

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

**В.Л. КОПОРУЛІН, І.В. ПАСІЧНИК, Л.В. МОССАКОВСЬКА,
І.В. ЩЕРБІНА**

ВИЩА МАТЕМАТИКА
ДОДАТКОВІ РОЗДІЛИ

**Затверджено на засіданні Вченої ради академії
як конспект лекцій**

Дніпропетровськ НМетАУ 2010

УДК 517(07)

Копорулін В.Л., Пасічник І.В., Моссаковська Л.В., Щербіна І.В. Вища математика. Додаткові розділи: Конспект лекцій. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2010. – 83 с.

Містить курс лекцій з дисципліни “Вища математика” (додаткові розділи для спеціалістів і магістрів).

Викладені основи теорії поверхонь другого порядку, скалярного поля, застосування подвійного інтеграла, інтеграла та перетворення Фур’є, рівнянь математичної фізики і варіаційного числення. Теоретичні положення супроводжуються необхідними поясненнями та ілюстраціями, а також розв’язуванням відповідних прикладів.

Призначений для студентів технічних спеціальностей усіх форм навчання.

Табл. 2. Іл. 29. Бібліогр.: 17 найм.

Відповідальний за випуск А.В. Павленко, д-р фіз.-мат. наук, проф.

Друкується за авторською редакцією

Рецензенти: А.В.Сяєв, канд. фіз.-мат. наук, доц. (ДНУ)

В.С.Коноваленков, канд. техн. наук, доц. (НМетАУ)

© Національна металургійна академія
України, 2010

ПЕРЕДМОВА

Характерною рисою останніх десятиріч стала швидка математизація різних галузей науки, техніки, економіки та управління. Створення нових теорій і технологій, вивчення та прогнозування складних процесів і явищ, оптимальне проектування й планування все частіше ґрунтуються на побудові та дослідженні відповідних, часом дуже складних, математичних моделей. Тому сучасний інженер або програміст повинен мати досить високий рівень математичної підготовки, що передбачає не тільки знання основ математики, а й добре володіння тими її засобами і методами, які можуть застосовуватись при розв'язуванні конкретних задач за його спеціальністю. Проте деякі розділи вищої математики або зовсім не ввійшли у відповідний базовий курс для бакалаврів (інтеграл та перетворення Фур'є, рівняння математичної фізики, варіаційне числення), або входять в дуже обмеженому обсязі (поверхні другого порядку, теорія поля, застосування подвійного інтеграла). Але вони є необхідними для сучасної інженерної підготовки і тому включені у додаткову програму з математики для спеціалістів і магістрів. Зокрема це стосується теорії моментів інерції, важливих для сучасної інженерної практики варіаційних задач, а також вкрай суттєвого загального питання коректності математичної моделі, що використовується для опису даного фізичного або технологічного процесу.

Даний конспект містить лекції з вказаних розділів вищої математики, які ми умовно назвали додатковими. Його мета – допомогти майбутнім інженерам вивчити цей достатньо складний матеріал і удосконалити свою математичну підготовку. Для кращого засвоєння теоретичні положення супроводжуються розв'язуванням відповідних прикладів.

Труд з написання даного посібника був розподілений між авторами наступним чином: розділ 1 написала І.В.Щербіна, розділ 2 – Л.В.Моссаковська, передмова, розділи 3 та 5 написані В.Л.Копоруліним, а розділи 4 та 6 – І.В.Пасічник.

Автори виражають щиру подяку Кадаченко А.С. і Татарко К.С. за допомогу у редагуванні рукопису. Зроблені ними зауваження дозволили позбавитись від багатьох помилок і недоліків тексту, що помітно сприяло його поліпшенню.

З М І С Т

Розділ 1

Поверхні другого порядку

1.1. Рівняння поверхні в декартовій прямокутній системі координат. Загальне рівняння поверхні другого порядку.	6
1.2. Канонічні рівняння поверхонь другого порядку.	7
1.3. Дослідження поверхонь другого порядку методом паралельних перерізів.	9
1.4. Циліндричні поверхні.	10
1.5. Конічні поверхні.	11
1.6. Поверхні обертання.	12

Розділ 2

Елементи теорії скалярного поля

2.1. Основні означення.	15
2.2. Поверхні та лінії рівня.	15
2.3. Похідна за напрямом.	16
2.4. Градієнт скалярного поля і його властивості.	19

Розділ 3

Застосування подвійного інтеграла при розв'язуванні деяких задач механіки

3.1. Обчислення координат центра мас плоскої платівки.	23
3.2. Моменти інерції платівки.	27
3.3. Паралельне перенесення осей координат.	31
3.4. Поворот осей координат.	33

Розділ 4

Інтеграл та перетворення Фур'є

4.1. Інтеграл Фур'є.	37
4.2. Інтеграл Фур'є для парних і непарних функцій.	40
4.3. Перетворення Фур'є.	42

4.4. Інтеграл Фур'є в комплексній формі.	45
--	----

Розділ 5

Вступ до теорії рівнянь математичної фізики

5.1. Деякі загальні відомості.	47
5.2. Класифікація диференціальних рівнянь другого порядку з частинними похідними.	48
5.3. Приведення диференціальних рівнянь другого порядку з частинними похідними до канонічного вигляду.	49
5.4. Класичні рівняння математичної фізики.	53
5.5. Початкові і граничні умови. Постановка задачі математичної фізики і її коректність.	54
5.6. Поширення тепла в стрижні.	55
5.6.1. Постановка задач.	55
5.6.2. Розв'язок першої крайової задачі.	58
5.6.3. Поширення тепла в стрижні скінченної довжини. Метод поділу змінних (метод Фур'є).	59
5.6.4. Поширення тепла в необмеженому стрижні.	61
5.6.4.1. Випадок нескінченного стрижня.	61
5.6.4.2. Випадок півнескінченного стрижня.	64

Розділ 6

Елементи варіаційного числення

6.1. Поняття про функціонал.	67
6.2. Класичні задачі варіаційного числення.	68
6.3. Варіація функції. Приріст і варіація функціоналу.	71
6.4. Екстремум функціоналу.	73
6.5. Задача на екстремум функціоналу з закріпленими кінцями. Диференціальне рівняння екстремалей (рівняння Ейлера).	75
6.6. Зниження порядку рівняння Ейлера.	76
6.7. Деякі висновки та зауваження.	80

ЛІТЕРАТУРА.	81
------------------------------	-----------

Розділ 1

ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

1.1 Рівняння поверхні в декартовій прямокутній системі координат.

Загальне рівняння поверхні другого порядку

Поверхні розглядають як *геометричне місце* (множину) точок простору, що мають певну загальну властивість. Оскільки прямокутна система координат $Oxyz$ дозволяє встановити взаємно однозначне співвідношення між точками простору та їх координатами x, y, z , то рівняння поверхні має вигляд

$$F(x, y, z) = 0 \quad (1.1)$$

за умови, що йому задовольняють координати тих і тільки тих точок, що належать поверхні. Координати жодної з точок, що не належать поверхні, рівнянню (1.1) не задовольняють. Рівняння (1.1) називається *рівнянням* даної *поверхні* у прямокутній системі координат $Oxyz$. Змінні x, y і z називаються *поточними координатами* точок поверхні. У частинному випадку, коли ліва частина рівняння (1.1) має вигляд $F(x, y, z) = f(x, y) - z$, воно може бути записано як

$$z = f(x, y), \quad (1.2)$$

тобто поверхня співпадає з графіком функції двох змінних $f(x, y)$.

Слід зауважити, що не кожне рівняння вигляду (1.1) визначає поверхню. В окремих випадках рівняння (1.1) може визначати не поверхню, а точку або лінію, і навіть зовсім не визначати ніякий геометричний образ. Наприклад, рівнянню $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ задовольняє тільки точка $O(0,0,0)$, тобто початок координат. Рівнянню $0 \cdot x^2 + y^2 + z^2 = 0$ задовольняють лише координати точок, що належать осі Ox , тому що це рівняння еквівалентно рівнянням $y = 0$ і $z = 0$. Рівнянню $x^2 + 4y^2 + z^2 + 4 = 0$ не задовольняють координати жодної точки простору.

Поверхні за їх рівняннями поділяються на *алгебраїчні* і *неалгебраїчні* (*трансцендентні*). Якщо ліва частина рівняння (1.1) є многочлен степеня n відносно x, y, z , то відповідна поверхня називається *алгебраїчною поверхнею n -го порядку*. Площина, наприклад, є алгебраїчною поверхнею першого порядку.

Тут ми будемо розглядати *алгебраїчні поверхні другого порядку*, тобто геометричні місця тих і тільки тих точок простору, координати яких у обраній прямокутній системі задовольняють загальному *невиродженому* алгебраїчному рівнянню другого степеня відносно змінних x, y, z

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + Gx + Hy + Iz + K = 0 \quad (1.3)$$

$$(A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2 + F^2 > 0).$$

Рівняння (1.3) називається *загальним рівнянням* алгебраїчної поверхні другого порядку (у подальшому просто *поверхні другого порядку*).

1.2. Канонічні рівняння поверхонь другого порядку

Рівняння (1.3) може визначати так звану *вироджену поверхню* (порожню множину, точку, площину або пару площин). Наприклад, якщо його ліва частина розпадається у добуток двох лінійних множників, тобто

$$(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) \cdot (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$

то це рівняння визначає *пару площин*

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{й} \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Якщо ж поверхня є *невиродженою*, то її рівняння можна привести до одного з найпростіших або *канонічних* виглядів. Наведемо їх разом із назвами і виглядами поверхонь, які вони визначають.

1. *Еліпсоїд* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (рис. 1.1).

2. Гіперболоїди

однопорожнинний $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (рис. 1.2),

двопорожнинний $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ (рис. 1.3).

3. *Конус другого порядку* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ (рис. 1.4).

4. Параболоїди

еліптичний $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$ (рис. 1.5),

гіперболічний $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$ (рис. 1.6).

5. Циліндри другого порядку

еліптичний $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (рис. 1.7),

гіперболічний $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (рис. 1.9),

параболічний $x^2 = 2pz, p > 0$ (рис. 1.8).

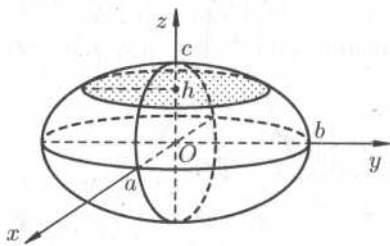


Рис. 1.1

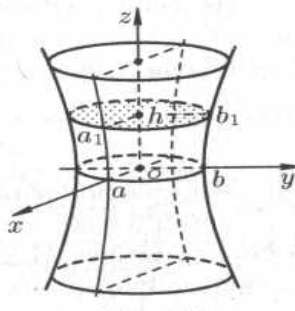


Рис. 1.2

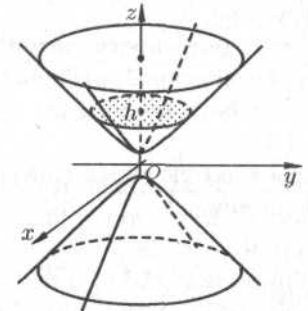


Рис. 1.3

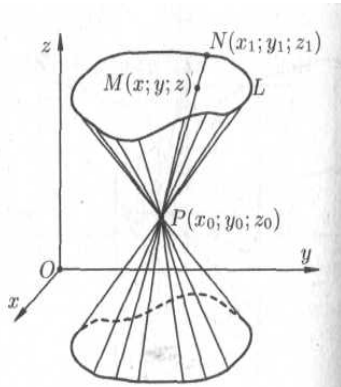


Рис. 1.4

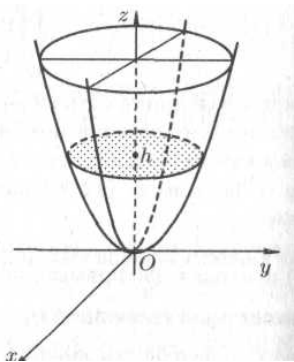


Рис. 1.5

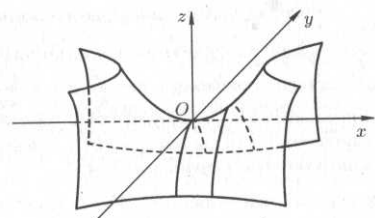


Рис. 1.6

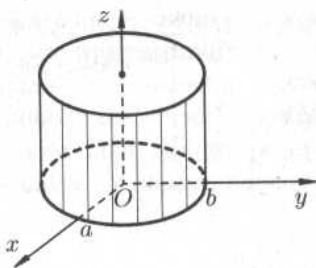


Рис. 1.7

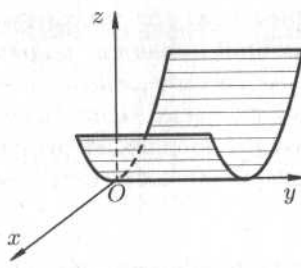


Рис. 1.8

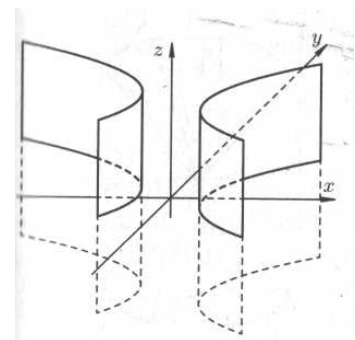


Рис. 1.9

1.3. Дослідження поверхонь другого порядку методом паралельних перерізів

Загальні методи приведення рівняння (1.3) до канонічного вигляду спираються на теорію квадратичних форм і тут не розглядаються. Одним з методів вивчення основних геометричних властивостей не вироджених поверхонь другого порядку, тобто встановлення форми і розташування поверхні за її рівнянням, є *метод паралельних перерізів*. Проілюструємо застосування цього метода на наступному прикладі.

Приклад 1.1. Дослідити поверхню, що задана рівнянням

$$9x^2 + 4y^2 - 72z = 0.$$

Розв'язання. Перепишемо надане рівняння у вигляді

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 2z \quad (1.4)$$

і розріжемо поверхню площинами $z = h$. В перерізі отримаємо лінію, рівняння якої є

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 2h \\ z = h \end{cases}.$$

а) Якщо $h < 0$, то площини $z = h$ поверхню не перетинають.

б) Якщо $h = 0$, то площина $z = 0$ дотикається даної поверхні у точці $(0, 0, 0)$.

в) Якщо $h > 0$, то в перерізі маємо еліпс, рівняння якого можна переписати у вигляді:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{8h} + \frac{y^2}{18h} = 1 \\ z = h \end{cases}.$$

Його напіввісі зростають з ростом h .

При перерізі поверхні (1.4) координатними площинами xOz і yOz

отримаємо відповідно параболи $z = \frac{x^2}{8}$ і $z = \frac{y^2}{18}$.

Таким чином, поверхня, що визначається рівнянням (1.4), є *еліптичним параболоїдом* і має вигляд опуклої нескінченної чаші, що розширюється (рис. 1.5).

За типом *перетворень простору* (паралельне перенесення, гомотетія і поворот навколо фіксованої осі) розрізняють *три класи* поверхонь: *циліндричні, конічні і поверхні обертання*. Розглянемо їх окремо.

1.4. Циліндричні поверхні

Циліндричною називається поверхня, що утворена переміщенням прямої (*твірної*) вздовж деякої заданої лінії (*напрямної*) паралельно заданому напрямку.

Будемо розглядати циліндричні поверхні, напрямні яких знаходяться в одній з координатних площин, а твірні паралельні координатній осі, що перпендикулярна цієї площині.

Нехай у площині Oxy міститься деяка лінія K , рівняння якої має вигляд:

$$F(x, y) = 0 \quad (1.5)$$

Побудуємо циліндр з твірними, паралельними осі Oz , і напрямною K .

Теорема. Рівняння циліндра з твірними, паралельними осі Oz , має вигляд (1.5), тобто не містить координати z .

Доведення. Візьмемо на циліндрі будь-яку точку $M(x, y, z)$. Вона знаходиться на деякій твірній. Нехай N є точкою перетину цієї твірної з площиною Oxy . Отже, точка N знаходиться на лінії K і її координати задовольняють рівняння (1.5). Але точка M має ті ж самі абсцису і ординату, що і точка N . Таким чином, рівнянню (1.5) задовольняють і координати точки $M(x, y, z)$, тому що воно не містить z , і оскільки M – це будь-яка точка циліндра, то рівнянням циліндра буде рівняння (1.5).

Аналогічно, рівняння $F(x, z) = 0$ є рівнянням циліндра з твірними, паралельними осі Oy , а $F(y, z) = 0$ є рівнянням циліндра з твірними, паралельними осі Ox . Назва циліндра визначається назвою напрямної. Якщо напрямною є *еліпс*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1.6)$$

у площині Oxy , то відповідна йому циліндрична поверхня називається *еліптичним циліндром* (рис. 1.7). Його рівняння співпадає з рівнянням еліпса (1.6).

Частинним випадком еліптичного циліндра є *круговий циліндр*, який визначається рівнянням

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (1.7)$$

Рівняння

$$y^2 = 2px \quad (1.8)$$

визначає *параболічний циліндр* (рис 1.8), а рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1.9)$$

визначає *гіперболічний циліндр* (рис 1.9).

