

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ НАЦІОНАЛЬНА  
МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

**ПРОГРАМА, МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ**

**З ДИСЦИПЛІНИ «МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ  
СИСТЕМ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ»  
ДЛЯ СТУДЕНТІВ ЗАОЧНОЇ ФОРМИ НАВЧАННЯ**

**напрямку 122 – Комп'ютерні науки**

ДНІПРОПЕТРОВСЬК НМетАУ 2019

Програма, методичні вказівки та контрольні завдання з дисципліни «Математичні методи моделювання систем з розподіленими параметрами» для студентів заочної форми навчання напрямку 122 – Комп'ютерні науки/ Склала Т.В. Селівьорстова. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2019.

Викладена програма дисципліни «Математичні методи моделювання систем з розподіленими параметрами», зміст лекційного курсу, приведені завдання до виконання контрольних робіт, питання до підсумкового контролю.

## **ВСТУП**

Згідно з навчальним планом та програмою дисципліни "Математичні методи моделювання систем з розподіленими параметрами" передбачена робота студентів в об'ємі 130 години самостійних занять по джерелах літератури, нормативних документах і виконанню контрольної роботи.

Крім того, згідно з навчальним планом передбачено проведення 8 години лекційних, 12 лабораторних аудиторних занять на кафедрі інформаційних технологій та систем. В лекціях будуть розглянуті найбільш актуальні та складні питання пов'язані з теорією математичних методів моделювання систем з розподіленими параметрами.

Зміст і об'єм самостійної роботи студентів по вивченню джерел літератури та нормативних документів в об'ємі 130 годин.

**1 РОБОЧА ПРОГРАМА З ДИСЦИПЛІНИ**  
**"Математичні методи моделювання систем**  
**з розподіленими параметрами"**

**1 ЛЕКЦІЙНИЙ КУРС (8 год.)**

**Тема 1.** Вступ в математичне моделювання (2 год.).

**Тема 2.** Класифікація диференційних рівнянь (2 год.).

**Тема 3.** Загальні відомості про об'єкти з розподіленими параметрами (2 год.).

**Тема 4.** Методика моделювання об'єктів з розподіленими параметрами другого порядку (2 год.).

**2 ЛАБОРАТОРНІ РОБОТИ (12 год.)**

1. Побудова типових моделей об'єктів з розподіленими параметрами (12 год.)

**3 САМОСТІЙНА ПРОРОБКА РОЗДІЛІВ ПРОГРАМИ, ЩО НЕ**  
**ВИКЛАДАЮТЬСЯ НА ЛЕКЦІЯХ (130 год.)**

1. Метод кінцевих різниць.

2. Метод кінцевих елементів.

3. Метод клітинних автоматів.

**4 ЗАВДАННЯ НА КОНТРОЛЬНІ РОБОТИ**

**Контрольні запитання**

1. Класифікація математичних моделей. Класифікація диференціальних рівнянь.
2. Загальні відомості про об'єкти з розподіленими параметрами. Методика моделювання об'єктів з розподіленими параметрами.
3. Історія розвитку чисельних методів. Метод кінцевих різниць.

4. Метод прогонки для отримання числового розв'язку диференційних рівнянь в частинних похідних.
5. Програмні комплекси моделювання систем з розподіленими параметрами.
6. Метод кінцевих елементів. Загальна схема. Вхідні та вихідні параметри для проведення моделювання фізичних об'єктів польової природи.
7. Клітинні автомати. Гра «Життя». КА Вольфрама.
8. Клітинні автомати. Застосування у моделюванні систем з розподіленими параметрами. Математика. Фізика. Біологія.
9. Комерційні програмні засоби моделювання систем з розподіленими параметрами.
10. Вільнопоширені програмні засоби моделювання систем з розподіленими параметрами.
11. Програмні засоби моделювання металургійних та ливарних процесів.
12. Візуальне моделювання. Програмні засоби. Стек технологій. Галузь застосування.
13. Моделювання транспортних потоків. Програмні засоби. Галузь застосування.

**Виконати лабораторні роботи по дисципліні**  
**" Математичні методи моделювання систем**  
**з розподіленими параметрами "**

**Задача 1. Нагрев полубесконечного тела**

Под одномерным полубесконечным телом понимается тонкий стержень с теплоизолированной боковой поверхностью или неограниченная пластина (см. рис. 1), которые с одной стороны ограничиваются плоскостью, а с другой – продолжают в бесконечность. С практической точки зрения, такая постановка задачи может применяться при исследовании процессов интенсивного нагрева поверхности тела, например, в процессе закалки. Поскольку при исследовании подобных процессов интерес представляет температурное распределение на небольшом расстоянии от поверхности, то массивное тело можно принять полубесконечным. Пример: требуется

смоделировать температурное распределение на глубине от 0 до 5 мм при общей толщине тела 10 см.

Постановка задачи. Дан полуограниченный стальной стержень при температуре  $T_0$  с теплоизолированной боковой поверхностью. Граница стержня  $x = \infty$  теплоизолирована, на другой границе  $x = 0$  задан постоянный тепловой поток  $q(t) = q_c$  (ГУ2). Найти температуру стержня, построить график зависимости температуры стержня от времени в нескольких точках по объему тела  $x \in [0, 0.1]$  м.

Исходные данные:

$$T_0 = 20^\circ\text{C}; q_c = 65 \text{ кВт/м}^2.$$

Теплофизические характеристики стали:

$$\lambda = 47 \left[ \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{C}} \right], c = 462 \left[ \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}} \right], \rho = 7800 \left[ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right].$$

Решение. Запишем математическую модель рассматриваемого объекта.

Одномерное дифференциальное уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}, x \in (0, L/2), t \in (0, \infty); \quad (34)$$

с соответствующими начальным

$$T(x, t)|_{t=0} = 0, x \in [0, \infty]; \quad (35)$$

и граничными условиями

$$-\lambda \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = q_c, t \in (0, \infty); \quad (36)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=\infty} = 0, t \in (0, \infty). \quad (37)$$

Решим эту задачу операционным методом.

Этап 1

Применим преобразование Лапласа (31), (32) к уравнению (34) и запишем полученное неоднородное дифференциальное уравнение для изображений в стандартном виде

$$a \frac{d^2 \bar{T}(x, p)}{dx^2} - p \bar{T}(x, p) = -T_0. \quad (38)$$

Этап 2

2.1. Рассмотрим соответствующее (38) однородное уравнение второго порядка

$$a \frac{d^2 \bar{T}(x, p)}{dx^2} - p \bar{T}(x, p) = 0. \quad (39)$$

Его общее решение имеет вид

$$\bar{T}(x, p) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}. \quad (40)$$

Для нахождения значений  $r_1$  и  $r_2$  на основе замены  $\frac{d^n \bar{T}(x, p)}{dx^n} \rightarrow r^n$

составляется характеристическое уравнение

$$ar^2 - p = 0, \quad (41)$$

откуда определяются его корни

$$r_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{p}{a}}, \quad (42)$$

и общее решение однородного уравнения (39) записывается в виде

$$\bar{T}(x, p) = C_1 e^{\sqrt{\frac{p}{a}}x} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}x}. \quad (43)$$

2.2. В случае равномерного начального распределения температур правая часть уравнения (38) имеет специальный вид  $f(x) = -T_0$ , которой соответствует решение

$$\bar{T}_{\text{част}}(x, p) = \frac{T_0}{p}. \quad (44)$$

Решение (44) получается непосредственно из (38), если приравнять производную второго порядка нулю. Равенство производной нулю, в свою очередь очевидно: температура постоянна по всей длине, а производная от константы равна нулю.

