) рівнянь, з яких потрібно виключити m невизначених множників Лагранжу і знайти координати екстремальних точок x_k (k=1,…, n).

Наприклад, нехай потрібно знайти умовний екстремум функції $F(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2 - 2x$; за умовою: $x + 2y - z = 3$. Змінимо початкову функцію згідно (2) і отримаємо:

$$\varphi(x,y,z, \lambda) = (x^2 - y^2 + z^2 - 2x) - \lambda(x + 2y - z - 3). \qquad (4.4)$$

Умови стаціонарності (4.3) дають:

$$\frac{\partial j}{\partial x} = 2x - 2 - \lambda = 0; \quad \frac{\partial j}{\partial y} = -2y - 2\lambda = 0; \quad \frac{\partial j}{\partial z} = 2z + \lambda = 0. \qquad (4.5)$$

Виражаючи звідси x, y, z через λ і підставляючи їх в рівняння x +2y - z = 3 отримаємо: λ = -2, а координати екстремуму будуть: x = 0, y = 2; z = 1.

Градієнтні методи оптимізації. Це універсальні методи, добре пристосовані до використання засобами обчислювальної техніки і в більшості випадків вельми ефективні. Вони відносяться до чисельних методів пошукового типу для встановлення екстремального значення нелінійних функцій, як з обмеженнями, так і без них, а також, коли функція аналітично невідома.

Суть градієнтних методів полягає у визначенні значень незалежних змінних, що дають найбільші зміни цільової функції. Це досягається при переміщенні вздовж градієнту, ортогонального до контурної поверхні в даній точці. Відмінності різних пошукових методів полягають в способах визначення напряму рушення до оптимуму, розміром кроку, тривалістю пошуку вздовж знайденого напряму, критеріями закінчення пошуку, а також простотою алгоритмізації.

Градієнт в точці ($x_1, x_2, \ldots, x_n$) функції F($x_1, x_2, \ldots, x_n$) визначається вектором:

$$\text{grad } F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right). \tag{4.6}$$

Вибір кроку рушення вздовж градієнту дуже важливий. Він залежить від вигляду поверхні. При малому кроці значно збільшується число обчислень, а при великому кроці можна «проскочити» оптимум. Оскільки гіперповерхня багатопараметричної функції може мати велике число локальних екстремумів, то при малому кроці виникає небезпека обчислення локального екстремуму, замість глобального.

З градієнтних методів застосовують: спуск по координатах; найшвидший спуск (або круте сходження); сполучення градієнтів і ін. [7].