1.5. Конічні поверхні

Поверхня, яка утворена прямими лініями, що проходять через задану точку P і перетинають задану плоску лінію L (яка не проходить через P), називається *конічною поверхнею* або *конусом*. Лінія L називається *напрямною конуса*, точка P – її *вершиною*, а пряма, яка описує поверхню – *твірною*.

Нехай напрямна L задана рівняннями

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

а точка $P(x_0, y_0, z_0)$ є вершиною конуса (рис. 1.4).

Візьмемо на поверхні конуса будь-яку точку $M(x, y, z)$ (рис. 1.4). Твірна, яка проходить через точки P і M перетинає напрямну L у деякій точці $N(x_1, y_1, z_1)$. Координати точки N задовольняють рівнянням (1.10) напрямної, тобто

$$\begin{cases} F_1(x_1, y_1, z_1) = 0 \\ F_2(x_1, y_1, z_1) = 0 \end{cases} \quad (1.11)$$

Канонічні рівняння твірних, що проходять через точки P і N мають вигляд

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}. \quad (1.12)$$

Рівняння конічної поверхні отримаємо після виключення x_1, y_1 і z_1 з рівнянь (1.11) і (1.12). Наприклад, якщо вершина конуса розташована в точці $P(0,0,0)$, а напрямною є еліпс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, який лежить в площині $z = c$, то

рівняння (1.11) і (1.12) відповідно мають вигляд $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ і

$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z}{z_1}$. Виключаючи з них x_1, y_1 і z_1 з урахуванням того, що $z = c$,

отримаємо рівняння конуса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$.

Поверхні, що утворені рухом прямої, отримали назву *лінійчатих*, а прямі, що їх складають, називаються *прямолінійними твірними*. Серед поверхонь другого порядку лінійчатими є *циліндричні* і *конічні* поверхні, а також *однопорожнинний гіперболоїд* і *гіперболічний параболоїд*.

1.6. Поверхні обертання

Поверхня, яка утворена обертанням деякої плоскої кривої навколо фіксованої осі, що розташована в одній площині з кривою, називається *поверхнею обертання*. Нехай в площині yOz задано криву L

$$F(y, z) = 0, \quad (1.13)$$

яка обертається навколо осі Oz (рис. 1.10).

Візьмемо на поверхні довільну точку $M(x, y, z)$. Проведемо через точку M площину, перпендикулярну осі Oz , і позначимо точки перетину її з віссю Oz і кривою L відповідно через $O_1(0, 0, z)$ і $N(0, y_1, z_1)$. Відрізки O_1M і O_1N є

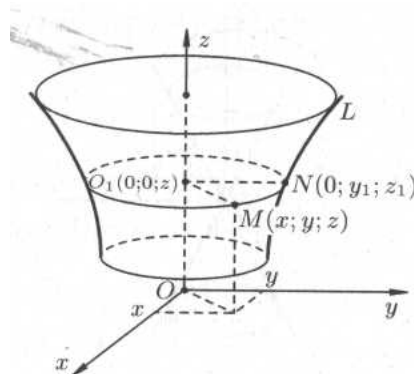


Рис. 1.10

радіусами одного й того ж самого кола. Тому $O_1M = O_1N$. Але $O_1M = \sqrt{x^2 + y^2}$, $O_1N = |y_1|$. Отже $|y_1| = \sqrt{x^2 + y^2}$, або $y_1 = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$. Крім того $z_1 = z$. Оскільки точка N належить кривій L , то її координати задовольняють рівняння (1.13). Виключаючи з нього координати y_1 і z_1 точки N , дістаємо рівняння

$$F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0, \quad (1.14)$$

яке і є шуканим рівнянням поверхні обертання. Зрозуміло, що рівняння (1.14) можна отримати простою заміною y на $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$, координата z при цьому не змінюється.

Аналогічно, якщо крива обертається навколо осі Oy , то рівняння поверхні обертання набуває вигляду:

$$F(y, \pm\sqrt{x^2 + z^2}) = 0, \quad (1.15)$$

а якщо крива $F(x, y) = 0$ розташована в площині xOy , то рівняння поверхні, утвореної обертанням кривої навколо осі Ox , є

$$F(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}) = 0. \quad (1.16)$$

Ці й інші можливі випадки наведені у таблиці 1.1.

Таблиця 1.1

<i>Рівняння кривої</i>	<i>Вісь обертання</i>	<i>Рівняння поверхні обертання</i>
$F(x, y) = 0$	Ox	$F(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}) = 0$
	Oy	$F(\pm\sqrt{x^2 + z^2}, y) = 0$
$F(x, z) = 0$	Ox	$F(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}) = 0$
	Oz	$F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$
$F(y, z) = 0$	Oy	$F(y, \pm\sqrt{x^2 + z^2}) = 0$
	Oz	$F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$

Так, наприклад, обертаючи пряму $y = z$ навколо осі Oz , отримаємо поверхню обертання $\pm\sqrt{x^2 + y^2} = z$, або

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0. \quad (1.17)$$

Ця поверхня називається *круговим конусом другого порядку* (рис.1.11).

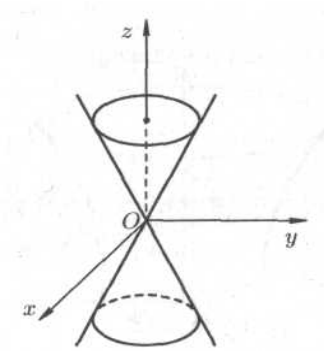


Рис. 1.11

Приклад 1.2. Нехай еліпс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ обертається навколо однієї з осей x або y . Треба знайти рівняння утвореної внаслідок цього поверхні, яка називається *еліпсоїдом обертання*.

Розв'язання. Оскільки еліпс розташований в координатній площині xOy , то в заданому рівнянні необхідно здійснити відповідну заміну за таблицею 1.1.

Якщо еліпс обертається навколо осі Ox , то рівняння відповідного еліпсоїда обертання є

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1 \quad \text{або} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

При обертанні еліпса навколо осі Oy рівняння відповідного еліпсоїда обертання є

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2 + z^2}{a^2} = 1 \quad \text{або} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1.$$

Якщо $a = b$ (тобто замість еліпса маємо коло), то еліпсоїд перетворюється у *сферичну поверхню* або *сферу* радіуса a з центром у початку координат, рівняння якої є

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Розділ 2

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

Теорія поля – значний розділ фізики, механіки, електротехніки, у якому вивчаються поля різних типів: скалярні, векторні, тензорні. Тут ми розглянемо поля лише одного з цих типів, а саме скалярні поля.

2.1. Основні означення

Поле називається область V простору, у кожній точці якої визначено значення деякої величини. Якщо кожній точці M цієї області поставлено у відповідність певне число $U = U(M)$, то говорять, що в області визначено (задано) *скалярне поле* (або *функція точки*). Інакше кажучи, скалярне поле – це скалярна функція $U(M)$ разом з її областю визначення.

Прикладами скалярних полей є поля температури (повітря, рідини, тіла), поле густини даного неоднорідного середовища, поле вологості повітря, поле атмосферного тиску, поле електричного потенціалу тощо.

Якщо функція $U(M)$ не залежить від часу, то скалярне поле називають *стаціонарним*, а скалярне поле, яке змінюється з часом, - *нестаціонарним*. Надалі розглядатимемо лише стаціонарні поля.

Якщо у просторі ввести прямокутну систему координат Oxy , то точка M в цій системі матиме певні координати (x, y, z) , і скалярне поле U стане функцією цих координат:

$$U = U(M) = U(x, y, z).$$

Якщо скалярна функція $U(M)$ залежить тільки від двох змінних, наприклад, x і y , то відповідне скалярне поле $U(x, y)$ називають *плоским*; якщо ж функція $U(M)$ залежить від трьох змінних x , y і z , то скалярне поле $U(x, y, z)$ називають *просторовим*.

2.2. Поверхні та лінії рівня

Геометрично плоскі скалярні поля зображають за допомогою ліній рівня, а просторові – за допомогою поверхонь рівня.

Розглянемо скалярне поле, що задано функцією $U = U(x, y, z)$.

Поверхнею рівня скалярного поля називають геометричне місце точок, у яких функція $U(M)$ приймає сталі значення, тобто

$$U(x, y, z) = c. \quad (2.1)$$

Надаючи у рівнянні (2.1) величині c різні значення, отримуємо різні поверхні рівня, які у сукупності розбивають поле на окремі шари. Через кожен точку поля проходить тільки одна поверхня рівня. Її рівняння можна знайти підстановкою координат точки в рівняння (2.1).

Для скалярного поля, що утворено функцією $U = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$, поверхнями рівня є множина концентричних сфер з центрами у початку координат: $\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2} = c$. Зокрема, при $c = 1$ отримаємо $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, тобто сфера стягується в точку $(0, 0, 0)$.

Для рівномірно розпаленої ниті поверхні рівня температурного поля (ізотермічні поверхні) зображують собою кругові циліндри, спільною віссю яких є нить.

У випадку плоского поля $U = U(x, y)$ рівняння $U(x, y) = c$ є рівнянням **лінії рівня** поля, тобто лінія рівня – це лінія на площині Oxy , у точках якої функція $U(x, y)$ зберігає сталі значення.

У метеорології, наприклад, сітки ізобар та ізотерм (лінії однакових середніх тисків і однакових середніх температур) є лініями рівня та зображують собою функції координат точок місцевості.

Лінії рівня застосовуються в математиці при дослідженні поверхонь методом перерізу.

2.3. Похідна за напрямом

Для характеристики швидкості зміни поля в заданому напрямі введемо поняття похідної за напрямом.

Нехай задано скалярне поле $U(x, y, z)$. Візьмемо в ньому точку $M(x, y, z)$ і проведемо з цієї точки вектор $\vec{\lambda}$, напрямними косинусами якого є $\cos \alpha$, $\cos \beta$ та $\cos \gamma$ (рис. 2.1).

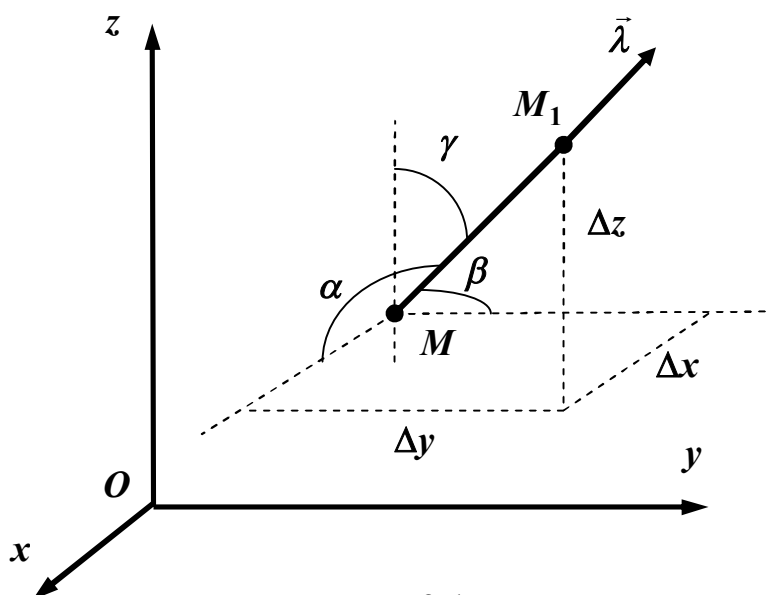


Рис. 2.1

На векторі $\vec{\lambda}$ на відстані $\Delta\lambda$ від його початку візьмемо точку $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$.

Тоді
$$\Delta\lambda = MM_1 = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}.$$

Обчислимо тепер приріст $\Delta_\lambda U$ функції $U(x, y, z)$ при переході від точки M до точки M_1 в напрямі вектора $\vec{\lambda}$:

$$\Delta_\lambda U = U(M_1) - U(M).$$

Якщо існує границя відношення $\frac{\Delta_\lambda U}{\Delta\lambda}$ при $\Delta\lambda \rightarrow 0$, то цю границю називають *похідною функції $U(x, y, z)$ в точці $M(x, y, z)$ за напрямом вектора $\vec{\lambda}$* і позначають $\frac{\partial U}{\partial \lambda}$, тобто

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{\Delta_\lambda U}{\Delta\lambda} = \lim_{M_1 \rightarrow M} \frac{U(M_1) - U(M)}{|MM_1|}.$$

Похідна за напрямом $\vec{\lambda}$ характеризує швидкість зміни функції (поля) у точці M у цьому напрямі. Якщо $\frac{\partial U}{\partial \lambda} > 0$, то функція U в напрямі $\vec{\lambda}$ зростає, якщо $\frac{\partial U}{\partial \lambda} < 0$, то функція U в напрямі $\vec{\lambda}$ спадає. Фізичний зміст похідної за напрямом полягає в тому, що величина $\left| \frac{\partial U}{\partial \lambda} \right|$ є миттєвою швидкістю зміни

функції U в напрямі $\vec{\lambda}$ у точці M : чим більше $\left| \frac{\partial U}{\partial \lambda} \right|$, тим швидше змінюється функція U .

Виведемо формулу для обчислення похідної за напрямом. Припустимо, що функція $U(x, y, z)$ диференційовна в точці M . Тоді її повний приріст в цій точці можна записати у вигляді:

$$\Delta_{\lambda} U = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \Delta y + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \Delta z + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z,$$

де $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ - нескінченно малі функції при $\Delta \lambda \rightarrow 0$.

Оскільки $\Delta x = \Delta \lambda \cos \alpha$, $\Delta y = \Delta \lambda \cos \beta$, $\Delta z = \Delta \lambda \cos \gamma$, то

$$\frac{\Delta_{\lambda} U}{\Delta \lambda} = \frac{\partial U}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial U}{\partial z} \cos \gamma + \varepsilon_1 \cos \alpha + \varepsilon_2 \cos \beta + \varepsilon_3 \cos \gamma.$$

Переходячи до границі при $\Delta \lambda \rightarrow 0$, дістанемо формулу для обчислення похідної за напрямом

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \frac{\partial U}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial U}{\partial z} \cos \gamma. \quad (2.2)$$

У випадку плоского поля $U = U(x, y)$ маємо $\cos \beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$,

$\cos \gamma = 0$, і тоді формула (2.2) приймає вигляд:

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \frac{\partial U}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \sin \alpha.$$

Зауваження. З формули (2.2) випливає, що частинні похідні є окремими випадками похідної за напрямом. Дійсно, якщо $\vec{\lambda}$ збігається з одним з ортів \vec{i}, \vec{j} або \vec{k} , то похідна за напрямом $\vec{\lambda}$ збігається з відповідною частинною похідною. Наприклад, якщо $\vec{\lambda} = \vec{i}$, то $\alpha = 0$, $\beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$, тому

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \frac{\partial U}{\partial x} \cos 0 + \frac{\partial U}{\partial y} \cos \frac{\pi}{2} + \frac{\partial U}{\partial z} \cos \frac{\pi}{2} = \frac{\partial U}{\partial x}.$$

Приклад 2.1. Знайти похідну функції $U = x^3 - 3xyz + y^2$ в точці $A(1, 2, -1)$ за напрямом від точки A до точки $B(2, 4, -3)$. З'ясувати характер зміни поля в даному напрямі.

Розв'язання. Знаходимо координати вектора $\vec{\lambda} = \vec{AB}$ і його довжину :

$$\vec{\lambda} = \vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) = (1, 2, -2),$$

$$|\vec{\lambda}| = \sqrt{x_\lambda^2 + y_\lambda^2 + z_\lambda^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3.$$

Для обчислення напрямних косинусів скористаємось формулами

$$\cos \alpha = \frac{x_\lambda}{|\vec{\lambda}|}, \quad \cos \beta = \frac{y_\lambda}{|\vec{\lambda}|}, \quad \cos \gamma = \frac{z_\lambda}{|\vec{\lambda}|}.$$

$$\text{Тоді отримаємо } \cos \alpha = \frac{1}{3}, \quad \cos \beta = \frac{2}{3}, \quad \cos \gamma = -\frac{2}{3}.$$

Знайдемо частинні похідні функції та обчислимо їх значення в точці A :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2 - 3yz, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -3xz + 2y, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = -3xy,$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_A = 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 2 \cdot (-1) = 9, \quad \left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_A = -3 \cdot 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 = 7,$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial z} \right|_A = -3 \cdot 1 \cdot 2 = -6.$$

Скориставшись формулою (2.2), отримаємо:

$$\left. \frac{\partial U}{\partial \lambda} \right|_A = 9 \cdot \frac{1}{3} + 7 \cdot \frac{2}{3} + (-6) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{35}{3}.$$

Оскільки $\left. \frac{\partial U}{\partial \lambda} \right|_A > 0$, то задана функція в даному напрямі зростає.

2.4. Градієнт скалярного поля і його властивості

Нехай задані поле $U(x, y, z)$ і точка $M(x, y, z)$. У якому напрямі $\vec{\lambda}$ похідна $\frac{\partial U}{\partial \lambda}$ буде мати найбільше значення? Відповідь на це запитання має важливе практичне значення і дається на основі поняття *градієнта поля*.