2.3. Общее решение неоднородного уравнения (38) в пространстве изображений состоит из суммы (43) и (44)

$$\bar{T}(x, p) = C_1 e^{\sqrt{\frac{p}{a}}x} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}x} + \frac{T_0}{p}. \quad (45)$$

Этап 3

Для нахождения произвольных постоянных  $C_1$  и  $C_2$  переведем с помощью преобразования Лапласа граничные условия в пространство изображений:

$$-\lambda \frac{d\bar{T}(x, p)}{dx} \Big|_{x=0} = \frac{q_c}{p}; \quad (46)$$

$$\frac{d\bar{T}(x, p)}{dx} \Big|_{x=\infty} = 0. \quad (47)$$

На основании (45) найдём выражение для производной  $\frac{d\bar{T}(x, p)}{dx}$ :

$$\frac{d\bar{T}(x, p)}{dx} = \sqrt{\frac{p}{a}} C_1 e^{\sqrt{\frac{p}{a}} x} - \sqrt{\frac{p}{a}} C_2 e^{-\sqrt{\frac{p}{a}} x}. \quad (48)$$

Рассмотрим граничное условие (47) для  $x = \infty$ . Подставим в выражение (48) значение  $x = \infty$ .

$$\left. \frac{d\bar{T}(x, p)}{dx} \right|_{x=\infty} = \left( \sqrt{\frac{p}{a}} C_1 e^{\sqrt{\frac{p}{a}} x} - \sqrt{\frac{p}{a}} C_2 e^{-\sqrt{\frac{p}{a}} x} \right)_{x=\infty} = 0. \quad (49)$$

Второе слагаемое в (49) при  $x = \infty$  равно нулю, благодаря отрицательному значению показателя степени экспоненты, а первое слагаемое стремится к бесконечности, что противоречит физике процесса нагрева тела.

Единственный способ избежать этого противоречия – принять константу  $C_1$  равной нулю:

$$C_1 = 0. \quad (50)$$

На основании (48), с учётом (50), найдём выражение для  $\left. \frac{d\bar{T}(x, p)}{dx} \right|_{x=0}$ :

$$\left. \frac{d\bar{T}(x, p)}{dx} \right|_{x=0} = -\lambda \left( \sqrt{\frac{p}{a}} C_1 e^{\sqrt{\frac{p}{a}} x} - \sqrt{\frac{p}{a}} C_2 e^{-\sqrt{\frac{p}{a}} x} \right)_{x=0} = \lambda \sqrt{\frac{p}{a}} C_2. \quad (51)$$

Подставив (51) в граничное условие для  $x = 0$  (46) получаем соотношение

$$\lambda \sqrt{\frac{p}{a}} C_2 = \frac{q_c}{p}. \quad (52)$$

Откуда находим значение второй постоянной

$$C_2 = \frac{q_c}{\lambda p} \sqrt{\frac{a}{p}}. \quad (53)$$

На основании (45), (50) и (53) запишем частное решение для изображений

$$\bar{T}(x, p) = \frac{q_c}{\lambda p} \sqrt{\frac{a}{p}} e^{-\sqrt{\frac{p}{a}} x} + \frac{T_0}{p} = \frac{q_c \sqrt{a}}{\lambda} \cdot \frac{1}{p \sqrt{p}} e^{-\sqrt{\frac{p}{a}} x} + \frac{T_0}{p}. \quad (54)$$

Этап 4

Для нахождения оригинала решения воспользуемся таблицей преобразований, откуда (см. Приложение 1, свойство 2 и Приложение 2, п. 52 и п. 1) получаем



$$\begin{aligned}
T(x, t) &= \frac{2q_c \sqrt{at}}{\lambda} \operatorname{ierfc} \frac{x}{2\sqrt{at}} + T_0 = \\
&= \frac{2q_c \sqrt{at}}{\lambda} \left( \sqrt{\frac{1}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4at}} - \frac{x}{2\sqrt{at}} \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{at}} \right) + T_0 =. \\
&= \frac{q_c}{\lambda} \left( \frac{2\sqrt{at}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4at}} - x \cdot \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{at}} \right) + T_0.
\end{aligned} \tag{55}$$

### Примечание

При решении задач математической физики встречаются специальные математические функции, не сводящиеся к элементарным функциям, – функции ошибок. Приведём здесь наиболее распространённые из них:

1. Функция ошибок Гаусса (интеграл вероятности ошибки)

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-y^2} dy. \tag{56}$$

Основные свойства функции  $\operatorname{erf}(z)$ :

$$\operatorname{erf}(\infty) = 1, \operatorname{erf}(-z) = -\operatorname{erf}(z).$$

2. Дополняющая функция ошибок  $\operatorname{erfc}(z)$  (вычисляет дополнение к интегралу вероятности ошибки)

$$\operatorname{erfc}(z) = 1 - \operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-y^2} dy. \tag{57}$$

В некоторых современных программных средствах для математических расчетов (например, Matlab, Mathematica) функции  $\operatorname{erf}(z)$  и  $\operatorname{erfc}(z)$  являются встроенными.

Графики рассмотренных функций имеют вид (рис. 2).

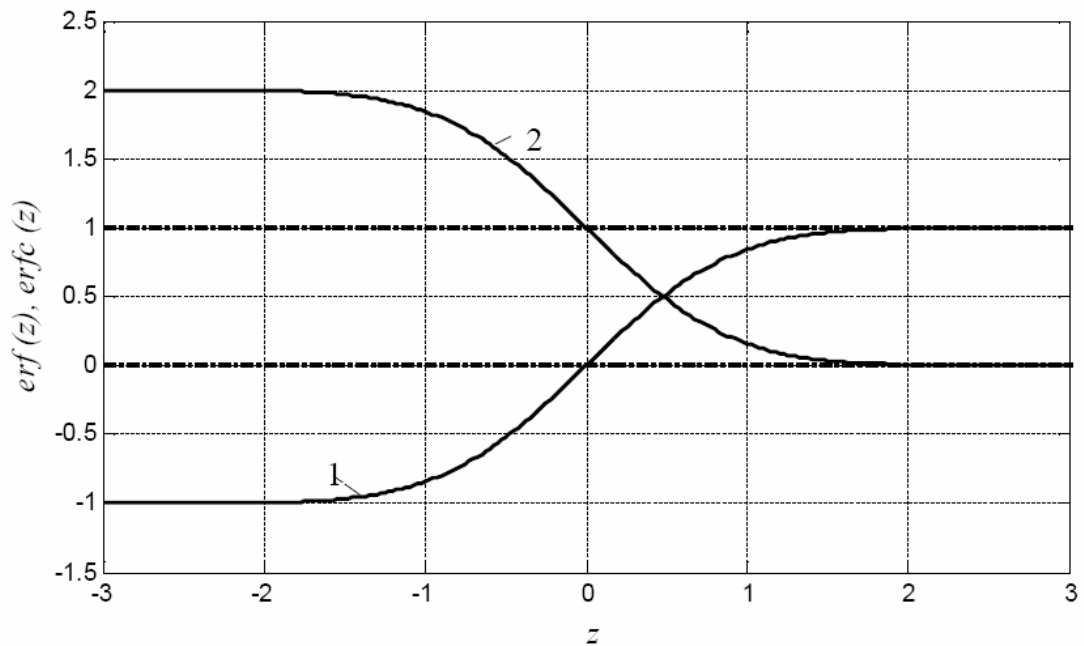


Рис. 2. Графики функций  $\operatorname{erf}(z)$  – кривая 1 и  $\operatorname{erfc}(z)$  – кривая 2

3. Операции дифференцирования и интегрирования функций  $\operatorname{erf}(z)$  и  $\operatorname{erfc}(z)$ . Для интегрирования функции  $\operatorname{erfc}(z)$  применяются обозначения

$$i^n \operatorname{erfc}(z) = \int_0^{\infty} i^{n-1} \operatorname{erfc}(\xi) d\xi. \quad (58)$$

Функция  $i \operatorname{erfc}(z)$  может быть выражена через функцию  $\operatorname{erfc}(z)$

$$i \operatorname{erfc}(z) = \int_z^{\infty} \operatorname{erfc}(\xi) d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} - z \operatorname{erfc}(z). \quad (59)$$

Общая рекуррентная функция имеет вид

$$2ni \operatorname{erfc}(z) = i^{n-2} \operatorname{erfc}(z) - 2zi^{n-1} \operatorname{erfc}(z). \quad (60)$$

Пример реализации решения (55) в Matlab приведён в листинге 1.