Неважко помітити, що права частина рівняння (2.2) є скалярним добутком одиничного вектора $\vec{e} = \{ \cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma \}$ та певного вектора

$$\vec{g} = \left\{ \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right\}.$$

Вектор, координатами якого є значення частинних похідних функції $U(x, y, z)$ в точці $M(x, y, z)$, називають *градієнтом функції* в цій точці і

позначають $\mathit{grad} U$. Отже, $\mathit{grad} U = \left\{ \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right\}$, або

$$\mathit{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}. \quad (2.3)$$

Зв'язок між градієнтом і похідною в наданій точці за довільним напрямом дається наступною теоремою.

Теорема. Похідна функції $U(x, y, z)$ в точці $M(x, y, z)$ за напрямом вектора $\vec{\lambda}$ дорівнює проекції градієнта функції в цій точці на вектор $\vec{\lambda}$, тобто

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \mathit{np}_{\vec{\lambda}} \mathit{grad} U. \quad (2.4)$$

Доведення. Нехай φ є кут між градієнтом (2.3) і одиничним вектором $\vec{e} = \vec{\lambda}^\circ$, де $\vec{\lambda}^\circ = \{ \cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma \}$ (рис. 2.2).

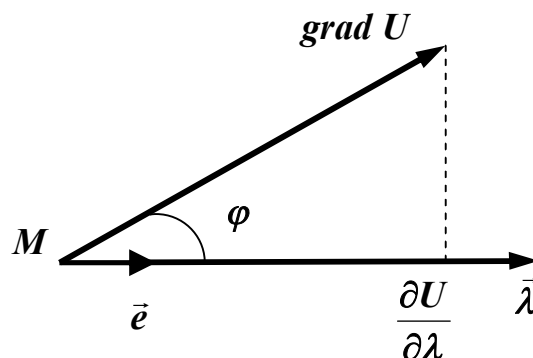


Рис. 2.2

Тоді з властивостей скалярного добутку дістанемо

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \lambda} &= \frac{\partial U}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial U}{\partial z} \cos \gamma = (\mathit{grad} U) \vec{\lambda}^\circ = |\mathit{grad} U| \cdot |\vec{\lambda}^\circ| \cos \varphi = \\ &= |\mathit{grad} U| \cdot \cos \varphi = \mathit{np}_{\vec{\lambda}} \mathit{grad} U. \end{aligned}$$

Теорема доведена.

Відзначимо деякі *властивості градієнта*.

1. Похідна в даній точці за напрямом вектора $\vec{\lambda}$ має найбільше значення, якщо напрям вектора $\vec{\lambda}$ збігається із напрямом градієнта, причому

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \lambda}\right)_{\max} = |\mathbf{grad}U| = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}. \quad (2.5)$$

Справді, з формули (2.4) випливає, що похідна за напрямом досягає максимального значення (2.5), якщо $\varphi = 0$ (тобто $\cos \varphi = 1$). А саме це і означає, що напрям вектора $\vec{\lambda}$ збігається із напрямом градієнта.

Таким чином, швидкість зростання скалярного поля в довільній точці є максимальною у напрямі градієнта. Зрозуміло, що у напрямі, протилежному до напрямку градієнта, поле найшвидше зменшуватиметься.

2. Похідна за напрямом вектора, перпендикулярного до градієнта, дорівнює нулю. Інакше кажучи, швидкість зміни поля у напрямі, перпендикулярному до градієнта, дорівнює нулю, тобто скалярне поле залишається сталим.

Справді, за формулою (2.4) $\frac{\partial U}{\partial \lambda} = 0$, якщо $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

3. Вектор-градієнт у кожній точці поля $U(x, y, z)$ перпендикулярний до поверхні рівня, яка проходить через цю точку. Це твердження випливає з того, що напрямний вектор нормалі до поверхні рівня $U = U(M_0)$, яка проходить

через точку M_0 , має координати $\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{M_0}, \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{M_0}, \left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_{M_0}$.

4. Справедливими є рівності:

$$\begin{aligned} \mathbf{grad}(U + V) &= \mathbf{grad}U + \mathbf{grad}V; \\ \mathbf{grad}(CU) &= C\mathbf{grad}U, \quad C = \text{const}; \\ \mathbf{grad}(UV) &= U\mathbf{grad}V + V\mathbf{grad}U; \\ \mathbf{grad}\left(\frac{U}{V}\right) &= \frac{V\mathbf{grad}U - U\mathbf{grad}V}{V^2}; \\ \mathbf{grad} f(U) &= \frac{\partial f}{\partial U} \mathbf{grad}U. \end{aligned}$$

Розглянемо деякі приклади.

Приклад 2.2. Знайти значення і напрям градієнта функції $U = x^3 + y^2 - z^3 - 2xyz$ в точці $M_0(0, 1, 2)$.

Розв'язання. Обчислимо значення частинних похідних в точці M_0 :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2 - 2yz, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 2y - 2xz, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = -3z^2 - 2xy,$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{M_0} = 0 - 2 \cdot 1 \cdot 2 = -4, \quad \left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{M_0} = 2 \cdot 1 - 0 = 2, \quad \left. \frac{\partial U}{\partial z} \right|_{M_0} = -3 \cdot 2^2 - 0 = -12.$$

За формулою (2.3) маємо $\mathbf{grad}U|_{M_0} = -4\vec{i} + 2\vec{j} - 12\vec{k}$.

$$\text{Отже, } |\mathbf{grad}U|_{M_0} = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + (-12)^2} = \sqrt{164}, \quad \cos \alpha = -\frac{4}{\sqrt{164}},$$

$$\cos \beta = \frac{2}{\sqrt{164}}, \quad \cos \gamma = -\frac{12}{\sqrt{164}}.$$

Приклад 2.3. Знайти найбільшу швидкість зростання поля $U = x^y - z^2 + 1$ в точці $M_0(1, 2, 3)$.

Розв'язання. Маємо

$$\frac{\partial U}{\partial x} = y x^{y-1}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = x^y \ln x, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = -2z,$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{M_0} = 2 \cdot 1^{2-1} = 2, \quad \left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{M_0} = 1^2 \ln 1 = 0, \quad \left. \frac{\partial U}{\partial z} \right|_{M_0} = -2 \cdot 3 = -6.$$

За формулою (2.3) маємо

$$\mathbf{grad}U|_{M_0} = 2\vec{i} - 6\vec{k}.$$

Найбільшу швидкість зростання поля знаходимо за формулою (2.5)

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \lambda} \right)_{\max} = |\mathbf{grad}U| = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2} = \sqrt{2^2 + (-6)^2} = \sqrt{40}.$$

Розділ 3

ЗАСТОСУВАННЯ ПОДВІЙНОГО ІНТЕГРАЛА ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ДЕЯКИХ ЗАДАЧ МЕХАНІКИ

3.1. Обчислення координат центра мас плоскої платівки

Розглянемо задачу про обчислення координат центра мас та моментів інерції плоскої платівки.

Статичним моментом M матеріальної точки відносно будь-якої осі називається добуток маси цієї точки на її відстань її від цієї осі. При цьому для точок, що лежать по одну сторону від осі, відстань береться зі знаком «плюс», а по іншу – зі знаком «мінус».

Для точки $M(x, y)$ з масою m (рис. 3.1) статичні моменти M_x та M_y відносно осей Ox і Oy відповідно є

$$M_x = y \cdot m, \quad M_y = x \cdot m. \quad (3.1)$$

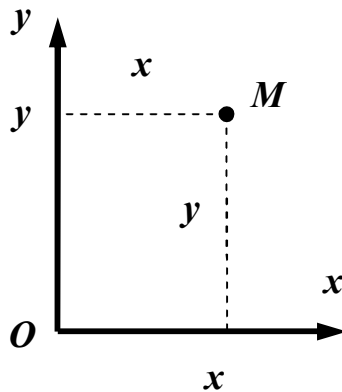


Рис. 3.1

Статичним моментом системи матеріальних точок $M_i(x_i, y_i)$ з масами m_i називають суму статичних моментів усіх точок. Отже,

$$M_x = \sum_{i=1}^n y_i m_i, \quad M_y = \sum_{i=1}^n x_i m_i. \quad (3.2)$$

Центром мас системи матеріальних точок називають таку точку, що, якщо зосередити в ній усю масу системи $m = \sum_{i=1}^n m_i$, то статичний момент цієї точки

відносно будь-якої осі буде дорівнювати відповідному статичному моменту усієї системи. Якщо центр мас розташований у точці $C(x_c, y_c)$, то

$$M_x = y_c \cdot m, \quad M_y = x_c \cdot m,$$

звідки знаходимо координати центра мас

$$x_c = \frac{M_y}{m}, \quad y_c = \frac{M_x}{m}. \quad (3.3)$$

Розглянемо тонку плоску платівку. Для означеності припустимо, що платівка розташована у площині xOy і займає область D . Товщина платівки вважається настільки малою, що можна знехтувати зміною густини матеріалу по товщині платівки.

За *густину* платівки будемо вважати *поверхневу густину* неперервного розподілу маси $\gamma(M)$ у точці $M(x, y)$ як границю відношення маси Δm елементарної площадки, що містить точку M , до площі цієї площадки ΔS , якщо площадка стягується у точку M (рис. 3.2), тобто

$$\gamma(M) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta S}.$$

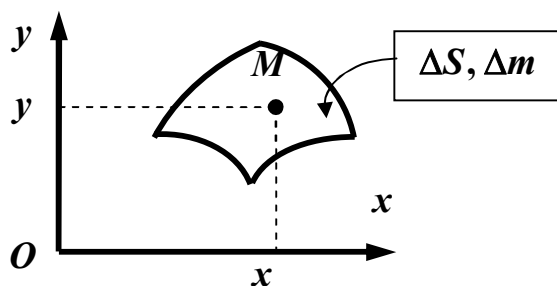


Рис. 3.2

Інакше кажучи, *поверхнева густина є маса одиниці площі*.

Зауваження. Якщо платівка однорідна, то $\gamma = \text{const}$. Якщо її густина не вказана, то будемо вважати $\gamma = 1$. У загальному ж випадку густина є функцією двох змінних $\gamma = \gamma(x, y)$.

Розіб'ємо область D довільним чином на n часткових областей D_i з площами ΔS_i . У кожній з таких областей довільно оберемо точки $M_i(\xi_i, \eta_i)$ та домовимось вважати ці області однорідними з густинами $\gamma(\xi_i, \eta_i)$ (рис. 3.3).

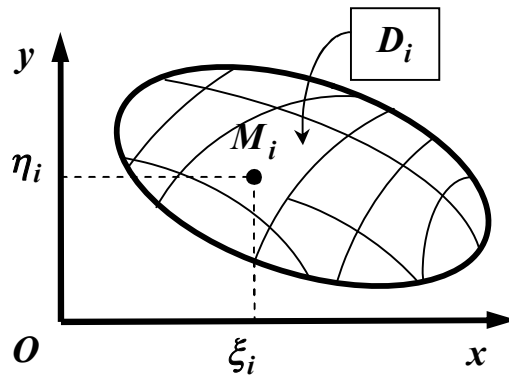


Рис. 3.3

Тоді маса платівки наближено обчислюється за формулою

$$m = \sum_{i=1}^n m_i = \sum_{i=1}^n \gamma(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i .$$

Якщо перейти до границі за умови, що кожна з часткових областей стягується у точку, то отримаємо точний вираз для маси платівки

$$m = \iint_D \gamma(x, y) dS . \quad (3.4)$$

Зауваження. Якщо розбити область D прямими, паралельними координатним осям, то отримаємо прямокутні часткові області зі сторонами Δx та Δy (рис. 3.4).

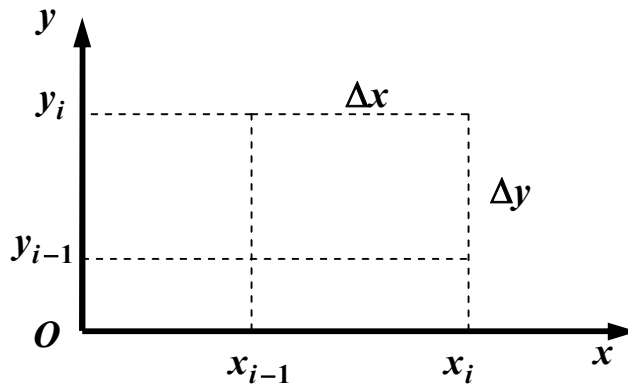


Рис. 3.4

Тоді $\Delta S = \Delta x \cdot \Delta y$ і елемент площі $dS = dx dy$. Це ми будемо враховувати у майбутньому.

Сконцентруємо у точках M_i масу відповідних часткових областей $m_i = \gamma(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i$ та перейдемо до границі у формулах (3.2). Отримаємо формули для обчислення статичних моментів неоднорідної платівки

$$M_x = \iint_D y \gamma(x, y) dx dy,$$

$$M_y = \iint_D x \gamma(x, y) dx dy. \quad (3.5)$$

Координати центра мас платівки обчислюють за формулами (3.3).

Приклад 3.1. Знайти координати центра мас однорідної платівки, що займає

область D , обмежену лініями: $y = \frac{x^2}{2}$, $x + y = 4$.

Розв'язання. Пряма та парабола перетинаються у точках:

$$\begin{cases} y = \frac{x^2}{2}, \\ x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow x + \frac{x^2}{2} = 4, \quad x^2 + 2x - 8 = 0, \quad x_1 = -4, \quad x_2 = 2, \quad y_1 = 8, \quad y_2 = 2.$$

Отже, маємо дві точки: $A(-4, 8)$ та $B(2, 2)$ (рис. 3.5).

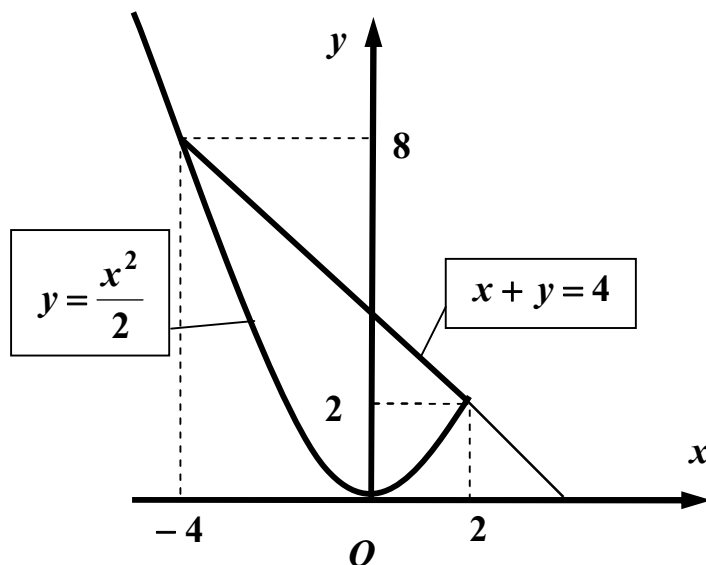


Рис. 3.5

Однорідна платівка займає замкнену область D , що задана нерівностями:

$$\begin{cases} -4 \leq x \leq 2, \\ \frac{x^2}{2} \leq y \leq 4 - x \end{cases}$$

Оскільки платівка однорідна, то $\gamma = 1$ і

$$m = \iint_D dx dy = \int_{-4}^2 dx \int_{\frac{x^2}{2}}^{4-x} dy = \int_{-4}^2 y \Big|_{\frac{x^2}{2}}^{4-x} dx = \int_{-4}^2 \left(4 - x - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left(4x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \Big|_{-4}^2 =$$

$$= \left[8 - 2 - \frac{4}{3} - \left(-16 - 8 + \frac{32}{3} \right) \right] = 30 - 12 = 18,$$

тобто маса платівки чисельно дорівнює її площі.

Статичні моменти

$$M_x = \iint_D y dx dy = \int_{-4}^2 dx \int_{\frac{x^2}{2}}^{4-x} y dy = \int_{-4}^2 \frac{y^2}{2} \Big|_{\frac{x^2}{2}}^{4-x} dx = \frac{1}{2} \int_{-4}^2 \left((4-x)^2 - \frac{x^4}{4} \right) dx =$$

$$= \left(-\frac{(4-x)^3}{6} - \frac{x^5}{40} \right) \Big|_{-4}^2 = 84 - 26,4 = 57,6,$$

$$M_y = \iint_D x dx dy = \int_{-4}^2 x dx \int_{\frac{x^2}{2}}^{4-x} dy = \int_{-4}^2 x \cdot y \Big|_{\frac{x^2}{2}}^{4-x} dx = \int_{-4}^2 x \left(4 - x - \frac{x^2}{2} \right) dx =$$

$$= \int_{-4}^2 \left(4x - x^2 - \frac{x^3}{2} \right) dx = \left(2x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{8} \right) \Big|_{-4}^2 = 6 - 24 = -18.$$

Отже, $x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{-18}{18} = -1$, $y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{57,6}{18} = 3,2$.

3.2. Моменти інерції платівки

Осьовим моментом інерції I матеріальної точки називають добуток маси m цієї точки на квадрат її відстані R від осі, що розглядається: $I = mR^2$. Поняття моменту інерції вперше було впроваджене голандським математиком, фізиком і астрономом Х. Гюйгенсом (1629-1695 рр.). Для точки $M(x, y)$ отримаємо $I_x = y^2 m$, $I_y = x^2 m$.