Листинг 1. Расчёт поведения температуры во времени в заданных точках пространственной координаты

```
% Исходные данные
lam=47; % Коэффициент теплопроводности стали
c=462; % Удельная теплоемкость стали
ro=7.8e3; % Плотность стали
q=65000; % Удельная плотность теплового потока
T0=20; % Начальная температура стержня
a=lam/(c*ro); % Коэффициент температуропроводности
X=[0 0.02 0.05 0.1]; % Вектор пространственных координат
% точек контроля, [м]
N=length(X); % Количество точек контроля
```

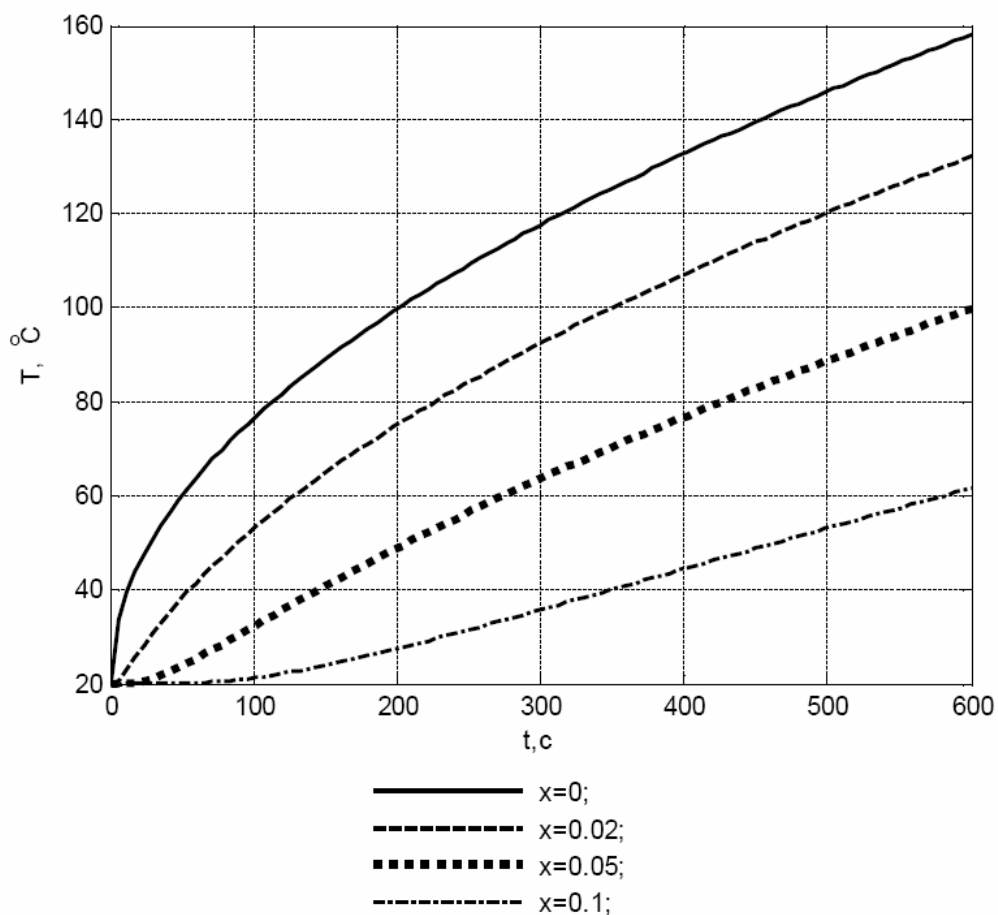
```

T_end=600; % Длина интервала моделирования, [с]
dt=T_end/100; % Временной шаг моделирования, [с]
% Двойной цикл для моделирования изменения температурного
% поля во времени в точках, принадлежащих вектору X
for i=1:N
x=X(i);
j=1;
t=0;
T(i,j)=T0;
j=j+1;

for t=dt:dt:T_end
T(i,j)=q/lam*(2*(a*t/pi)^.5*exp(-x^2/(4*a*t))-...
x*erfc(x/(2*(a*t)^.5)))+T0;
j=j+1;
end
end
t_m=0:dt:T_end; % Массив значений моментов времени
% измерений, [с]
figure(1)
plot(t_m, T(1,:),t_m, T(2,:),t_m, T(3,:),t_m, T(4,:))
grid

```

В результате решения краевой задачи теплопроводности (34) – (37) и моделирования рассматриваемого процесса в Matlab получены следующие результаты (рис. 3).



1 –  $x_1 = 0$ ; 2 –  $x_2 = 0.02$ ; 3 –  $x_3 = 0.05$ ; 4 –  $x_4 = 0.1$

Рис. 3. График зависимости температуры тела от времени для принятых значений точек контроля

Рассматриваемая задача (34)-(37) относится к краевым задачам теплопроводности второго рода. Управляющим воздействием здесь является заданный постоянный тепловой поток  $q_c$  на границе  $x = 0$ . Соответственно, полученные графики (рис. 3) изменения выходного воздействия – температуры – при постоянном входном воздействии являются переходными характеристиками объекта в различных точках.

Как видно из рис. 3, рассматриваемый объект при управлении по тепловому потоку обладает астатическими свойствами, и для любого фиксированного значения  $x$  представляет собой объект без самовыравнивания. Это очевидно на регулярной стадии процесса нагрева (при  $t > 500$  c), когда температура в различных точках объема тела изменяется по линейному закону с постоянной скоростью.

Рассмотрим пространственное распределение температурного поля в процессе нагрева. Для этого промоделируем изменение температуры (55) по пространственной координате  $x \in [0, 0.1]$  в несколько моментов времени  $t_1 = 30$  c,  $t_2 = 90$  c,  $t_3 = 220$  c,  $t_4 = 400$  c,  $t_5 = 600$  c (листинг 2).

## Листинг 2. Расчёт температурных распределений по пространственной координате в заданные моменты времени

```
Tt=[30 90 220 400 T_end]; % Вектор значений моментов
% времени измерения
N1=length (Tt); % Количество моментов времени
x_end=X(N); % Длина участка изменения
% пространственной координаты
dx=x_end/100; % Шаг моделирования по пространственной
% координате
% Моделирование пространственного изменения
% температурного поля в различные моменты времени
for i=1:N1
t=Tt(i);
j=1;

for x=0:dx:x_end
Tx(i,j)=q/lam*(2*(a*t/pi)^.5*exp(-x^2/(4*a*t))-...
x*erfc(x/(2*(a*t)^.5)))+T0;
j=j+1;
end
end
x_m=0:dx:x_end; % Массив значений пространственных
% координат
figure (2)
plot(x_m, Tx(1,:),x_m, Tx(2,:),x_m, Tx(3,:),...
x_m, Tx(4,:),x_m, Tx(5,:))
grid
```

Из рис. 4 видно, что при подаче на внутреннюю границу тела постоянного теплового потока пространственное распределение температуры убывает от точки  $x = 0$  к бесконечно удалённой границе в любой момент времени. При этом кривые 1, 2 и 3, полученные в моменты времени  $t_1$ ,  $t_2$  и  $t_3$ , соответствуют для выбранного участка изменения пространственной координаты моментам времени до выхода на регулярную стадию нагрева, а кривые 4 и 5 – регулярной стадии, на протяжении которой сохраняется неизменное во времени параболическое распределение температуры по пространственной координате.

Полученные графики температурного распределения во времени (рис. 3) и в пространстве (рис. 4) соответствуют одноинтервальному управлению при неизменной плотности теплового потока. Характерная задача оптимизации процесса нагрева металла перед последующей обработкой давлением [9, 10] предусматривает управление по граничным условиям, состоящее из чередующихся интервалов нагрева с максимальной мощностью и последующего интервала выравнивания температур при нулевой мощности нагрева. В большинстве типичных ситуаций число интервалов постоянства не превышает двух-трёх.

Рассмотрим процесс нагрева, состоящий из двух интервалов – интервала максимальной мощности и интервала выравнивания температур.

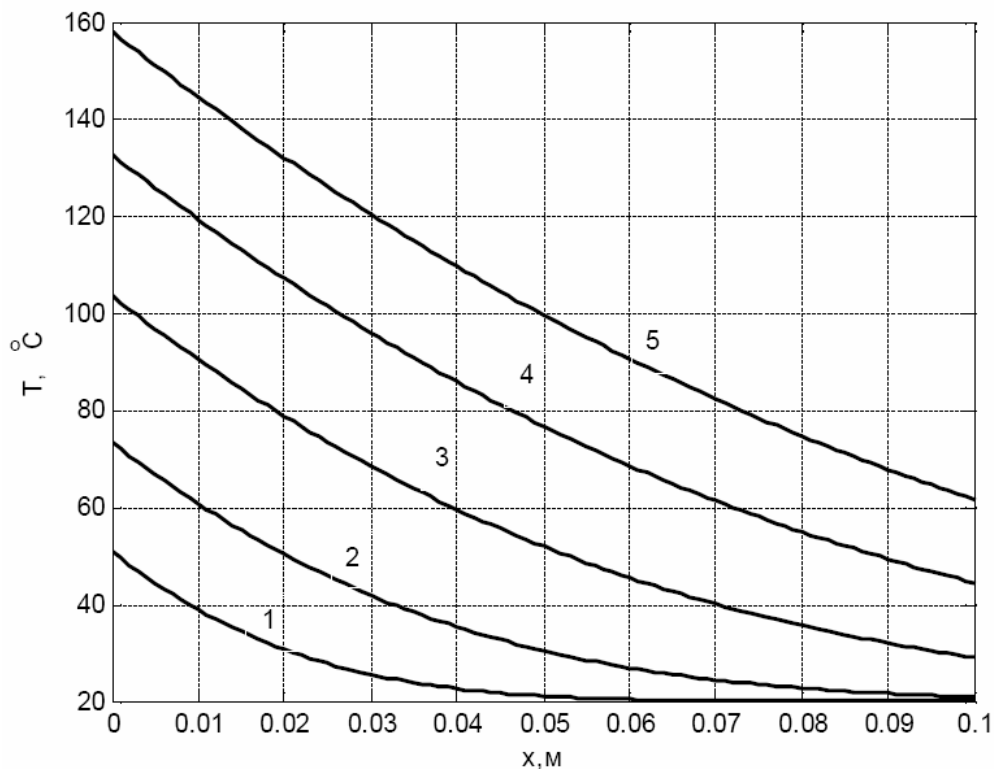


Рис. 4. Пространственное распределение температур (кривые 1-5) в заданные моменты времени  $t_1 - t_5$

Приведём программную реализацию процесса нагрева при двухинтервальном управлении (листинг 3). Момент времени  $t = 600$  с примем за окончание интервала нагрева и промоделируем изменение температуры (55) во времени  $t \in [0, 800]$  с и в пространстве  $x \in [0, 0.1]$  в следующие моменты  $t_1 = 500$  с,  $t_2 = 600$  с,  $t_3 = 670$  с,  $t_4 = 740$  с,  $t_5 = 800$  с.

Листинг 3. Расчёт температурного распределения при двухинтервальном управлении

```
T_end1=600; % Длина интервала моделирования, [с]
T_end2=800; % Длина интервала моделирования
dt=T_end1/100; % Временной шаг моделирования, [с]

% Моделирование температурного распределения
% во времени в фиксированных точках x
for i=1:N
    x=X(i);
    T(i,1)=T0; % значение температуры при t=0 (j=1)
    j=2;
    for t=dt:dt:T_end1
        T(i,j)=q/lam*(2*(a*t/pi)^.5*exp(-x^2/(4*a*t))-...
            x*erfc(x/(2*(a*t)^.5)))+T0;
        j=j+1;
    end
    for t=(T_end1+dt):dt:T_end2
        T(i,j)=q/lam*(2*(a*t/pi)^.5*exp(-x^2/(4*a*t))-...
            x*erfc(x/(2*(a*t)^.5)))-...
```

```

(q/lam*(2*(a*(t-T_end1)/pi)^.5*...
exp(-x^2/(4*a*(t-T_end1)))-...
x*erfc(x/(2*(a*(t-T_end1))^.5))))+T0;
j=j+1;
end
end
t_m=0:dt:T_end2; % Массив значений моментов
% времени измерений
figure (1)
plot(t_m, T(1,:),t_m, T(2,:),t_m, T(3,:),t_m, T(4,:))
grid
Tt=[500 600 670 740 800]; % Вектор значений моментов
% времени измерения
N1=length (Tt); % Количество моментов времени
x_end=X(N); % Длина участка изменения
% пространственной координаты
dx=x_end/100; % Шаг моделирования по пространственной
% координате
% Моделирование пространственного изменения
% температурного поля в различные моменты времени
for i=1:N1
t=Tt(i);
j=1;

if (t<=T_end1)
for x=0:dx:x_end
Tx(i,j)=q/lam*(2*(a*t/pi)^.5*exp(-x^2/(4*a*t))-...
x*erfc(x/(2*(a*t)^.5)))+T0;
j=j+1;
end
else
for x=0:dx:x_end
Tx(i,j)=q/lam*(2*(a*t/pi)^.5*exp(-x^2/(4*a*t))-...
x*erfc(x/(2*(a*t)^.5)))-...
(q/lam*(2*(a*(t-T_end1)/pi)^.5*...
exp(-x^2/(4*a*(t-T_end1)))-...
x*erfc(x/(2*(a*(t-T_end1))^.5))))+T0;
j=j+1;
end
end
end
x_m=0:dx:x_end; % Массив значений пространственных
% координат
figure (2)
plot(x_m, Tx(1,:),x_m, Tx(2,:),x_m, Tx(3,:),...
x_m, Tx(4,:),x_m, Tx(5,:))
grid

```

Рисунки 5 и 6 показывают характерное поведение температурного поля в течение первого интервала нагрева с максимальной мощностью и последующего интервала выравнивания температур. Момент времени  $t_2 = 600 \text{ с}$  соответствует окончанию интервала нагрева, после чего тепловой поток более не поступает на тело. Во время второго интервала происходит

снижение неравномерности нагрева за счет выравнивания температурного поля между «перегретой» границей  $x = 0$  и «недогретыми» внутренними точками. На рис. 6 видно уменьшение неравномерности температурного распределения на рассматриваемом участке  $x \in [0, 0.1]$  от  $\Delta T \approx 158 - 62 \approx 96^\circ C$  при  $t_2 = 600 c$  до  $\Delta T \approx 100 - 70 \approx 30^\circ C$  при  $t_5 = 800 c$ .