Формули для обчислення моментів інерції I_x та I_y платівки відносно координатних осей Ox і Oy

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_D y^2 \gamma(x, y) dx dy, \\ I_y &= \iint_D x^2 \gamma(x, y) dx dy \end{aligned} \quad (3.6)$$

отримані у той же спосіб, що і формули для статичних моментів

У механіці часто розглядають також момент інерції I_p матеріальної точки відносно даної точки (*полюса*). Цей момент інерції називають *полярним* та визначають як добуток маси точки на квадрат її відстані від полюса.

Якщо полюсом є початок координат (рис. 3.6), то полярний момент інерції матеріальної точки $M(x, y)$ масою m дорівнює

$$I_p = I_0 = R^2 m = (x^2 + y^2) m,$$

звідки $I_0 = x^2 m + y^2 m$, тобто $I_0 = I_x + I_y$.

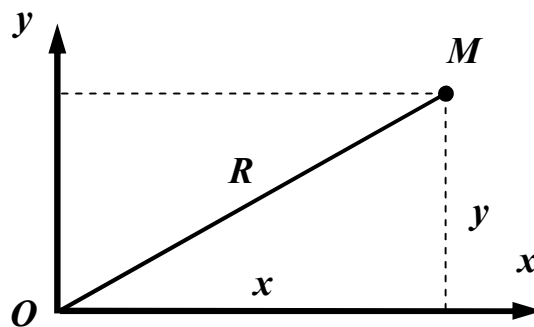


Рис. 3.6

Розглядають також *відцентровий момент* або *добуток інерції* I_c матеріальної точки відносно двох осей, що визначають добуток маси точки на її відстані до цих осей. Якщо осями є координатні осі, то тоді $I_c = I_{xy} = x \cdot y \cdot m$.

Формула для обчислення полярного моменту інерції платівки відносно початку координат має вигляд

$$I_0 = I_x + I_y = \iint_D (x^2 + y^2) \gamma(x, y) dx dy, \quad (3.7)$$

а для відцентрового моменту відносно координатних осей

$$I_{xy} = \iint_D x y \gamma(x, y) dx dy. \quad (3.8)$$

Зауваження

1. Якщо платівка належить до іншої координатної площини, тоді усі наведені формули змінюються відповідним чином.

2. Якщо платівка однорідна ($\gamma = 1$), то в цьому випадку моменти називають *геометричними*, а маса платівки чисельно дорівнює її площі.

3. Якщо вісь проходить через центр мас платівки, то вона називається *центральною*. При цьому відповідний статичний момент дорівнює нулю. Зокрема, якщо центральною є вісь Ox , то $M_x = 0$, а якщо центральною є вісь Oy , то $M_y = 0$.

4. Якщо відцентровий момент $I_{xy} = 0$, то відповідні вісі називаються *головними вісями інерції*. Вісь симетрії завжди є головною віссю інерції, тому будь-яка перпендикулярна до неї вісь також буде головною. Головні вісі, що проходять через центр мас, називаються *головними центральними вісями інерції*.

5. Значення статичних моментів M_x, M_y та відцентрового моменту інерції I_{xy} можуть бути будь-якими (від'ємними або невід'ємними). Значення ж осьових моментів інерції I_x, I_y та полярного моменту інерції I_p завжди додатні!

6. Якщо відомі маса m платівки і координати її центра мас x_c і y_c , то можна знайти статичні моменти платівки $M_x = m \cdot y_c$, $M_y = m \cdot x_c$. Моменти інерції платівки I_x, I_y, I_0, I_{xy} у такий спосіб знаходити *не можна*, тому що $I_x \neq m y_c^2$, $I_y \neq m x_c^2$, $I_{xy} \neq m x_c y_c$!

7. У випадку симетрії платівки відносно деякої осі потрібно розглядати лише одну з симетричних частин платівки і *подвоїти* відповідні інтеграли. Відзначимо, що якщо платівка симетрична відносно обох осей, то $I_x = I_y$.

Якщо платівка являє собою *криволінійний сектор*, такий що обмежений променями $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$ ($\varphi_1 < \varphi_2$) й кривою $\rho = \rho(\varphi)$, то $\gamma = \gamma(\rho, \varphi)$. Після переходу до полярних координат за формулами $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $dx dy = \rho d\rho d\varphi$ маємо:

$$\begin{aligned}
m &= \iint_D \gamma \rho \, d\rho \, d\varphi, & M_x &= \iint_D \gamma \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\varphi, & M_y &= \iint_D \gamma \rho^2 \cos \varphi \, d\rho \, d\varphi, \\
I_x &= \iint_D \gamma \rho^3 \sin^2 \varphi \, d\rho \, d\varphi, & I_y &= \iint_D \gamma \rho^3 \cos^2 \varphi \, d\rho \, d\varphi, & & (3.9) \\
I_0 &= \iint_D \gamma \rho^3 \, d\rho \, d\varphi, & I_{xy} &= \iint_D \gamma \rho^3 \sin \varphi \cos \varphi \, d\rho \, d\varphi = \frac{1}{2} \iint_D \gamma \rho^3 \sin 2\varphi \, d\rho \, d\varphi.
\end{aligned}$$

Якщо платівка однорідна, то $\gamma = 1$. Тоді, як і раніше,

$x_c = \frac{M_y}{m}$, $y_c = \frac{M_x}{m}$. Якщо платівка симетрична відносно деякої осі, то центр мас платівки $C(x_c, y_c)$ лежить на цій осі.

Приклад 3.2. Дана однорідна платівка, що займає область D , обмежену лініями: $x^2 + y^2 = R^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Знайти координати центра мас платівки, її моменти інерції відносно координатних осей, полярний та відцентровий моменти інерції.

Розв'язання. Оскільки платівка симетрична відносно прямої $y = x$ (рис. 3.7), то її центр мас лежить на цій прямій, тобто $x_c = y_c$, звідки випливає, що $M_x = M_y$. Очевидно також, що $I_x = I_y$.

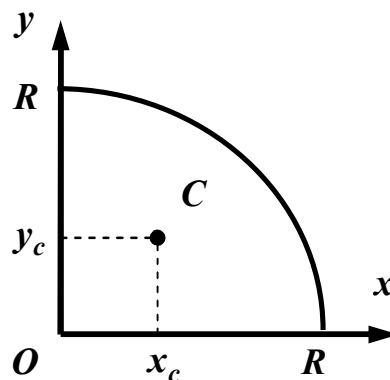


Рис. 3.7

Платівка однорідна, тому $\gamma = 1$ і маса платівки чисельно дорівнює її площі,

тобто $m = \frac{\pi R^2}{4}$.

Зважаючи на форму і розташування платівки, усі обчислення будемо здійснювати у полярній системі координат.

Статичні моменти платівки

$$M_x = M_y = \iint_D y \, dx \, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R \rho^2 \sin \varphi \, d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \, d\varphi \cdot \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^R = -\cos \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{R^3}{3} =$$

$$= -\left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 \right) \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{R^3}{3}.$$

$$\text{Тоді } x_c = y_c = \frac{R^3}{3 \cdot \frac{\pi R^2}{4}} = \frac{4R}{3\pi} \approx 0,42R.$$

Осьові моменти інерції платівки

$$I_x = I_y = \iint_D x^2 \, dx \, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R \rho^3 \sin^2 \varphi \, d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \right) d\varphi \cdot \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^R =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{16}.$$

$$\text{Полярний момент інерції платівки } I_0 = I_x + I_y = \frac{\pi R^4}{8}.$$

Відцентровий момент інерції платівки

$$I_{xy} = \iint_D x y \, dx \, dy = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R \rho^3 \sin 2\varphi \, d\rho = -\frac{1}{4} \cos 2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^R =$$

$$= -\frac{1}{4} (\cos \pi - \cos 0) \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{R^4}{8}.$$

3.3. Паралельне перенесення осей координат

Важливе практичне значення має відповідь на питання: як саме будуть змінюватись моменти інерції при зміні системи координат?

Нехай центр мас O платівки відомий. Розглянемо осі $O'x'$ і $O'y'$, що паралельні *центральному* осям Ox і Oy (рис. 3.8), і позначимо через a і b *координати* початку O' нової системи, а через m - масу платівки. Тоді $x' = x - a$, $y' = y - b$. Зв'язок між моментами інерції відносно осей кожної з систем дає наступна теорема.

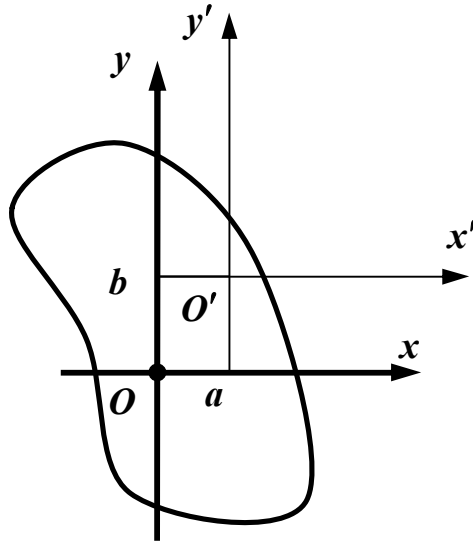


Рис. 3.8

Теорема Гюйгенса - Штейнера. Момент інерції платівки відносно довільної осі дорівнює сумі моменту інерції відносно паралельної їй центральної осі і добутку маси платівки на квадрат відстані між осями, тобто, наприклад,

$$I_{x'} = I_x + m b^2. \quad (3.10)$$

Справді,

$$\begin{aligned} I_{x'} &= \iint_D y'^2 \gamma dS = \iint_D (y - b)^2 \gamma dS = \iint_D y^2 \gamma dS - 2b \cdot \iint_D y \gamma dS + b^2 \cdot \iint_D \gamma dS = \\ &= I_x - 2b \cdot M_x + b^2 \cdot m. \end{aligned}$$

Оскільки вісь Ox є центральною, то $M_x = \iint_D y \gamma dS = 0$, що і доводить формулу (3.10).

Аналогічно можна показати, що $I_{y'} = I_y + m a^2$.

Зауваження. У формулі (3.10) немає різниці між координатою і відповідною відстанню, оскільки вони підносяться до квадрата.

Відцентровий момент інерції відносно нових осей має вигляд

$$I_{x'y'} = \iint_D x'y' \gamma dS = \iint_D (x - a) \cdot (y - b) \gamma dS = I_{xy} - bM_y - aM_x + ab \cdot m,$$

та оскільки $M_x = M_y = 0$, остаточно маємо

$$I_{x'y'} = I_{xy} + ab \cdot m. \quad (3.11)$$

Зауваження. Координати a і b у формулі (3.11) треба брати з їхніми знаками.

Приклад 3.3. Знайти моменти інерції платівки, заданої у прикладі 3.2, відносно осей системи $x'O'y'$ (рис. 3.9), якщо O' – центр мас платівки.

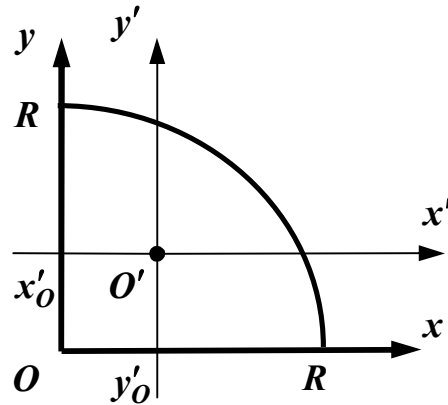


Рис. 3.9

Розв'язання. За теоремою Гюйгенса-Штейнера маємо $I_x = I_{x'} + m \cdot (y'_O)^2$, а саме, з урахуванням попередніх обчислень (див. приклад 3.2),

$$\frac{\pi R^4}{16} = I_{x'} + \frac{\pi R^2}{4} \cdot \left(-\frac{4R}{3\pi}\right)^2. \text{ Отже, } I_{x'} = \frac{\pi R^4}{16} - \frac{4R^4}{9\pi} \approx 0,055R^4. \text{ Для порівняння}$$

$$I_x = \frac{\pi R^4}{16} \approx 0,196R^4.$$

За формулою (3.11) маємо $I_{xy} = I_{x'y'} + x'_O y'_O \cdot m$, де, згідно з попередніми

обчисленнями (див. приклад 3.2), $I_{xy} = \frac{R^4}{8}$, $x'_O = y'_O = -\frac{4R}{3\pi}$. Отже,

$$\frac{R^4}{8} = I_{x'y'} + \left(-\frac{4R}{3\pi}\right)^2 \cdot \frac{\pi R^2}{4}, \text{ звідки } I_{x'y'} = \frac{R^4}{8} - \frac{4R^4}{9\pi} \approx -0,016R^4.$$

3.4. Поворот осей координат

Розглянемо тепер довільні осі Ox і Oy і повернемо їх навколо початку координат на кут θ проти годинникової стрілки (рис. 3.10). Знайдемо моменти інерції відносно нових осей Ox' і Oy' .

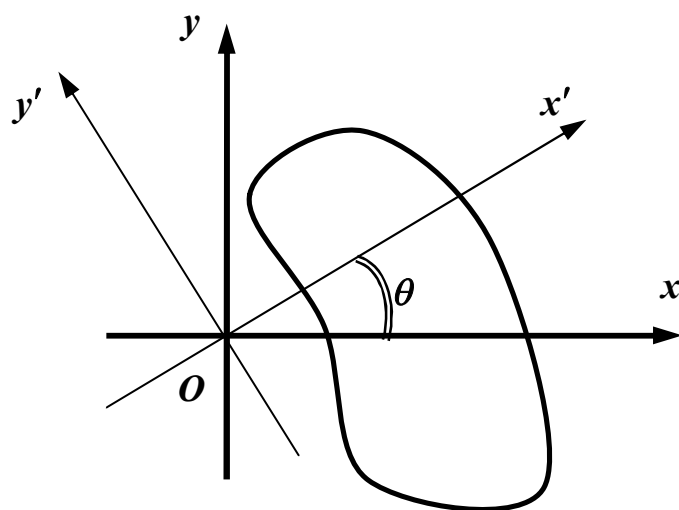


Рис. 3.10

Як відомо, нові координати x', y' будуть зв'язані зі старими координатами x, y співвідношеннями

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta, \quad y' = y \cos \theta - x \sin \theta. \quad (3.12)$$

Підставивши (3.12) у загальну формулу $I_{x'} = \iint_D y'^2 \gamma dS$, отримаємо

$$I_{x'} = \cos^2 \theta \cdot \iint_D y^2 \gamma dS - 2 \sin \theta \cos \theta \cdot \iint_D xy \gamma dS + \sin^2 \theta \cdot \iint_D x^2 \gamma dS$$

або, як неважко бачити,

$$I_{x'} = I_x \cos^2 \theta + I_y \sin^2 \theta - I_{xy} \sin 2\theta. \quad (3.13)$$

Аналогічно отримаємо

$$I_{y'} = I_x \sin^2 \theta + I_y \cos^2 \theta + I_{xy} \sin 2\theta, \quad (3.14)$$

$$I_{x'y'} = I_{xy} \cos 2\theta - \frac{1}{2}(I_y - I_x) \sin 2\theta. \quad (3.15)$$

Зауваження

1. Формули (3.13) – (3.15) залишаються справедливими також і для центральних осей.
2. З формул (3.13) – (3.14) випливає, що $I_{x'} + I_{y'} = I_x + I_y = I_p$.
3. Якщо $\theta = \frac{\pi}{2}$, то $I_{x'} = I_x$, $I_{y'} = I_y$, $I_{x'y'} = -I_{xy}$.

Приклад 3.4. Обчислити моменти інерції платівки, заданої у прикладі 3.2, відносно:

- а) осей системи $\xi O \eta$ (рис. 3.11), де вісь $O\xi$ є віссю симетрії платівки;
 б) осей системи uOv , які утворюють з осями системи xOy кут $\pi/6$.

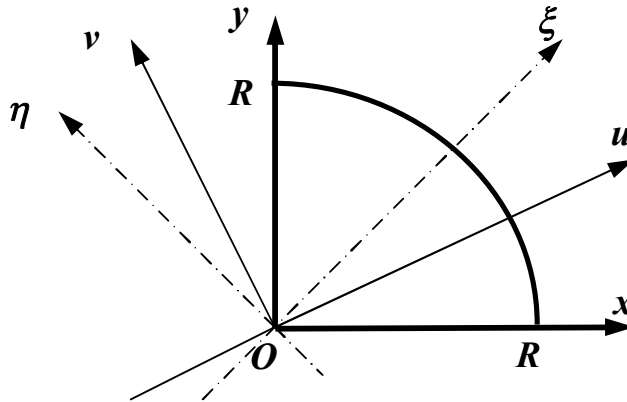


Рис. 3.11

Розв'язання. Оскільки вісь $O\xi$ є віссю симетрії, то вона є головною віссю інерції, як і перпендикулярна до неї вісь $O\eta$. Тому $I_{\xi\eta} = 0$. Поклавши $\theta = \pi/4$ у формулах (3.13) та (3.14), з урахуванням раніше знайдених значень I_x, I_y та

$$I_{xy}, \text{ отримаємо } I_{\xi} = \frac{\pi R^4}{16} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{R^4}{8} = \frac{R^4}{8} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \approx 0,071R^4,$$

$$I_{\eta} = \frac{\pi R^4}{16} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{R^4}{8} = \frac{R^4}{8} \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right) \approx 0,321R^4.$$

Зауваження. Те, що $I_{\xi\eta} = 0$, також безпосередньо впливає з формули (3.15).