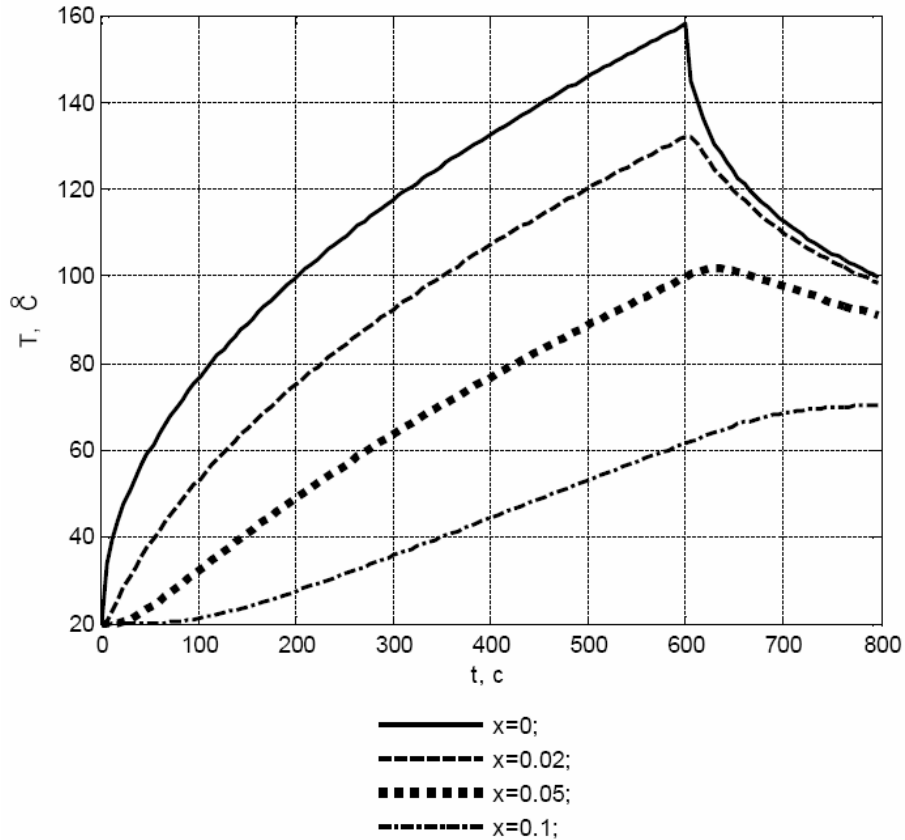


Рис. 5. График зависимости температуры тела от времени в контролируемых точках при двухинтервальном управлении



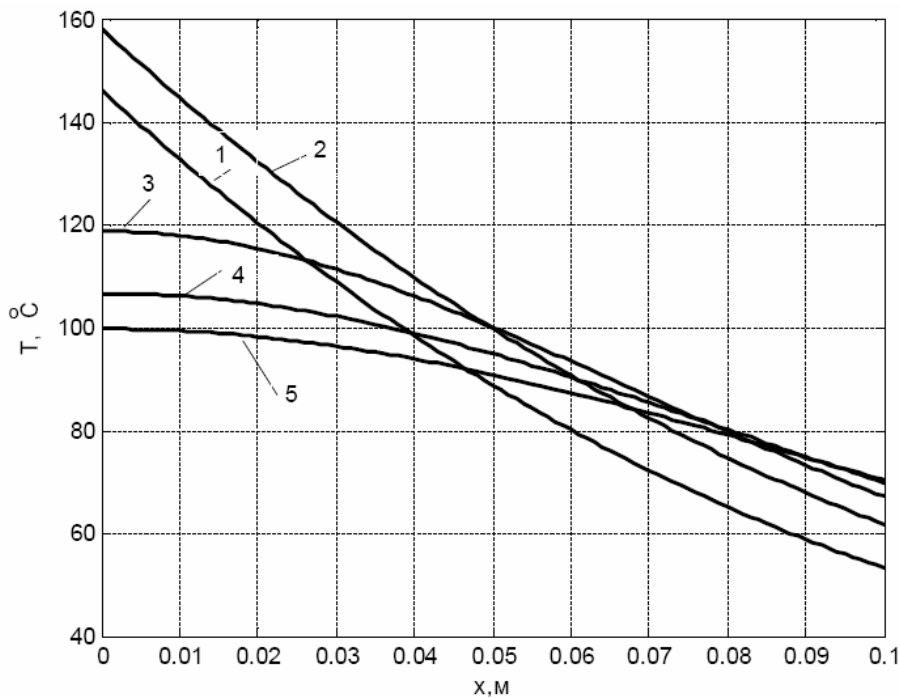


Рис. 6. Пространственное распределение температур (кривые 1-5) в заданные моменты времени  $t_1 - t_5$  при двухинтервальном управлении

## Задача 2. Нагрев тела конечных размеров

Найти температуру стального стержня длиной  $l$ , с теплоизолированной боковой поверхностью, если граница  $x = 0$  стержня теплоизолирована, а на границе  $x = l$  происходит конвективный теплообмен с окружающей средой, температура которой меняется по закону  $T_c(t) = T^* - (T^* - T_0)e^{-\beta t}$ .

Начальная температура стержня равна  $T_0$ .

Построить график зависимости температуры стержня от времени в нескольких точках по объему тела, сравнить с графиком температуры среды. Исходные данные:

$$l = 1.2 \text{ м}, T_0 = 20^\circ\text{C}, T^* = 120^\circ\text{C}, \beta = 2 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{с}}.$$

Решение

Построим математическую модель рассматриваемого объекта. Одномерное дифференциальное уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}, \quad x \in [0, l], \quad t \in (0, \infty); \quad (61)$$

с соответствующими краевыми условиями

$$T(x, t)|_{t=0} = T_0, \quad x \in (0, l); \quad (62)$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad t \in (0, \infty); \quad (63)$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=l} = \alpha (T_c(t) - T(l,t)), \quad t \in (0, \infty). \quad (64)$$

где  $T_c(t) = T^* - (T^* - T_0) e^{-\beta t}$ .

По-прежнему будем решать поставленную задачу на основе операционного метода.

Этап 1 и этап 2 выполнены ранее для задачи 1, дифференциальное уравнение для изображений совпадает с выражением (38) с той лишь разницей, что в данной задаче область изменения пространственной координаты ограничена  $x \in [0, l]$ .

Его общее решение также получено ранее и совпадает с (45).

Этап 3

Для нахождения произвольных постоянных  $C_1$  и  $C_2$  переведем граничные условия в пространство изображений

$$\frac{d\bar{T}(x, p)}{dx} \Big|_{x=0} = 0; \quad (65)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{T}(x, p)}{dx} \Big|_{x=l} &= L^{-1} \left\{ \frac{\alpha}{\lambda} \left( T^* - (T^* - T_0) e^{-\beta t} - T(l, t) \right) \right\} = \\ &= \frac{\alpha}{\lambda} \left( \frac{T^*}{p} - \frac{T^* - T_0}{p + \beta} - T(l, p) \right). \end{aligned} \quad (66)$$

С учётом полученного ранее выражения для производной  $\frac{d\bar{T}(x, p)}{dx}$  (48),

запишем граничное условие (65) при  $x = 0$ :

$$\frac{d\bar{T}(x, p)}{dx} \Big|_{x=0} = \left( \sqrt{\frac{p}{a}} C_1 e^{\sqrt{\frac{p}{a}} x} - \sqrt{\frac{p}{a}} C_2 e^{-\sqrt{\frac{p}{a}} x} \right)_{x=0} = \sqrt{\frac{p}{a}} (C_1 - C_2) = 0, \quad (67)$$

откуда

$$C_1 = C_2 = \frac{C}{2}. \quad (68)$$

Используя известные соотношения  $\frac{e^z - e^{-z}}{2} = \text{sh } z$ ;  $\frac{e^z + e^{-z}}{2} = \text{ch } z$  и

полученные значения произвольных постоянных (68), представим выражение (45) в виде

$$\bar{T}(x, p) = \frac{C}{2} \left( e^{\sqrt{\frac{p}{a}} x} + e^{-\sqrt{\frac{p}{a}} x} \right) + \frac{T_0}{p} = C \text{ch} \left( \sqrt{\frac{p}{a}} x \right) + \frac{T_0}{p}, \quad (69)$$

и, соответственно, выражение для производной в виде

$$\frac{d\bar{T}(x, p)}{dx} = C\sqrt{\frac{p}{a}} \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{a}}x\right). \quad (70)$$

Применим (69) и (70) к граничному условию (66) на границе  $x = l$ :

$$\left.\frac{d\bar{T}(x, p)}{dx}\right|_{x=l} = C\sqrt{\frac{p}{a}} \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{a}}l\right) = \frac{\alpha}{\lambda}\left(\frac{T^*}{p} - \frac{T^* - T_0}{p + \beta} - C \operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{p}{a}}l\right) - \frac{T_0}{p}\right). \quad (71)$$

Через промежуточные преобразования

$$C\left(\frac{\alpha}{\lambda} \operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{p}{a}}l\right) + \sqrt{\frac{p}{a}} \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{a}}l\right)\right) = \frac{\alpha}{\lambda}\left(\frac{T^* - T_0}{p} - \frac{T^* - T_0}{p + \beta}\right) \quad (72)$$

получим выражение для произвольной постоянной

$$C = \frac{T^* - T_0}{p\left(\frac{p}{\beta} + 1\right)\left(\operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{p}{a}}l\right) + \frac{\lambda}{\alpha}\sqrt{\frac{p}{a}} \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{a}}l\right)\right)}. \quad (73)$$

На основании (69) и (73) частное решение для изображений, соответствующее заданным краевым условиям, примет вид

$$\bar{T}(x, p) = \frac{(T^* - T_0) \operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{p}{a}}x\right)}{p\left(\frac{p}{\beta} + 1\right)\left(\operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{p}{a}}l\right) + \frac{\lambda}{\alpha}\sqrt{\frac{p}{a}} \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{a}}l\right)\right)} + \frac{T_0}{p}. \quad (74)$$

Этап 4

Найти оригинал

$$\frac{(T^* - T_0) \operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{p}{a}}x\right)}{p\left(\frac{p}{\beta} + 1\right)\left(\operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{p}{a}}l\right) + \frac{\lambda}{\alpha}\sqrt{\frac{p}{a}} \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{a}}l\right)\right)} = \frac{\varphi(p)}{\psi(p)} \quad (75)$$

с использованием таблиц преобразований не удастся, поэтому рассмотрим возможность применения теоремы разложения. С помощью разложения гиперболических функций в ряд (Приложение 3) выражение числителя  $\operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{p}{a}}x\right)$  может быть приведено к полиному относительно  $p$ , аналогично

выражения знаменателя  $\operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{p}{a}}l\right)$  и  $\sqrt{\frac{p}{a}} \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{a}}l\right)$  также являются полиномами степеней  $p$ , причём полином знаменателя не содержит

постоянной, что обуславливает возможность применения теоремы разложения.

Найдём корни знаменателя  $\psi(p)$

$$\psi(p) = p \left( \frac{p}{\beta} + 1 \right) \left( \operatorname{ch} \left( \sqrt{\frac{p}{a}} l \right) + \frac{\lambda}{\alpha} \sqrt{\frac{p}{a}} \operatorname{sh} \left( \sqrt{\frac{p}{a}} l \right) \right) = 0. \quad (76)$$

Первый очевидный корень  $p_1 = 0$ , второй корень  $p_2 = -\beta$ , для нахождения других корней воспользуемся соотношениями

$$\operatorname{sh} z = -i \sin iz; \operatorname{ch} z = \cos iz. \quad (77)$$

С использованием (77) из выражения (76) можно получить

$$\cos \left( i \sqrt{\frac{p}{a}} l \right) - i \frac{\lambda}{\alpha} \sqrt{\frac{p}{a}} \sin \left( i \sqrt{\frac{p}{a}} l \right) = 0. \quad (78)$$

Обозначим

$$i \sqrt{\frac{p}{a}} l = \mu, \quad (79)$$

и выражение (78) примет вид

$$\cos \mu - i \frac{\lambda}{\alpha} \cdot \frac{\mu}{l} \sin \mu = 0. \quad (80)$$

Соотношение (80) – характеристическое уравнение, имеющее бесчисленное множество корней  $\mu_n$ , которые при приближённом описании функции оригинала с помощью конечного числа корней  $N$  могут быть найдены методами численного решения нелинейных уравнений. При этом на основе (79) корни знаменателя  $p_n$ ,  $n = \overline{3, N}$  могут быть выражены как:

$$p_n = -\frac{a\mu_n^2}{l^2}, \quad n = \overline{3, N}. \quad (81)$$

В соответствии со сказанным, полином  $\psi(p)$  имеет простые корни  $p_n$ ,  $n = \overline{1, N}$ , и для определения оригинала нужно применить теорему разложения (29).

Для этого нужно найти производную знаменателя (76) и подставить сюда соответствующие значения корней  $p_n$ ,  $n = \overline{1, N}$ .

Учитывая, что  $\operatorname{sh}' z = \operatorname{ch} z$ ;  $\operatorname{ch}' z = \operatorname{sh} z$ ; получим

$$\begin{aligned}
\psi'(p) &= \left[ p \left( \frac{p}{\beta} + 1 \right) \left( \operatorname{ch} \left( \sqrt{\frac{p}{a}} l \right) + \frac{\lambda}{\alpha} \sqrt{\frac{p}{a}} \operatorname{sh} \left( \sqrt{\frac{p}{a}} l \right) \right) \right]' = \\
&= \left\{ \left( \frac{p}{\beta} + 1 \right) \left( \operatorname{ch} \left( \sqrt{\frac{p}{a}} l \right) + \frac{\lambda}{\alpha} \sqrt{\frac{p}{a}} \operatorname{sh} \left( \sqrt{\frac{p}{a}} l \right) \right) + \frac{p}{\beta} \left( \operatorname{ch} \left( \sqrt{\frac{p}{a}} l \right) + \frac{\lambda}{\alpha} \sqrt{\frac{p}{a}} \operatorname{sh} \left( \sqrt{\frac{p}{a}} l \right) \right) \right\} + \\
&+ \frac{1}{2} \left( \frac{p}{\beta} + 1 \right) \left( \sqrt{\frac{p}{a}} l \operatorname{sh} \left( \sqrt{\frac{p}{a}} l \right) + \frac{\lambda}{\alpha} \sqrt{\frac{p}{a}} \operatorname{sh} \left( \sqrt{\frac{p}{a}} l \right) + \frac{\lambda}{\alpha} \cdot \frac{p}{a} \cdot l \operatorname{ch} \left( \sqrt{\frac{p}{a}} l \right) \right). \tag{82}
\end{aligned}$$

Найдём значение знаменателя для  $p_n$ ,  $n = \overline{1, N}$ .