Поклавши у формулах (3.13) – (3.15) $\theta = \pi/6$, аналогічно отримаємо

$$I_u = \frac{\pi R^4}{16} \cdot \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \right) - \frac{R^4}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{R^4}{16} (\pi - \sqrt{3}) \approx 0,088R^4,$$

$$I_v = \frac{\pi R^4}{16} \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \right) + \frac{R^4}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{R^4}{16} (\pi + \sqrt{3}) \approx 0,305R^4,$$

$$I_{uv} = \frac{R^4}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{R^4}{16} = 0,0625R^4.$$

Безпосереднє обчислення моментів інерції за формулами (3.9) призводить до тих самих результатів:

$$I_u = \iint_D \rho^3 \sin^2 \varphi \, d\rho \, d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 \varphi \, d\varphi \int_0^R \rho^3 \, d\rho = \frac{1}{2} (\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi) \Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cdot \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^R =$$

$$= \frac{R^4}{16}(\pi - \sqrt{3}), \quad I_v = \iint_D \rho^3 \cos^2 \varphi \, d\rho \, d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 \varphi \, d\varphi \int_0^R \rho^3 \, d\rho =$$

$$= \frac{1}{2}(\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi) \left|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cdot \frac{\rho^4}{4} \right|_0^R = \frac{R^4}{16}(\pi + \sqrt{3}),$$

$$I_{uv} = \frac{1}{2} \iint_D \rho^3 \sin 2\varphi \, d\rho \, d\varphi = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cos 2\varphi \left|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cdot \frac{\rho^4}{4} \right|_0^R = \frac{R^4}{16}.$$

Розділ 4

ІНТЕГРАЛ ТА ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є

Відомо, що всяку кусково-монотонну функцію, визначену на довільному скінченному проміжку, можна розкласти в ряд Фур'є, тобто зобразити нескінченною сумою простих гармонік. Виявляється, що можна дістати потрібний до нього розклад на гармоніки для неперіодичних функцій, заданих на нескінченному проміжку $(-\infty, +\infty)$, за допомогою інтеграла Фур'є.

4.1. Інтеграл Фур'є

Нехай неперіодична кусково-монотонна функція $y = f(x)$ задана на нескінченному проміжку $(-\infty, +\infty)$ і є *абсолютно інтегровною* на ньому, тобто

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = Q < \infty. \quad (4.1)$$

Тоді на довільному скінченному проміжку $(-l, l)$ її можна розвинути в ряд Фур'є

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right), \quad (4.2)$$

де коефіцієнти визначаються за формулами

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) dt, \\ a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{n\pi}{l} t dt, \\ b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \frac{n\pi}{l} t dt. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Підставляючи в ряд (4.2) значення коефіцієнтів (4.3), дістанемо

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-l}^l f(t) [\cos \alpha_n t \cos \alpha_n x + \sin \alpha_n t \sin \alpha_n x] dt =$$

$$= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-l}^l f(t) \cos \alpha_n(t-x) dt, \quad (4.4)$$

де $\alpha_n = \frac{n\pi}{l}$ - *хвильові числа* функції $f(x)$. Послідовність $\left\{n \frac{\pi}{l}\right\}$ називають *спектром*, який носить дискретний характер. Відстань між двома сусідніми числами спектра позначимо $\Delta \alpha_n = \alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{\pi}{l} = \text{const}$. Тоді формула (4.4) набере вигляду

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_{-l}^l f(t) \cos \alpha_n(t-x) dt \right] \Delta \alpha_n. \quad (4.5)$$

Перейдемо у цій формулі до границі при $l \rightarrow +\infty$. Оскільки $f(x)$ не залежить від l , то

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} f(x) = f(x).$$

З умови (4.1) випливає, що

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt \leq \lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{1}{2l} \int_{-l}^l |f(t)| dt < \lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{Q}{2l} = 0,$$

тобто перший доданок у правій частині формули (4.5) прямує до нуля при $l \rightarrow +\infty$.

Вираз у квадратних дужках формули (4.5) при довільному фіксованому x є функцією від α_n . Нехай

$$\int_{-l}^l f(t) \cos \alpha_n(t-x) dt = F(\alpha_n). \quad (4.6)$$

Тоді

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{l \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F(\alpha_n) \Delta \alpha_n.$$

Знайдена сума нагадує інтегральну суму для функції $F(\alpha)$, де $\alpha \in (0, +\infty)$. Величина $\Delta \alpha_n = \frac{\pi}{l}$ стає дуже малою при досить великих значеннях l , при цьому спектр хвильових чисел стає дуже щільним. Якщо $l \rightarrow +\infty$, то $\Delta \alpha_n \rightarrow 0$, тобто хвильові числа α_n набувають всіх можливих

значень від 0 до $+\infty$, дискретний спектр стає неперервним, а інтегральна сума прямує до невластного інтеграла I роду

$$\lim_{\substack{l \rightarrow +\infty \\ (\Delta\alpha_n \rightarrow 0)}} \sum_{n=1}^{\infty} F(\alpha_n) \Delta\alpha_n = \int_0^{+\infty} F(\alpha) d\alpha. \quad (4.7)$$

Отже,

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} F(\alpha) d\alpha,$$

де

$$F(\alpha) = \lim_{l \rightarrow +\infty} \int_{-l}^l f(t) \cos \alpha_n (t-x) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \alpha (t-x) dt.$$

Таким чином, ми отримали формулу

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \alpha (t-x) dt \right] d\alpha. \quad (4.8)$$

Знайдений інтеграл називається *інтегралом Фур'є* для функції $f(x)$ (Фур'є дістав його у 1811 р.). Формула (4.8) справедлива для всіх точок x , в яких функція $f(x)$ неперервна. У точках розриву I роду ($x = x_0$) інтеграл Фур'є (як і ряд Фур'є (4.2)) дорівнює середньому арифметичному односторонніх границь $f(x)$. Отже, коли функція $f(x)$ визначена і абсолютно інтегровна на всій числовій осі і кусково-монотонна на довільному скінченному проміжку, то для неї існує інтеграл Фур'є:

$$I_{\Phi} = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \alpha (t-x) dt \right] d\alpha = \begin{cases} f(x) & \text{(в точках неперервності);} \\ \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2} & \text{(в точках розриву).} \end{cases}$$

Запишемо інтеграл Фур'є (4.8) в іншому вигляді:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(\alpha t - \alpha x) dt \right] d\alpha = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \alpha t dt \right] \cos \alpha x d\alpha + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \alpha t dt \right] \sin \alpha x d\alpha. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Позначимо внутрішні інтеграли як $A(\alpha)$ та $B(\alpha)$, де

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \alpha t dt, \quad B(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \alpha t dt, \quad (4.10)$$

тоді

$$f(x) = \int_0^{+\infty} [A(\alpha) \cos \alpha x + B(\alpha) \sin \alpha x] d\alpha. \quad (4.11)$$

В цій формулі маємо розклад неперіодичної функції $f(x)$ на нескінченному проміжку $(-\infty, +\infty)$ на гармоніки з частотами α , що неперервно змінюються від 0 до $+\infty$. Інтеграл Фур'є у формулі (4.11) є подібним до ряду Фур'є (4.2), знак суми ряду замінений на знак інтеграла, коефіцієнти a_n та b_n замінено функціями $A(\alpha)$ та $B(\alpha)$.

4.2. Інтеграл Фур'є для парних і непарних функцій

Припустимо, що функція $f(x)$ парна, тоді функція $f(t) \cos \alpha t$ також парна, а функція $f(t) \sin \alpha t$ непарна. Тому формула (4.9) набере вигляду

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} f(t) \cos \alpha t dt \right] \cos \alpha x d\alpha. \quad (4.12)$$

Аналогічно, якщо $f(x)$ непарна функція, то формула (4.9) матиме вигляд

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} f(t) \sin \alpha t dt \right] \sin \alpha x d\alpha. \quad (4.13)$$

За аналогією з (4.10), запишемо інтеграли (4.12) і (4.13) у вигляді:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} A_1(\alpha) \cos \alpha x d\alpha, \quad (4.14)$$

$$f(x) = \int_0^{+\infty} B_1(\alpha) \sin \alpha x d\alpha, \quad (4.15)$$

де у виразах $A_1(\alpha)$ та $B_1(\alpha)$ порівняно з $A(\alpha)$ та $B(\alpha)$ проміжки інтегрування скорочуються вдвічі (тобто нижньою границею буде не $-\infty$, а 0), а інтеграли подвоюються.

Формули (4.12) і (4.13) називаються відповідно *косинус-формулою Фур'є* і *синус-формулою Фур'є*.

Коли функція $f(x)$ задана лише на проміжку $(0, +\infty)$, то її можна продовжити на проміжок $(-\infty, +\infty)$ різними способами, зокрема парним або непарним. Це означає, що таку функцію можна зобразити різними інтегралами Фур'є, зокрема інтегралами (4.12) або (4.13).

Зауважимо, що інтеграли Фур'є у вигляді (4.14) і (4.15) аналогічні відповідним рядам Фур'є для парних і непарних функцій.

Приклад 4.1. Зобразити інтегралом Фур'є функцію $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & 0 < x < +\infty, \\ -e^x, & -\infty < x < 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

Розв'язання. Ця функція задана на всій осі і кусково-монотонна на довільному скінченному відрізку $[-l, l]$, оскільки складається з двох неперервних частин і має один розрив першого роду при $x = 0$ (рис. 4.1).

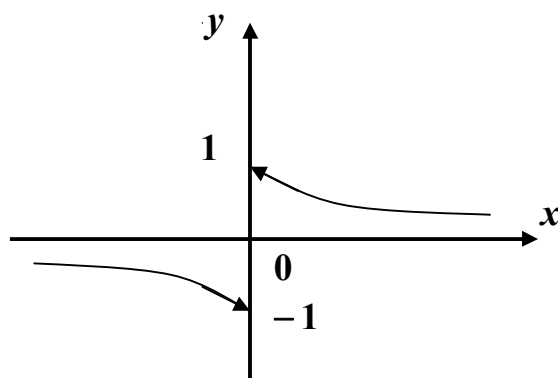


Рис. 4.1

Функція $f(x)$ абсолютно інтегровна, оскільки

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx &= \int_{-\infty}^0 e^x dx + \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^x dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-x} dx = \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} e^x \Big|_a^0 - \lim_{b \rightarrow +\infty} e^{-x} \Big|_0^b = 2 < \infty. \end{aligned}$$

Отже, задану функцію, враховуючи її непарність, можна зобразити інтегралом Фур'є за формулою (4.13):

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} e^{-t} \sin \alpha t dt \right] \sin \alpha x d\alpha .$$

Після інтегрування частинами знаходимо

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} \sin \alpha t dt = \alpha - \alpha^2 \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin \alpha t dt ,$$

звідки

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} \sin \alpha t dt = \frac{\alpha}{1 + \alpha^2} .$$

Таким чином,

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\alpha \sin \alpha x}{1 + \alpha^2} d\alpha, \quad x \in (-\infty, +\infty) .$$

4.3. Перетворення Фур'є

Нехай функція $f(x)$ парна (або задана на проміжку $(0, +\infty)$ і продовжена на всю числову вісь парним способом). Введемо у формулі (4.12) позначення

$$F_c(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \cos \alpha t dt . \quad (4.16)$$

Тоді

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} F_c(\alpha) \cos \alpha x d\alpha . \quad (4.17)$$

Функція $F_c(\alpha)$ називається *прямим косинус-перетворенням Фур'є*, а функція $f(x)$, зображена формулою (4.17), називається *оберненим косинус-перетворенням Фур'є* функції $F_c(\alpha)$. Аналогічно для непарної функції (або при непарному продовженні) з формули (4.13) дістанемо

$$F_s(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \sin \alpha t dt \quad (4.18)$$

- *пряме синус-перетворення Фур'є*, а

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} F_s(\alpha) \sin \alpha x d\alpha \quad (4.19)$$

- обернене синус-перетворення Фур'є.

Приклад 4.2. Зобразити у вигляді інтеграла Фур'є функцію

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & x > 1 \end{cases},$$

продовживши її парним і непарним способами.

Розв'язання. У разі парного продовження графік функції має вигляд

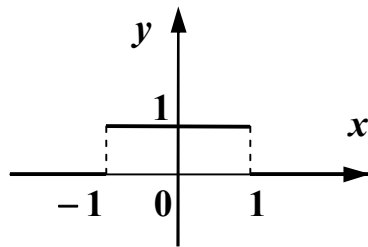


Рис. 4.2

і за формулами (4.16), (4.17)

$$F_c(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 \cos \alpha t dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \alpha t}{\alpha} \Big|_0^1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \alpha}{\alpha}, \quad f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x \sin \alpha}{\alpha} d\alpha.$$

У точках розриву $x = \pm 1$ маємо

$$I_{\Phi} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2},$$

звідки одержуємо розривний множник Діріхле у вигляді інтеграла Фур'є

$$I_{\Phi} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x \sin \alpha}{\alpha} d\alpha = \begin{cases} 1, & -1 < x < 1, \\ \frac{1}{2}, & x = \pm 1, \\ 0, & x < -1, \quad x > 1. \end{cases}$$

У разі непарного продовження графік функції має вигляд

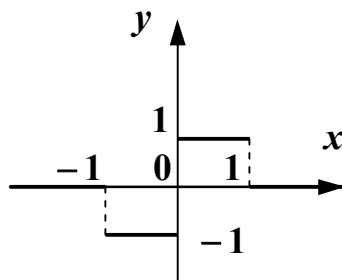


Рис. 4.3

і за формулами (4.18), (4.19)

$$F_s(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 \sin \alpha t dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos \alpha t}{\alpha} \Big|_0^1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - \cos \alpha}{\alpha},$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x (1 - \cos \alpha)}{\alpha} d\alpha.$$

У точках розриву маємо

$$I_{\Phi} = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & x = -1, \\ 0, & x = 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 1. \end{cases}$$

Приклад 4.3. Знайти косинус-перетворення Фур'є функції

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 7, & 0 \leq x \leq \frac{7}{2}, \\ 0, & x > \frac{7}{2}. \end{cases}$$

Розв'язання. За формулою (4.16) знайдемо пряме косинус-перетворення Фур'є заданої функції

$$\begin{aligned} F_c(\alpha) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\frac{7}{2}} (2t - 7) \cos \alpha t dt = \left| \begin{array}{l} u = 2t - 7 \quad dv = \cos \alpha t dt \\ du = 2 dt \quad v = \frac{1}{\alpha} \sin \alpha t \end{array} \right| = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[(2t - 7) \frac{1}{\alpha} \sin \alpha t \Big|_0^{\frac{7}{2}} - \frac{2}{\alpha} \int_0^{\frac{7}{2}} \sin \alpha t dt \right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2}{\alpha^2} \cos \alpha t \Big|_0^{\frac{7}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2(\cos \frac{7}{2} \alpha - 1)}{\alpha^2}. \end{aligned}$$

Отже, обернене косинус-перетворення Фур'є (4.17) у даному разі має вигляд

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \frac{7}{2} \alpha - 1}{\alpha^2} \cos \alpha x d\alpha = -\frac{8}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 \frac{7}{4} \alpha}{\alpha^2} \cos \alpha x d\alpha.$$

4.4. Інтеграл Фур'є в комплексній формі

Нехай функція $f(x)$ зображується інтегралом Фур'є за формулою (4.11).

Скориставшись формулами Ейлера

$$\cos \alpha x = \frac{1}{2}(e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x}), \quad \sin \alpha x = \frac{1}{2i}(e^{i\alpha x} - e^{-i\alpha x}),$$

дістанемо

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{+\infty} \left[A(\alpha) \frac{e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x}}{2} + B(\alpha) \frac{e^{i\alpha x} - e^{-i\alpha x}}{2i} \right] d\alpha = \\ &= \int_0^{+\infty} \left\{ [A(\alpha) - iB(\alpha)] e^{i\alpha x} + [A(\alpha) + iB(\alpha)] e^{-i\alpha x} \right\} d\alpha. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Введемо позначення $F(\alpha) = [A(\alpha) - iB(\alpha)]\pi$. Згідно з формулами (4.10)

дістанемо

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\cos \alpha t - i \sin \alpha t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\alpha t} dt. \quad (4.21)$$

Аналогічно

$$F(-\alpha) = [A(\alpha) + iB(\alpha)]\pi = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\cos \alpha t + i \sin \alpha t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\alpha t} dt. \quad (4.22)$$

Тепер (4.20) можна записати у вигляді

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} [F(\alpha) e^{i\alpha x} + F(-\alpha) e^{-i\alpha x}] d\alpha. \quad (4.23)$$

Перетворимо інтеграл від другого доданку, виконавши заміну змінної $\alpha = -\beta$:

$$\int_0^{+\infty} F(-\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha = - \int_0^{-\infty} F(\beta) e^{i\beta x} d\beta = \int_{-\infty}^0 F(\beta) e^{i\beta x} d\beta.$$

Вважаючи тепер $\beta = \alpha$, дістанемо

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{+\infty} F(\alpha) e^{i\alpha x} + \int_{-\infty}^0 F(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha. \quad (4.24)$$

Отже, з формул (4.21) і (4.24) випливає, що

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\alpha t} dt \right] e^{i\alpha x} d\alpha. \quad (4.25)$$

Цей інтеграл називається *інтегралом Фур'є в комплексній формі* і є розвиненням функції $f(x)$ за неперервним спектром (функції $F(\alpha)$ та $f(x)$ відповідно є прямим та оберненим перетвореннями Фур'є). Зауважимо, що функції $F(\alpha)$, $F_c(\alpha)$ і $F_s(\alpha)$ називають також *спектральною щільністю* функції $f(x)$.