Для корня  $p_1 = 0$  имеем

$$\psi'(0) = \operatorname{ch} 0 = 1. \tag{83}$$

Для корня  $p_2 = -\beta$  на основании соотношений  $\operatorname{sh} iz = i \sin z$ ;  $\operatorname{ch} iz = \cos z$  получим

$$\begin{aligned}
\psi'(-\beta) &= - \left( \operatorname{ch} \left( \sqrt{\frac{-\beta}{a}} l \right) + \frac{\lambda}{\alpha} \sqrt{\frac{-\beta}{a}} \operatorname{sh} \left( \sqrt{\frac{-\beta}{a}} l \right) \right) = \\
&= - \left( \cos \left( \sqrt{\frac{\beta}{a}} l \right) - \frac{\lambda}{\alpha} \sqrt{\frac{\beta}{a}} \cdot \sin \left( \sqrt{\frac{\beta}{a}} l \right) \right). \tag{84}
\end{aligned}$$

Для корней  $p_n \neq 0$ ,  $n = \overline{3, N}$ , учитывая, что на основании (76) первые два слагаемых в скобках в (82) равны нулю, и используя (81) и полученные из (79) соотношения

$$\sqrt{\frac{p_n}{a}} = \sqrt{\frac{-a\mu_n^2}{al^2}} = i \frac{\mu_n}{l}; \quad \sqrt{\frac{p_n}{a}} l = i\mu_n;$$

$$\operatorname{sh} \left( \sqrt{\frac{p_n}{a}} l \right) = \operatorname{sh}(i\mu_n) = i \sin \mu_n;$$

$$\operatorname{ch} \left( \sqrt{\frac{p_n}{a}} l \right) = \operatorname{ch}(i\mu_n) = \cos \mu_n;$$

найдем

$$\psi'(p_n) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{a\mu_n^2}{\beta l^2} \right) \left( -\mu_n \sin \mu_n - \frac{\lambda}{\alpha} \cdot \frac{\mu_n}{l} \cdot \sin \mu_n - \frac{\lambda}{\alpha} \cdot \frac{\mu_n^2}{l} \cos \mu_n \right). \tag{85}$$

Из характеристического уравнения (81) выразим

$$\frac{\lambda}{\alpha l} \cdot \mu_n = \frac{\cos \mu_n}{\sin \mu_n} \tag{86}$$

и подставим в (85)

$$\begin{aligned}
\psi'(p_n) &= -\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{a\mu_n^2}{\beta l^2} \right) \left( \mu_n \sin \mu_n + \frac{\cos \mu_n}{\sin \mu_n} \cdot \sin \mu_n + \mu_n \frac{\cos \mu_n}{\sin \mu_n} \cos \mu_n \right) = \\
&= -\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{a\mu_n^2}{\beta l^2} \right) \cdot \frac{1}{\sin \mu_n} \left( \mu_n \sin^2 \mu_n + \cos \mu_n \cdot \sin \mu_n + \mu_n \cos \mu_n \right) = \quad .(87) \\
&= -\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{a\mu_n^2}{\beta l^2} \right) \cdot \frac{\mu_n + \cos \mu_n \cdot \sin \mu_n}{\sin \mu_n}.
\end{aligned}$$

Найдём значения числителя  $\bar{T}(x, p)$  (76) при  $p_1 = 0$

$$\varphi(0) = (T^* - T_0) \operatorname{ch} \left( \sqrt{\frac{p_1}{a}} x \right) = T^* - T_0, \quad (88)$$

при  $p_2 = -\beta$

$$\varphi(-\beta) = (T^* - T_0) \operatorname{ch} \left( \sqrt{\frac{p_2}{a}} x \right) = (T^* - T_0) \cos \left( \sqrt{\frac{\beta}{a}} x \right), \quad (89)$$

и при  $p_n = -\frac{a\mu_n^2}{l^2}$ ,  $n = \overline{3, N}$

$$\varphi(p_n) = (T^* - T_0) \operatorname{ch} \left( \sqrt{-\frac{\mu_n^2}{l^2}} x \right) = (T^* - T_0) \operatorname{ch} \left( i \frac{\mu_n}{l} x \right) = (T^* - T_0) \cos \left( \frac{\mu_n}{l} x \right). \quad (90)$$

На основании (29), (83), (84), (87), (88), (89), (90) получим выражение для оригинала  $T(x, p)$

$$\begin{aligned}
T(x, t) &= \sum_{n=1}^N \frac{\varphi(p_n)}{\psi'(p_n)} \cdot e^{p_n t} = (T^* - T_0) \times \\
&\times \left( 1 - \frac{\cos \left( \sqrt{\frac{\beta}{a}} x \right)}{\left( \cos \left( \sqrt{\frac{\beta}{a}} l \right) - \frac{\lambda}{\alpha} \sqrt{\frac{\beta}{a}} \sin \left( \sqrt{\frac{\beta}{a}} l \right) \right)} e^{-\beta t} - \right. \\
&\left. - \sum_{n=1}^N \frac{2 \sin \mu_n}{\left( 1 - \frac{a\mu_n^2}{\beta l^2} \right) \mu_n + \cos \mu_n \cdot \sin \mu_n} \cos \left( \frac{\mu_n}{l} x \right) \exp \left( \frac{a\mu_n^2}{l^2} t \right) \right) + T_0. \quad (91)
\end{aligned}$$

Программная реализация моделирования температурного поля Задачи 2.  
Рассмотрим поведение температуры (91) во времени  $t = [0, t^0]$ ,

$t^0 = 500000$  с для пространственных координат  $x = [0, l/2, l]$  и в пространстве  $x \in [0, l]$  в отдельные моменты  $t_1 = 0.05 t^0$ ;  $t_2 = 0.15 t^0$ ;  $t_3 = 0.35 t^0$ ;  $t_4 = 0.6 t^0$ ;  $t_5 = t^0$  (листинг 4).

#### Листинг 4. Расчёт температурного распределения

```

% Исходные данные
lam=47; % Коэффициент теплопроводности стали
c=462; % Удельная теплоемкость стали
ro=7.8e3; % Плотность стали
alfa=40; % Коэффициент теплоотдачи стали
a=lam/(c*ro); % Коэффициент температуропроводности
l=1.2; % длина стержня
T_end=500000; % Длительность интервала моделирования
dt=T_end/100; % Временной шаг моделирования
T0=20; % Начальная температура стержня
T_z=120; % Заданная температура стержня
bet=0.0002;
N=100; % количество учитываемых собственных чисел

% Характеристическое уравнение для определения
% собственных чисел
fun=@(x)cos(x)-lam/(alfa*l)*x*sin(x);
% Численное решение характеристического уравнения
j=1;
mu(j)=fzero(fun, 0.1);
eps=2;
for j=2:N
mu(j)=fzero(fun, pi*(j-1));
end
% Моделирование температуры среды
j=1;
for t=0:dt:T_end
T_c(j)=T_z-(T_z-T0)*exp(-bet*t);
j=j+1;
end
t_m=0:dt:T_end; % Массив значений моментов времени
% измерений
X=[0 l/2 l]; % Вектор пространственных координат точек
% контроля
N=length(X); % Количество точек контроля
% Двойной цикл для моделирования изменения температурного
% поля во времени в точках, принадлежащих вектору X
for i=1:N
x=X(i);
j=1;
for t=0:dt:T_end
F=0;
for m=1:N
A(m)=2*sin(mu(m))/(mu(m)+sin(mu(m))*cos(mu(m)));
F=F+A(m)/(1-a*mu(m)^2/(bet*l^2))*...
cos(mu(m)*x/l)*exp(-mu(m)^2*a*t/l^2);
end

```

```

w0=cos((bet/a)^.5*1)-...
lam/alfa*(bet/a)^.5*sin((bet/a)^.5*1);
T(i,j)=(T_z-T0)*(1-cos((bet/a)^.5*x)/...
w0*exp(-bet*t)-F)+T0;
j=j+1;
end
end
figure (1)
plot(t_m, T(1,:),t_m, T(2,:),t_m, T(3,:),t_m,T_c)
grid
% Вектор значений моментов времени измерения
Tt=[.05*T_end .15*T_end .35*T_end .6*T_end T_end];
N1=length(Tt); % Количество моментов времени
x_end=1; % Длина участка изменения пространственной
% координаты
dx=x_end/100; % Шаг моделирования по пространственной
% координате
% Моделирование пространственного изменения
% температурного поля в различные моменты времени
for i=1:N1
t=Tt(i);
j=1;
for x=0:dx:x_end
F=0;
for m=1:N
A(m)=2*sin(mu(m))/(mu(m)+sin(mu(m))*cos(mu(m)));
F=F+A(m)/(1-a*mu(m)^2/(bet*1^2))*...
cos(mu(m)*x/l)*exp(-mu(m)^2*a*t/l^2);
end
w0=cos((bet/a)^.5*1)-...
lam/alfa*(bet/a)^.5*sin((bet/a)^.5*1);
Tx(i,j)=(T_z-T0)*(1-cos((bet/a)^.5*x)/w0*...
exp(-bet*t)-F)+T0;
j=j+1;
end
end

x_m=0:dx:x_end; % Массив значений пространственных
% координат
figure (2)
plot(x_m, Tx(1,:),x_m, Tx(2,:),x_m, Tx(3,:),...
x_m, Tx(4,:),x_m, Tx(5,:))
grid

```

В условиях третьей краевой задачи объект обладает статическими свойствами, т.е. представляет собой объект с самовыравниванием. При управлении по температуре печи со стороны внешней границы температура во всех точках по объему тела возрастает, асимптотически приближаясь к заданной температуре среды  $T^*$  (рис. 7).



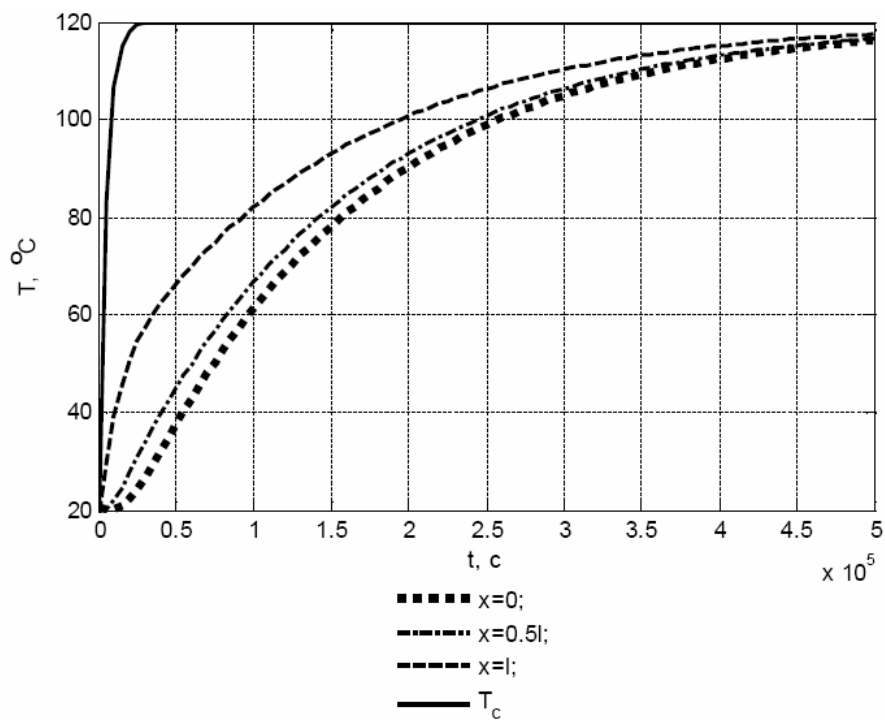


Рис. 7. График зависимости температуры тела от времени в контролируемых точках  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0.5l$ ,  $x_3 = l$  и температуры среды  $T_c$

Пространственное распределение температуры возрастает от центра тела к внешней границе в любой момент времени (рис. 8). Поведение выходных характеристик во времени существенно зависит от величины критерия Био  $Bi = al/\lambda$ , задаваемого теплофизическими и геометрическими характеристиками нагреваемого тела. С ростом Био скорость асимптотического приближения значения температуры к температуре печи возрастает.

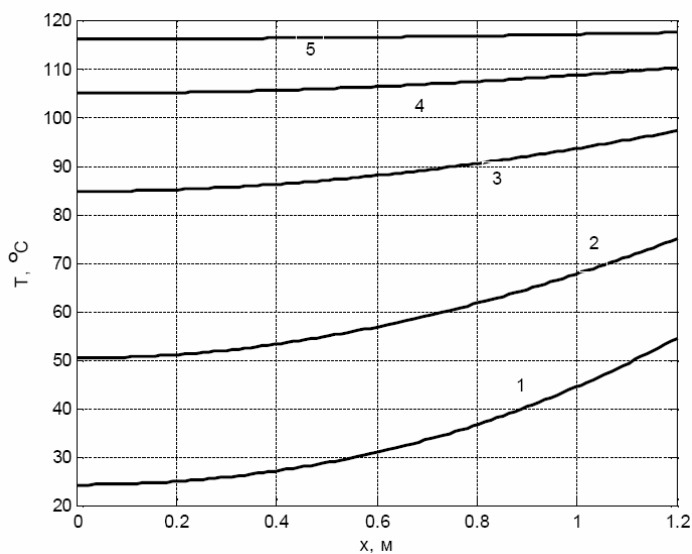


Рис. 8. Пространственное распределение температур (кривые 1-5) в заданные моменты времени  $t_1 - t_5$

## ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1982. – 448 с.
2. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. – М.: Наука, 1987. – 598 с.
3. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. – М.: Наука, 1962. – Т. 1. – 464 с.
4. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. – М.: Наука, 1962. – Т. 2. – 639 с.
5. Берковский Б.М., Ноготов Е.Ф. Разностные методы исследования задач теплообмена. – Минск: Наука и техника, 1976. – 141 с.
6. Вержбицкий В.М. Основы численных методов. – М.: Высшая школа, 2002. – 840 с.
7. Волков Е. А. Численные методы. – М.: Наука, 1987. – 248 с.
8. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1966. – 695 с.
9. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. -М.: Мир, 1975. - 318 с.
10. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 512 с.
11. Копченова Н. В., Марон И. А. Вычислительная математика в примерах и задачах. – М.: Наука, 1972. – 367 с.
12. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырский П. И. Вычислительные методы. – М.: Наука, 1976. – Т. 1. – 302 с.
13. Лебедев А. М. Моделирование в научно-технических исследованиях. - М.: Радио и связь, 1989.
14. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.
15. Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б., Подлазов А.В. Нелинейная динамика: подходы, результаты, надежды. – М.: КомКнига, 2006.
16. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы . – М: Наука, 1981.
17. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М: Наука, 1980.

18. Норри Д., де Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов. – М.: Мир. - 1981. – 304 с.
19. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656 с.
20. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. - М.:Мир, 1979. - 392 с.
21. Теория тепломассопереноса. Никитенко Н.И. – Киев: Наук.думка, 1983. – 352 с.
22. Тоффоли Т., Марголюс Н. Машины клеточных автоматов. – М.: Мир, 1991, – 280 с.
23. Турчак Л. И. Основы численных методов. – М.: Наука, 1987. – 318 с.
24. Шуп Т. Решение инженерных задач на ЭВМ: практическое руководство. – М.: 1982.