Теорія перетворень Фур'є має широке коло застосувань при розв'язуванні практичних задач, зокрема задачі про поширення тепла у стрижні. Як ми далі побачимо, у цьому випадку рівняння в частинних похідних за допомогою перетворення Фур'є зводяться до звичайних диференціальних рівнянь.

Розділ 5

ВСТУП ДО ТЕОРІЇ РІВНЯНЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

5.1. Деякі загальні відомості

Вивчення багатьох реальних фізичних процесів зводиться до побудови і дослідження математичних моделей, основу яких складають рівняння з частинними похідними, інтегральні рівняння, а також їх комбінації. Цьому присвячений розділ математики, який отримав назву *математичної фізики*. Тут ми розглянемо лише деякі питання вельми широкої теорії рівнянь математичної фізики, пов'язані з диференціальними рівняннями другого порядку у частинних похідних з однією невідомою функцією. Саме до таких рівнянь найчастіше приходять при вивченні різних фізичних процесів. Загальне рівняння цього типу, *лінійне відносно старших похідних*, має вигляд

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0, \quad (5.1)$$

де x_1, x_2, \dots, x_n – незалежні змінні, $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – невідома функція, $a_{ij} = a_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – функції, задані в області D n -вимірного простору. Рівняння (5.1) називається *лінійним*, якщо воно лінійне як відносно старших похідних, так і відносно невідомої функції u і її перших похідних. Це означає, що

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu + f,$$

де a_{ij}, b_i, c, f – функції, які залежать тільки від x_1, x_2, \dots, x_n , тобто лінійне рівняння має вигляд

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu + f = 0. \quad (5.2)$$

Якщо $f = 0$, то рівняння (5.2) називається *однорідним*, а якщо $f \neq 0$ – *неоднорідним*.

Рівняння (5.1) для двох незалежних змінних x і y звичайно записують у вигляді

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0. \quad (5.3)$$

5.2. Класифікація диференціальних рівнянь другого порядку з частинними похідними

При належній заміні змінних рівняння (5.3) значно спрощується. Розглянемо цей спосіб докладно.

Введемо нові незалежні змінні ξ і η за формулами

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y) \quad (5.4)$$

за умови $\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (x, y) \in D$ (достатня умова незалежності $\varphi(x, y)$ і

$\psi(x, y)$). Таке перетворення змінних називається *невиродженням*.

Неважко показати, що рівняння (5.3) у нових змінних буде мати той самий вигляд

$$a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + F\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0. \quad (5.5)$$

Спрощення цього рівняння, тобто зведення його до найпростішого або так званого *канонічного* вигляду, пов'язане із розв'язуванням звичайного диференціального рівняння

$$A(x, y) \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2B(x, y) \frac{dy}{dx} + C(x, y) = 0, \quad (5.6)$$

яке називається *характеристичним* для вихідного рівняння (5.3), а його загальні інтеграли $\varphi(x, y) = C^*$ і $\psi(x, y) = C^*$ – *характеристиками* (тут і надалі C^* – довільна стала).

Неважко бачити, що рівняння (5.6) є квадратним відносно $\frac{dy}{dx}$ і фактично розпадається на два рівняння :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A} \quad \text{і} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A}. \quad (5.7)$$

В залежності від знака підкореневого виразу розрізняють наступні типи рівняння (5.3), а саме:

гіперболічний тип, якщо у точці $M(x, y) \in D$ $B^2 - AC > 0$;

параболічний тип, якщо у точці $M(x, y) \in D$ $B^2 - AC = 0$;

еліптичний тип, якщо у точці $M(x, y) \in D$ $B^2 - AC < 0$.

У випадку, коли знак виразу $B^2 - AC$ зберігається в усіх точках області D , рівняння (5.3) відповідно є гіперболічним, параболічним або еліптичним в *усій* області D . Разом з тим слід відзначити, що у різних точках області тип одного й того ж рівняння також може бути різним. Надалі будемо розглядати область D , в усіх точках якої тип рівняння (5.3) залишається *незмінним*.

5.3. Приведення диференціальних рівнянь другого порядку з частинними похідними до канонічного вигляду

1. У випадку рівняння *гіперболічного* типу $B^2 - AC > 0$ й праві частини обох рівнянь (5.7) дійсні і відмінні. Нехай $\varphi(x, y) = C^*$ і $\psi(x, y) = C^*$ є загальними інтегралами цих рівнянь. Заміна (5.4) у рівнянні (5.5) приводить до найпростішого або *канонічного* вигляду *гіперболічного* рівняння на площині

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \Phi \left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right), \quad (5.8)$$

де $\Phi = -\frac{F}{2b}$. Якщо покласти $\xi = \alpha + \beta$, $\eta = \alpha - \beta$, тобто

$\alpha = \frac{\xi + \eta}{2}$, $\beta = \frac{\xi - \eta}{2}$, де α і β – нові змінні, то отримаємо *другу канонічну*

форму рівнянь гіперболічного типу, а саме

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = 4\Phi \left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \beta} \right). \quad (5.9)$$

Розв'язавши рівняння $\varphi(x, y) = C^*$ і $\psi(x, y) = C^*$ відносно y , дістанемо дві сім'ї ліній в області D $y = f_1(x, C^*)$, $y = f_2(x, C^*)$, які називаються *характеристиками* або *характеристичними лініями* гіперболічного рівняння в області D .

2. У випадку рівняння *параболічного* типу $B^2 - AC = 0$ й праві частини обох рівнянь (5.7) співпадають, тобто маємо тільки один загальний інтеграл рівняння (5.6) $\varphi(x, y) = C^*$. Поклавши у цьому випадку $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \chi(x, y)$, де

$\chi(x, y)$ - довільна функція, незалежна з $\varphi(x, y)$ (тобто $\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \chi}{\partial x} & \frac{\partial \chi}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0 (x, y) \in D$),

отримаємо *канонічну форму* рівняння *параболічного* типу на площині, а саме

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \Phi_1 \left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right), \quad (5.10)$$

де $\Phi_1 = -\frac{F}{c}$. Якщо у праву частину не входить $\frac{\partial u}{\partial \xi}$, то (5.10) буде звичайним диференціальним рівнянням, де ξ виконуватиме роль параметра.

Розв'язавши рівняння $\varphi(x, y) = C^*$ відносно y , дістанемо сім'ю ліній в області D $y = f(x, C^*)$, які називаються *характеристиками* або *характеристичними лініями* параболічного рівняння в області D .

3. У випадку рівняння *еліптичного* типу $B^2 - AC < 0$ й праві частини обох рівнянь (5.7) є комплексними. Нехай $\varphi(x, y) = C^*$ – комплексний загальний інтеграл першого з рівнянь (5.7). Тоді загальний інтеграл другого рівняння $\psi(x, y) = C^*$ також буде являти собою комплексну функцію, спряжену з φ ($\psi(x, y) = \overline{\varphi(x, y)}$).

Введемо нові змінні α і β за формулами

$$\alpha = \frac{1}{2} [\varphi(x, y) + \psi(x, y)] = \operatorname{Re} \varphi(x, y),$$

$$\beta = \frac{1}{2i} [\varphi(x, y) - \psi(x, y)] = \operatorname{Im} \varphi(x, y).$$

Тоді $\xi = \alpha + i\beta$, $\eta = \alpha - i\beta$. Здійснивши цю заміну у рівнянні (5.5), приходимо до *канонічної форми* рівняння *еліптичного* типу на площині

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = \Phi_2 \left(\alpha, \beta, u, \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \beta} \right), \quad (5.11)$$

де $\Phi_2 = -\frac{F}{c}$. Відзначимо, що еліптичне рівняння *не має* характеристичних ліній.

Розглянутий метод приведення рівняння (5.3) до канонічного вигляду й розв'язування отриманого рівняння носить назву *метода характеристик*.

Таким чином, в залежності від знака виразу $B^2 - AC$, існують наступні *канонічні форми* різних типів рівняння (5.3):

1) *канонічна форма рівняння гіперболічного типу* ($B^2 - AC > 0$)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \Phi\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \quad \text{або} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \Phi\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right);$$

2) *канонічна форма рівняння параболічного типу* ($B^2 - AC = 0$)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Phi\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right);$$

3) *канонічна форма рівняння еліптичного типу* ($B^2 - AC < 0$)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \Phi\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

З попереднього випливає, що приведення рівняння (5.3) до канонічного вигляду фактично полягає у відшукуванні перших інтегралів характеристичного рівняння (5.6). Оскільки ж довільна функція від першого інтеграла також є першим інтегралом, то рівняння може бути приведено до канонічного вигляду за допомогою *різних* перетворень змінних (5.4), тобто *неоднозначно*. Крім того, рівняння (5.3) може бути приведено до канонічного вигляду, взагалі кажучи, тільки в деякому достатньо малому околі кожної точки області D . Це впливає з теореми Ковалевської, яка гарантує існування тільки локального розв'язку характеристичного рівняння, тобто тільки в деякому околі будь-якої точки.

Оскільки для кожного з типів канонічних рівнянь розроблені певні методи як аналітичного, так і чисельного розв'язування, то задача приведення рівнянь (5.3) до канонічного вигляду має насамперед важливе практичне значення.

Приклад 5.1. Визначити тип рівняння

$$x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\sqrt{xy} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{y}{x}} - 1 \right) \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

і привести його до канонічного вигляду.

Розв'язання. Тут $A = x$, $B = \sqrt{xy}$, $C = y$. Оскільки $B^2 - AC = xy - xy = 0$, то рівняння належить до *параболічного* типу.

Характеристичне рівняння має вигляд: $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\sqrt{xy}\frac{dy}{dx} + y = 0$

або $\left(\sqrt{x}\frac{dy}{dx} - \sqrt{y}\right)^2 = 0$. У рівнянні $\sqrt{x}\frac{dy}{dx} - \sqrt{y} = 0$ поділимо змінні:

$\frac{dy}{\sqrt{y}} - \frac{dx}{\sqrt{x}} = 0$. Загальний інтеграл є $2(\sqrt{y} - \sqrt{x}) = 2C^*$ або $\sqrt{y} - \sqrt{x} = C^*$.

Зробимо заміну змінних: $\xi = \sqrt{y} - \sqrt{x}$, $\eta = x$ (довільна функція, що

задовольняє умову $\begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$). Знайдемо усі похідні, що входять до

рівняння:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{1}{2\sqrt{y}},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{1}{4x} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{1}{4x\sqrt{x}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \\ &+ \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left(-\frac{1}{4\sqrt{xy}}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{1}{2\sqrt{y}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{1}{4y} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \left(-\frac{1}{4y\sqrt{y}}\right). \end{aligned}$$

Підставимо ці вирази у вихідне рівняння:

$$\begin{aligned}
& x \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{1}{4x} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{1}{4x\sqrt{x}} \right] + \\
& + 2\sqrt{xy} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left(-\frac{1}{4\sqrt{xy}} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{1}{2\sqrt{y}} \right] + \\
& + y \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{1}{4y} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \left(-\frac{1}{4y\sqrt{y}} \right) \right] - \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{y}{x}} - 1 \right) \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{1}{2\sqrt{y}} = 0.
\end{aligned}$$

Після перетворень остаточно маємо

$$x \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\sqrt{y} - \sqrt{x}}{4\sqrt{xy}} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\sqrt{y} - \sqrt{x}}{4\sqrt{xy}} \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0, \quad \text{або} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0, \quad \text{тобто рівняння}$$

приведено до канонічного вигляду.

5.4. Класичні рівняння математичної фізики

Найпростішими рівняннями кожного з розглянутих типів є

$$\text{хвильове рівняння} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (a = \text{const}), \quad (5.12)$$

(гіперболічний тип)

$$\text{рівняння теплопровідності} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (a = \text{const}), \quad (5.13)$$

(параболічний тип)

$$\text{рівняння Лапласа} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (5.14)$$

(еліптичний тип)

які зазвичай називають *класичними рівняннями математичної фізики*. Вони найчастіше зустрічаються у фізичних задачах. До хвильового рівняння зокрема приводять задачі, пов'язані з процесами коливань (поперечні коливання струни, поздовжні коливання стрижня, електричні коливання у дротах, скрутові коливання валів, коливання газу тощо). Рівняння теплопровідності найчастіше зустрічається при вивченні процесів поширення тепла, дифузії, фільтрації рідин та газів у пористих середовищах. До рівняння ж Лапласа зазвичай приходять при дослідженні стаціонарних процесів різної фізичної природи - розподілу теплоти, потенціального плинку рідини, потенціалу стаціонарного

току і електростатичного поля тощо. Таким чином, поділ диференціальних рівнянь другого порядку у частинних похідних на три типи пов'язан з різницею тих фізичних процесів, основу математичних моделей яких складають ці рівняння.

5.5. Початкові і граничні умови.

Постановка задачі математичної фізики і її коректність

Класичним розв'язком диференціального рівняння з частинними похідними називається функція, така що задана в області зміни незалежних змінних D і задовольняє рівнянню у кожній точці цієї області, тобто при підстановці у рівняння перетворює його на тотожність. Ця функція повинна мати усі похідні, що входять до рівняння, причому неперервні в D . Як і звичайні диференціальні рівняння, рівняння з частинними похідними мають нескінченну множину розв'язків, які залежать, взагалі кажучи, від деяких довільних функцій. Однак вивчення реальних фізичних процесів потребує знання цілком визначеного розв'язку рівняння, а це можливо тільки за наявності певних *додаткових умов*. У переважній більшості випадків ці умови безпосередньо впливають з фізичної сутності даної задачі.

Розрізняють два основних типи таких умов: *початкові* умови, які в математичній фізиці відповідають стану фізичного процесу у початковий момент часу, і *крайові* або *граничні* умови, які накладаються на процес на границі області його визначення. Треба зауважити, що задача Коші для рівнянь з частинними похідними має деякі відмінності від аналогічної задачі для звичайних диференціальних рівнянь. По-перше, початкові умови задаються для *нестационарних* рівнянь, тобто таких, що описують *нестационарні* (залежні від часу) процеси. Прикладами таких рівнянь є хвильове рівняння і рівняння теплопровідності. По-друге, ця задача має єдиний розв'язок тільки у тому випадку, коли відповідне рівняння розглядається або на всій прямій, або на всій площині, або в усьому просторі. Наприклад, це може бути задача про коливання нескінченної струни або про поширення тепла у нескінченному стрижні. На практиці до таких задач приходять тоді, коли струна або стрижень дуже довгі і вивчаються процеси, що відбуваються далеко від кінців, впливом яких нехтують. Якщо ж розміри струни або стрижня не дуже великі і впливом кінців не можна знехтувати, то у цих випадках одні початкові умови вже не

забезпечують єдиність розв'язку задачі і треба задавати умови на кінцях (граничні умови).

Таким чином, **постановка задачі** математичної фізики у загальному випадку передбачає: 1) вибір функції, яка характеризує досліджуваний фізичний процес; 2) виведення або вибір відповідного цьому процесу рівняння; 3) установлення граничних умов і формулювання початкових умов (якщо процес нестационарний). Така задача називається **початково-крайовою**.

Функції, які входять до початкових і граничних умов і від яких залежить розв'язок задачі, зазвичай визначаються з досліду і тому не можуть бути знайдені абсолютно точно. Завжди буде існувати деяка похибка, яка неминуче відіб'ється на розв'язку, і далеко не завжди похибка у розв'язку буде малою. Говорять, що в деякій області розв'язок задачі залежить від початкових або граничних умов **неперервно**, якщо малі зміни функцій, що входять до цих умов, тягнуть за собою малі зміни у розв'язку. У цьому випадку також говорять, що розв'язок задачі **стійкий**, а сам досліджуваний процес є **фізично визначеним**. Взагалі задача називається **коректно поставленою**, якщо її розв'язок: 1) існує; 2) є єдиним; 3) неперервно залежить від додаткових умов. Якщо задача поставлена некоректно, то її розв'язок у більшості випадків не має ніякої практичної цінності.

5.6. Поширення тепла в стрижні

5.6.1. Постановка задач

Розглянемо теплоізолюваний з боків *однорідний* стрижень довжиною l , настільки тонкий, щоб у будь-який момент часу температуру в усіх точках його поперечного перерізу можна було б вважати однаковою. Якщо на кінцях стрижня підтримуються сталі температури u_1 і u_2 , то вздовж стрижня усталюється лінійний розподіл температури

$$u(x) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{l} x. \quad (5.15)$$

При цьому тепло буде перетікати від більш нагрітого кінця стрижня до менш нагрітого. Цей процес може бути описаний функцією $u(x, t)$, яка показує температуру у перерізі стрижня x в момент часу t . Тоді за **законом Фур'є**

кількість тепла, що протікає через переріз x площею S за проміжок часу dt дорівнює

$$dQ = -k \frac{\partial u}{\partial x} S dt, \quad (5.16)$$

де k – коефіцієнт теплопровідності, який залежить від матеріалу стрижня.

Якщо всередині стрижня тепло не виникає і не поглинається (тобто теплові джерела відсутні), то підрахунок балансу теплоти на підставі закону збереження енергії приводить до **однорідного рівняння теплопровідності**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (5.13)$$

де $a^2 = \frac{k}{c\rho}$ – **коефіцієнт температуропровідності** ($a = \text{const}$), c – питома теплоємність, ρ – густина матеріалу стрижня. Зауважимо, що коефіцієнти k і c можна вважати сталими лише у невеликих інтервалах змінювання температури, оскільки вони зазвичай є повільно змінними функціями від неї.

Для вилучення єдиного розв'язку рівняння теплопровідності, який би відповідав конкретному процесу, до рівняння необхідно приєднати початкові і граничні умови.

Початкова умова полягає у завданні значень функції $u(x, t)$ у початковий момент часу t_0 .

Граничні умови залежать від температурного режиму на кінцях стрижня і можуть бути різними. Розглядають *три* основні типи таких умов.

1. **Граничні умови першого роду** – коли на кінці стрижня (наприклад $x = 0$) задана температура $u(0, t) = \mu(t)$, де $\mu(t)$ – функція, задана на проміжку часу $t_0 \leq t \leq T$, протягом якого вивчається даний процес.
2. **Граничні умови другого роду** – коли на кінці стрижня (наприклад $x = l$) задано значення похідної $\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = -\frac{Q(l, t)}{k}$, де $Q(l, t)$ задана величина теплового потоку, що протікає через торцевий переріз $x = l$ стрижня.
3. **Граничні умови третього роду** відповідають теплообміну на поверхні стрижня з оточуючим середовищем, температура якого $\theta(t)$ відома.

Припускається, що теплообмін відбувається за **законом Ньютона**

$Q = h(u - \theta)$ (h – **коефіцієнт теплообміну**), отже граничні умови третього

роду мають вигляд $\frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = -\frac{h}{k}[u(l,t) - \theta(t)]$ (для кінця $x = l$) або

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{h}{k}[u(0,t) - \theta(t)] \quad (\text{для кінця } x = 0).$$

Можливі і більш складні крайові умови. Зазначимо також, що оскільки умови на кінцях стрижня можуть бути різних типів, то число їх можливих комбінацій, кожній з яких відповідає окрема задача, доволі значне. Ми розглянемо тут найбільш відому – так звану *першу крайову* задачу для обмеженої області (у даному випадку – для *стрижня скінченної довжини*): відшукати розв'язок рівняння теплопровідності (5.13) у області $0 < x < l$, $t_0 < t \leq T$, який задовольняє

$$\text{початкову умову } u(x, t_0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (5.17)$$

$$\text{граничні умови } u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t), \quad t_0 \leq t \leq T, \quad (5.18)$$

де $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ – задані функції, а $t_0 \leq t \leq T$ – проміжок часу, протягом якого вивчається даний процес. Якщо $\mu(t) = 0$, то відповідна гранична умова називається *однорідною*.

Окрім сформульованої задачі також часто зустрічаються її *граничні випадки*.

1. Якщо стрижень дуже довгий, то протягом невеликого проміжку часу вплив заданого на кінцях температурного режиму на режим у центральній частині стрижня впливає дуже слабо (температура на центральній ділянці визначається в основному лише початковим розподілом температури). Тому у подібних задачах зазвичай вважають, що стрижень має нескінченну довжину. Отже, маємо *задачу з початковими умовами (задачу Коші) про розподіл температури на нескінченній прямій* (у нескінченному стрижні): знайти розв'язок рівняння теплопровідності (5.13) у області $-\infty < x < +\infty$, $t > t_0$, який задовольняє початкову умову

$$u(x, t_0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad (5.19)$$

де $\varphi(x)$ – задана функція.

2. Якщо ж ділянка стрижня, температура якої нас цікавить, знаходиться поблизу одного з кінців й далеко від другого, то температура цієї ділянки практично визначається температурним режимом близького кінця й початковими умовами. В цьому випадку стрижень звичайно вважається півнескінченним і *перша крайова задача для півнескінченного стрижня*

формулюється у вигляді: знайти розв'язок рівняння теплопровідності (5.13) у області $0 < x < +\infty$, $t > t_0$, який задовольняє

$$\text{початкову умову } u(x, t_0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x < +\infty, \quad (5.20)$$

$$\text{граничну умову } u(0, t) = \mu(t), \quad t \geq t_0, \quad (5.21)$$

де $\varphi(x)$, $\mu(t)$ – задані функції.

3. Оскільки вплив початкових умов при поширенні тепла по стрижню із плином часу зменшується, то в доволі віддалений від початкового момент температура стрижня практично визначається граничними умовами. Отже у цьому випадку маємо *крайову задачу без початкових умов*: знайти розв'язок рівняння теплопровідності (5.13) у області $0 < x < l$, $t > -\infty$, який задовольняє граничні умови

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t), \quad (5.22)$$

де $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ – задані функції. Серед задач цього типу дуже важливою є задача для півнескінченного стрижня: знайти розв'язок рівняння теплопровідності (5.13) у області $0 < x < +\infty$, $t > -\infty$, який задовольняє граничну умову

$$u(0, t) = \mu(t), \quad (5.23)$$

де $\mu(t)$ – задана функція.

В залежності від характеру температурного режиму на границях можливі й інші види задач без початкових умов.

5.6.2. Розв'язок першої крайової задачі

Точним розв'язком першої крайової задачі називається функція $u(x, t)$ із наступними властивостями:

- 1) $u(x, t)$ визначена й неперервна у замкненій області

$$0 \leq x \leq l, \quad t_0 \leq t \leq T;$$

- 2) $u(x, t)$ задовольняє рівнянню теплопровідності у відкритій області

$$0 < x < l, \quad t_0 < t;$$

- 3) $u(x, t)$ задовольняє початкову і граничні умови, тобто

$$u(x, t_0) = \varphi(x), \quad u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t),$$

де $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ – неперервні функції, що задовольняють умови спряження $\varphi(0) = \mu_1(t_0)$ і $\varphi(l) = \mu_2(t_0)$ (це необхідно для забезпечення неперервності функції $u(x,t)$ у замкненій області).

Розв'язки інших крайових задач, зокрема задач для нескінченного і півнескінченного стрижнів, а також задачі без початкових умов, визначаються аналогічно. Слід тільки додати, що в останніх випадках функція $u(x,t)$ повинна бути не тільки *неперервною*, але й *обмеженою* в усій області.

Доведено, що перша крайова задача *поставлена коректно*, тобто її розв'язок існує, є єдиним і неперервно залежить від початкової і граничних умов.

5.6.3. Поширення тепла в стрижні скінченної довжини.

Метод поділу змінних (метод Фур'є)

Метод поділу змінних полягає у відшуванні розв'язку рівняння у вигляді добутку двох функцій, кожна з яких залежить тільки від однієї змінної. Цей метод, який носить ім'я Фур'є, є особливо зручним для розв'язування диференціальних рівнянь з частинними похідними у випадку двох незалежних змінних.

Розглянемо застосування метода Фур'є при розв'язуванні поставленої у п.5.6.1 задачі про поширення тепла у стрижні скінченної довжини: знайти розв'язок рівняння теплопровідності (5.13) у області $0 < x < l$, $0 < t \leq T$, який задовольняє

$$\text{початкову умову } u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (5.24)$$

$$\text{однорідні граничні умови } u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (5.25)$$

Згідно з методом Фур'є припустимо, що ненульовий частинний розв'язок рівняння, такий що задовольняє умови (5.25), можливо відшукувати у вигляді

$$u(x,t) = X(x)T(t). \quad (5.26)$$

Підставимо (5.26) у рівняння (5.13) і поділимо обидві частини рівності на $a^2 XT$. Тоді маємо:

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda, \quad (5.27)$$

де $\lambda = \text{const}$, оскільки ліва і права частини рівності залежать від різних змінних і можуть дорівнювати одна одній тільки у тому випадку, коли вони сталі. Звідси випливають два звичайні диференціальні рівняння

$$X'' + \lambda X = 0, \quad (5.28)$$

$$T' + a^2 \lambda T = 0. \quad (5.29)$$

Підставимо (5.26) у граничні умови (5.25) і, з урахуванням того, що $T(t) \neq 0$, отримаємо

$$X(0) = 0, \quad (5.30)$$

$$X(l) = 0 \quad (5.31)$$

Таким чином, для визначення функції $X(x)$ ми дістали відому задачу про власні значення (так звану *задачу Штурма-Ліувілля*) (5.28), (5.30)-(5.31). Неважко показати, що нетривіальні розв'язки (власні функції) цієї задачі існують тільки для значень параметра $\lambda > 0$ (інакше $X(x) \equiv 0$). У цьому випадку загальний розв'язок рівняння (5.28) є $X(x) = A \cos \sqrt{\lambda} x + B \sin \sqrt{\lambda} x$ (A, B – довільні сталі). Після підстановки його до граничних умов (5.30), (5.31) отримаємо власні значення

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (5.32)$$

яким відповідають власні функції (нетривіальні розв'язки)

$$X_n(x) = \sin \sqrt{\lambda_n} x. \quad (5.33)$$

Ці розв'язки визначаються з точністю до сталого множника, який зазвичай покладають рівним одиниці. Значенням (5.32) відповідають розв'язки рівняння (5.29)

$$T_n(t) = C_n e^{-a^2 \lambda_n t}, \quad (5.34)$$

де C_n - невідомі поки що коефіцієнти.

Отже, бачимо, що функції

$$u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t) = C_n e^{-a^2 \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (5.35)$$

являють собою частинні розв'язки рівняння (5.13), які задовольняють однорідні граничні умови (5.25).

Складемо формально ряд

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 a^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (5.36)$$

Оскільки усі члени ряду задовольняють граничні умови, то їм задовольняє і функція $u(x,t)$. Вона має задовольняти ще й початкову умову (5.24), отже

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{l} = \varphi(x). \quad (5.37)$$

Це означає, що C_n є коефіцієнти Фур'є функції $\varphi(x)$ при розвиненні її в ряд за синусами на інтервалі $(0, l)$, тобто

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{n\pi \xi}{l} d\xi. \quad (5.38)$$

Доведено, що ряд (5.36), коефіцієнти якого визначаються формулою (5.38), задовольняє усі умови задачі, отже є її розв'язком.

Зауважимо, що коли на кінцях стрижня підтримуються сталі ненульові температури $u(0,t) = u_0$, $u(l,t) = u_1$, $0 \leq t \leq T$ (тобто коли граничні умови *стаціонарно неоднорідні*), то розв'язок задачі треба розшукувати у вигляді

$$u(x,t) = u_0 + \frac{x}{l}(u_1 - u_0) + v(x,t),$$

де функція $v(x,t) = u(x,t) - u_0 - \frac{x}{l}(u_1 - u_0)$ є розв'язком розглянутої вище відповідної задачі з *однорідними* граничними умовами

$$v(0,t) = 0, \quad v(l,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

і початковою умовою $v(x,0) = \varphi(x) - u_0 - \frac{x}{l}(u_1 - u_0)$, $0 \leq x \leq l$.

5.6.4. Поширення тепла в необмеженому стрижні

5.6.4.1. Випадок нескінченного стрижня

Розглянемо *задачу Коші*: знайти розв'язок рівняння теплопровідності (5.13) в області $-\infty < x < +\infty$, $t > 0$, який задовольняє початкову умову

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad (5.19)$$

де $\varphi(x)$ – задана функція.

Якщо $\varphi(x)$ є неперервною функцією, то виконання початкової умови будемо розуміти як $\lim_{\substack{t \rightarrow 0+0 \\ \xi \rightarrow x}} u(\xi,t) = \varphi(x)$.

Як вже зазначалося у п.5.6.2, розв'язок рівняння теплопровідності у даному випадку однозначно визначається початковою умовою тільки якщо він обмежений. Отже, згідно з методом поділу змінних будемо шукати обмежений нетривіальний розв'язок рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (a = \text{const}) \quad (5.13)$$

у вигляді добутку

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (5.39)$$

Підставимо (5.39) у рівняння (5.13) і поділимо обидві частини рівності на $a^2 XT$. Тоді маємо:

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\omega^2, \quad (5.40)$$

де $\omega^2 = \text{const}$. Звідси випливають два звичайні диференціальні рівняння

$$X'' + \omega^2 X = 0, \quad (5.41)$$

$$T' + a^2 \omega^2 T = 0. \quad (5.42)$$

Після розв'язування цих рівнянь знайдемо частинні розв'язки рівняння (5.13) у вигляді

$$u_\omega(x, t) = A(\omega)e^{-\omega^2 a^2 t \pm i\omega x}. \quad (5.43)$$

Ці розв'язки задовольняють умову обмеженості. Оскільки $-\infty < \omega < +\infty$, то візьмемо у (5.43) знак “+” і утворимо функцію

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega)e^{-\omega^2 a^2 t + i\omega x} d\omega, \quad (5.44)$$

яка є суперпозицією частинних розв'язків рівняння (5.13) і тому сама є його розв'язком. Вона повинна задовольняти початкову умову, звідки маємо

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega)e^{i\omega x} d\omega.$$

Скористаємось формулою оберненого перетворення Фур'є

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)e^{i\omega\xi} d\xi. \quad (5.45)$$

Після її підстановки у (5.44) і зміни порядку інтегрування дістаємо:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega^2 a^2 t + i\omega(x-\xi)} d\omega \right) \varphi(\xi) d\xi. \quad (5.46)$$

Доведено, що внутрішній інтеграл у (5.46) дорівнює

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega^2 a^2 t + i\omega(x-\xi)} d\omega = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}. \quad (5.47)$$

Підставивши (5.47) у (5.46) остаточно отримаємо формулу

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) d\xi, \quad (5.48)$$

яка дістала назву *інтеграла Пуассона*. Для будь-якої обмеженої функції $\varphi(x)$ вона обмежена і зображує розв'язок поставленої задачі Коші. Якщо початкова умова задається не при $t = 0$, а при $t = t_0$, то вираз для $u(x,t)$ набуває вигляду

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-t_0)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}} \varphi(\xi) d\xi. \quad (5.49)$$

Приклад 5.2. Бічна поверхня нескінченного стрижня теплоізована, а початковий розподіл температур при $t = t_0 = 0$ має вигляд:

$$u(x,0) = \varphi(x) = \begin{cases} T_1, & x \geq 0, \\ T_2, & x < 0. \end{cases}$$

Знайти температуру $u(x,t)$ стрижня у будь-який момент часу.

Розв'язання. За формулою Пуассона дістаємо розв'язок задачі у вигляді:

$$u(x,t) = \frac{T_2}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi + \frac{T_1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi$$

або, після перетворень,

$$u(x,t) = \frac{T_1 + T_2}{2} + \frac{T_1 - T_2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\tau^2} d\tau. \quad (5.50)$$

Функція

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\tau^2} d\tau \quad (5.51)$$

є відома *функція Лапласа* або *інтеграл ймовірностей*. Цю функцію також називають *функцією помилок* й позначають $\text{erf } x$. Вона є непарною, тобто $\Phi(-z) = -\Phi(z)$. За допомогою інтеграла ймовірностей (5.51) формула (5.50) може бути записана у вигляді

$$u(x,t) = \frac{T_1 + T_2}{2} + \frac{T_1 - T_2}{\sqrt{\pi}} \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right).$$

Якщо початковий розподіл температури стрижня такий, що

$$u(x,0) = \varphi(x) = \begin{cases} T, & x_1 \leq x \leq x_2, \\ 0, & x < x_1, \quad x > x_2, \end{cases}$$

то розв'язок задачі має вигляд

$$u(x,t) = \frac{T}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi$$

або

$$u(x,t) = \frac{T}{2} \left[\Phi\left(\frac{x-x_1}{2a\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x-x_2}{2a\sqrt{t}}\right) \right].$$

5.6.4.2. Випадок півнескінченного стрижня

Розглянемо *першу крайову задачу для півнескінченного стрижня*: знайти розв'язок рівняння теплопровідності (5.13) у області $0 < x < +\infty$, $t > 0$, який задовольняє

$$\text{початкову умову } u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x < +\infty, \quad (5.20)$$

$$\text{граничну умову } u(0,t) = \mu(t), \quad t \geq 0, \quad (5.21)$$

де $\varphi(x)$, $\mu(t)$ – задані функції.

Зауваження. Гранична умова залежить від заданого температурного режиму і, окрім вигляду (5.21) (для *першої* крайової задачі), може мати вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = -\frac{Q(l,t)}{k} \quad (\text{для } \text{другої} \text{ крайової задачі}) \quad \text{або} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{h}{k} [u(0,t) - \theta(t)]$$

(для *третьої* крайової задачі).

Для того, щоб умови задачі визначали єдиний розв'язок, необхідно на функцію $u(x,t)$ накласти додаткову умову її обмеженості всюди, тобто

$$|u(x,t)| < M \quad \text{при} \quad 0 \leq x < +\infty, \quad t \geq 0. \quad \text{Звідси випливає, що початкова функція } \varphi(x) \text{ також повинна бути обмеженою, а саме } |\varphi(x)| < M.$$

Доведено, що розв'язок задачі має вигляд

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right\} \varphi(\xi) d\xi + \\ + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \frac{x}{(t-\tau)\sqrt{t-\tau}} \mu(\tau) d\tau. \quad (5.52)$$

Якщо початкова умова задається не при $t = 0$, а при $t = t_0$, то вираз для $u(x,t)$ набуває вигляду

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-t_0)}} \int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}} \right) \varphi(\xi) d\xi + \\ + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_{t_0}^t e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \frac{x}{(t-\tau)\sqrt{t-\tau}} \mu(\tau) d\tau. \quad (5.53)$$

Приклад 5.3. Розглянемо задачу про остигання рівномірно нагрітого півнескінченного стрижня з теплоізолюваною бічною поверхнею, на кінці якого підтримується стала нульова температура. Це означає, що треба знайти розв'язок рівняння теплопровідності (5.13) у області $0 < x < +\infty$, $t > 0$, який задовольняє початкову умову $u(x,0) = T$, $0 \leq x < +\infty$ і граничну умову $u(0,t) = 0$, $t \geq 0$.

Розв'язання. Оскільки за умовою задачі $\varphi(x) = T$, $\mu(t) = 0$, $t_0 = 0$, то за

формулою (5.52) будемо мати $u(x,t) = \frac{T}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right) d\xi$.

Введемо змінні $\eta = \frac{\xi - x}{2a\sqrt{t}}$, $\eta_1 = \frac{\xi + x}{2a\sqrt{t}}$ і розіб'ємо інтеграл на два доданки.

Після перетворень отримаємо розв'язок задачі у вигляді $u(x,t) = T\Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$,

де $\Phi(z)$ - інтеграл ймовірностей.

Розділ 6

ЕЛЕМЕНТИ ВАРІАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ

Задачі на знаходження екстремуму завжди привертали до себе увагу. Наприклад, хода прямою лінією є інстинктивним рішенням задачі на екстремум: ми хочемо досягти кінцевої точки нашого шляху з якнайменшими зусиллями. Відомий вислів «шляхом найменшого опору» є ще одним визнанням нашого інстинктивного прагнення до знаходження мінімуму.

Математично ми говоримо про «задачу на екстремум» кожного разу, коли фігурує найбільше чи найменше значення певної величини. Наприклад, ми можемо шукати найвищу точку гори чи найнижчу точку долини, найкоротший шлях між двома точками чи найбільший об'єм контейнера, який можна зробити з даного шматка матеріалу, найменші можливі витрати на освітлення або на обігрів оселі тощо. Для розв'язання подібних задач виникла окрема галузь математики, що має назву варіаційне числення.

У початковому курсі вищої математики розглянуто задачі на максимум і мінімум для процесів, які можна описати функціями зі скінченним числом змінних. Основна задача варіаційного числення полягає у розробці методів розв'язання задач на екстремум процесів з нескінченним числом змінних. Під час цього максимуми і мінімуми досягаються на лініях, поверхнях тощо, тобто на функціях. Якщо у першому випадку стаціонарні значення (точки екстремуму) визначаються із алгебраїчних рівнянь, то в другому випадку функції визначаються з диференціальних рівнянь.

Варіаційне числення було започатковано в 1696 р. Й.Бернуллі, який сформулював, а І.Ньютон, Г.Лейбніц, Я.Бернуллі і Г.Лопіталь розв'язали різними способами задачу про *брахістохрону* (від грецьк. «брахістос» – найкоротший, «хронос» – час) – лінію найшвидшого спуску. Основні диференціальні рівняння для варіаційних задач були знайдені Ейлером і Лагранжем. Завдяки їхнім роботам методи варіаційного числення почали широко використовувати при постановці та розв'язуванні задач моделювання, оптимізації та управління. Ці методи знайшли застосування в теоретичній механіці, опорі матеріалів, теорії пружності і пластичності, гідравліці тощо. Володіння ними давно вже стало складовою частиною сучасної інженерної освіти.

6.1. Поняття про функціонал

Поняття функції пов'язане з можливістю встановлення відповідності між двома множинами чисел, одна з яких – аргумент, інша – функція.

Поняття функціонала пов'язане з відповідністю між множиною певного класу функцій (наприклад, цілих, раціональних, неперервних, визначених на скінченному проміжку) і множиною чисел.

Якщо кожній функції $y(x)$ із класу D за деяким законом ставиться у відповідність певне числове значення змінної I , то ця змінна називається **функціоналом** від однієї функціональної змінної $y(x)$ і позначається

$$I = I[y] = I[y(x)], \quad (6.1)$$

де функція $y(x)$ – **незалежна змінна (аргумент)** функціоналу, а клас D – **область визначення** функціоналу. Функції $y(x)$ називають ще **функціями порівняння** або **допустимими функціями**.

Можна розглядати також функціонали від кількох функціональних змінних. Якщо скінченному набору функцій $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ з певного класу функцій D ставиться у відповідність за деяким законом певне числове значення змінної I , то її називають функціоналом від n функціональних змінних і позначають $I = I[y_1, y_2, \dots, y_n]$.

Розглянемо *приклад*, у яких треба обчислити функціонал при заданих значеннях аргументу.

Приклад 6.1. $I[y] = y(1); \quad y_1 = \sqrt[3]{x}; \quad y_2 = \sin \frac{\pi x}{4}.$

$$I[y_1] = \sqrt[3]{1} = 1; \quad I[y_2] = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Приклад 6.2. $I[y] = y'(0); \quad y_1 = \frac{2x}{\cos x}; \quad y_2 = \sin^2 x.$

$$I[y_1] = \left(\frac{2x}{\cos x} \right)' \Big|_{x=0} = \frac{2 \cos x + 2x \sin x}{\cos^2 x} \Big|_{x=0} = 2;$$

$$I[y_2] = (\sin^2 x)' \Big|_{x=0} = 2 \sin x \cos x \Big|_{x=0} = 0.$$

Приклад 6.3. $I[y] = \int_0^1 y^3 dx$; $y_1 = \sin \pi x$; $y_2 = x^2$.

$$I[y_1] = \int_0^1 \sin^3 \pi x dx = \int_0^1 (1 - \cos^2 \pi x) \sin \pi x dx = -\frac{1}{\pi} \left(\cos \pi x - \frac{\cos^3 \pi x}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{4}{3\pi};$$

$$I[y_2] = \int_0^1 x^6 dx = \frac{x^7}{7} \Big|_0^1 = \frac{1}{7}.$$

Приклад 6.4. $I[y] = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$; $y_1 = x$; $y_2 = \ln \cos x$.

$$y'_1 = x' = 1; I[y_1] = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1 + 1^2} dx = \sqrt{2} x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{6};$$

$$y_2 = (\ln \cos x)' = -\operatorname{tg} x; I[y_2] = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1 + (-\operatorname{tg} x)^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos x} =$$

$$\ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \right| - \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \right| = \ln \sqrt{3}.$$

Зауважимо, що у більшості варіаційних задач об'єктом дослідження на екстремум є саме функціонал вигляду

$$I[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx, \quad (6.2)$$

областю визначення якого служить клас функцій $C_1[a, b]$, що визначені та неперервні разом з першою похідною на відрізку $[a, b]$.

6.2. Класичні задачі варіаційного числення

Історично першою задачею, відомою в далекій давнині і віднесеної згодом до задач варіаційного числення, була так звана *задача Дідони*. Згідно з легендами, цариця однієї з держав Стародавньої Греції *Дідона* (*Dido*), переслідувана царем сусідньої держави, втекла в Північну Африку. Там вона попросила в місцевого населення клопоту землі, який можна охопити шкурою вола. Одержавши згоду на таке незначне прохання, Дідона

розрізала шкуру на тоненькі ремінці, зв'язала їх у довжелезну мотузку і охопила неабияку на ті часи ділянку землі, що прилягала до моря. Так було засновано місто Карфаген.

Математична модель цієї задачі така: треба знайти форму мотузки

(лінію) $y = y(x)$ заданої довжини $L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$, що обмежує максималь-

ну площу $S = \int_a^b y(x) dx$ при граничних умовах $y(a) = 0$; $y(b) = 0$.

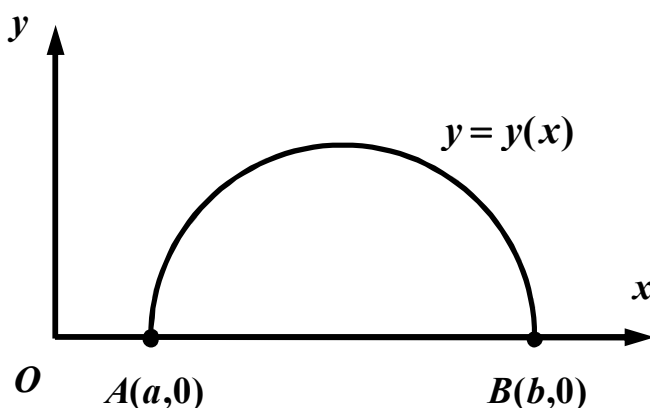


Рис. 6.1

Вже в стародавності було виявлено, що шуканою формою нитки служить дуга кола (рис. 6.1). Буквальний зміст слів «ізопериметрична задача» - це задача із заданим (сталим) параметром.

Задача про брахістохрону (задача про максимальну швидкодiю). Інша знаменита задача, що привела до зародження методів варіаційного числення, була запропонована в 1696 році І.Бернуллі і розв'язана різними способами Я.Бернуллі, Лейбніцем, Лопіталем і Ньютоном. У цій задачі треба знайти траєкторію, по якій повинна рухатись під дією сили тяжіння матеріальна точка масою m без початкової швидкості і тертя з заданої точки $A(a, y_a)$ в задану точку $B(b, y_b)$ за мінімальний час T (рис. 6.2).

Припустимо, що шукана траєкторія $y = y(x)$ відома. Тоді згідно із законом збереження енергії маємо

$$\frac{mV^2}{2} = mg(y_a - y) \text{ або } \frac{V^2}{2} = g(y_a - y).$$

Звідси $V = \sqrt{2g(y_a - y)}$.

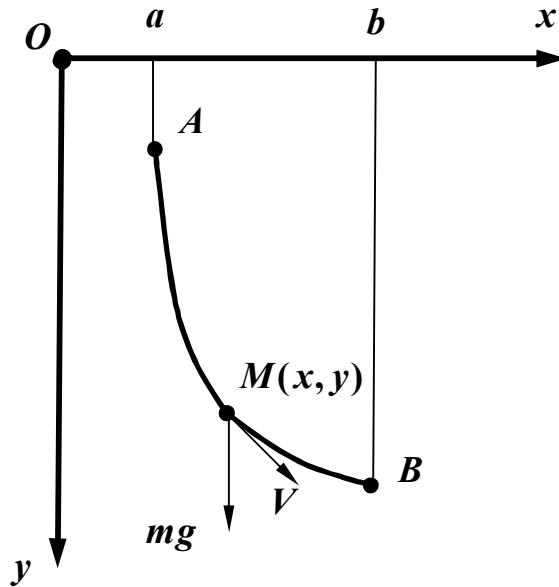


Рис. 6.2

З іншого боку, швидкість $V = \frac{dS}{dt}$, де dS - диференціал дуги кривої $y(x)$,

тобто

$$dS = \sqrt{1 + (y')^2} dx, \quad V = \sqrt{1 + (y')^2} \frac{dx}{dt}; \quad \sqrt{2g(y_a - y)} = \sqrt{1 + (y')^2} \frac{dx}{dt}.$$

Звідси $dt = \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{2g(y_a - y)}} dx$. Остаточно

$$T = \int_a^b \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{2g(y_a - y)}} dx.$$

Покладемо $y_a = 0$, тоді

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_a^b \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{y}} dx.$$

Тепер можна сформулювати таку *задачу*: серед неперервно диференційовних функцій $y = y(x)$, які задовольняють граничним умовам $y(a) = 0$; $y(b) = y_b$, знайти таку, що надає інтегралу

$$I[y] = T[y] = \int_a^b \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{y}} dx \tag{6.3}$$

найменше з можливих значень.

Задача про геодезичні лінії. Нехай на поверхні $\varphi(x, y, z) = 0$ задано дві точки $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$. Серед всіх ліній, які лежать на даній поверхні і з'єднують точки A і B , вибрати ту, дуга AB якої має найменшу довжину.

Аналітичне формулювання цієї задачі: серед неперервно диференційовних функцій $x(t), y(t), z(t)$ параметра t знайти такі, що задовольняють рівняння зв'язку $\varphi(x, y, z) = 0$ і доставляють мінімум функціоналу

$$I[x, y, z] = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt \quad (6.4)$$

при крайових умовах

$$\begin{aligned} x(t_1) &= x_1; & y(t_1) &= y_1; & z(t_1) &= z_1; \\ x(t_2) &= x_2; & y(t_2) &= y_2; & z(t_2) &= z_2. \end{aligned}$$

Лінії найменшої довжини, розміщені на поверхні, дістали назву *геодезичних*. Аналогічну назву має задача (6.4). Задача про геодезичні лінії є задачею, яка досить часто використовується у практиці керування різними потоками (під час перевезення промислових вантажів із пункту A в пункт B обирають, як правило, найкоротший шлях). Цими ж міркуваннями керуються пасажери.

6.3. Варіація функції. Приріст і варіація функціоналу

Розглянемо поняття варіації функції та приросту функціоналу, які є аналогами відповідно приросту аргументу $\Delta x = x_2 - x_1$ і приросту функції $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Для функціонала $I = I[y]$ роль аргументу виконує функція $y(x)$. Приріст аргументу функціоналу називається *варіацією функції*, позначається δy і дорівнює $\delta y = y_2(x) - y_1(x) = y_2 - y_1$. Тоді $y_2 = y_1 + \delta y = y + \delta y$.

Різниця $\Delta I = \Delta I[y, \delta y] = I[y + \delta y] - I[y]$ називається *приростом функціоналу* $I[y]$, який відповідає варіації δy аргументу.

Якщо нескінченно малому приросту функції δy відповідає нескінченно малий приріст функціоналу ΔI , то такий функціонал називається *неперервним*.

Варіація функціоналу відіграє ту саму роль при дослідженні функціоналу, що і диференціал при дослідженні функції, а саме: якщо диференціал dy є головною (лінійною) частиною приросту функції

$$\Delta y = y' \cdot \Delta x + \beta(x, \Delta x) \cdot \Delta x = dy + \beta(x, \Delta x) \cdot \Delta x,$$

де $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \beta(x, \Delta x) = 0$, то варіація є такою ж частиною приросту функціоналу $I[y]$. Якщо приріст функціоналу можна подати у вигляді

$$\Delta I = L[y, \delta y] + \beta(y, \delta y) \cdot |\delta y|, \quad (6.5)$$

де $\lim_{|\delta y| \rightarrow 0} \beta(y, \delta y) = 0$, а $L[y, \delta y]$ є лінійним відносно δy функціоналом, то сам функціонал $I[y]$ називається *варіювним*, а головна частина його приросту $L[y, \delta y]$ називається *варіацією функціоналу*

$$\delta I = L(y, \delta y). \quad (6.6)$$

Приклад 6.4. Знайти варіації функціоналів

$$a) \quad I[y] = \int_a^b y^2(x) dx; \quad б) \quad I[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx.$$

Розв'язання.

a) Знайдемо приріст функціоналу ΔI :

$$\begin{aligned} \Delta I &= \int_a^b (y(x) + \delta y)^2 dx - \int_a^b y^2(x) dx = \\ &= \int_a^b (y^2(x) + 2y(x)\delta y + (\delta y)^2) dx - \int_a^b y^2(x) dx = \int_a^b y^2(x) dx + \\ &+ 2 \int_a^b y(x)\delta y dx + \int_a^b (\delta y)^2 dx - \int_a^b y^2(x) dx = 2 \int_a^b y(x)\delta y dx + \int_a^b (\delta y)^2 dx. \end{aligned}$$

$$\text{Отже } \delta I = 2 \int_a^b y(x)\delta y dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} (y^2) \delta y dx.$$

$$б) \text{ Знаходимо } \Delta I = \int_a^b F(x, y + \delta y, y' + \delta y') dx - \int_a^b F(x, y, y') dx.$$

Розвинемо функцію $F(x, y + \delta y, y' + \delta y')$ в ряд Тейлора в околі точки (x, y, y') : $F(x, y + \delta y, y' + \delta y') = F(x, y, y') + \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y'$ плюс члени вищого

порядку малості відносно δy і $\delta y'$. Тоді $\Delta I = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx + \dots$

Відповідно

$$\delta I = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx \quad (6.7)$$

Отже, для функціонала (6.2) варіація має вигляд (6.7).

Вираз (6.7) аналогічний формулі повного диференціала функції двох змінних $z = z(x, y)$:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right) z(x, y). \quad (6.8)$$

Те саме маємо у випадку варіації функціонала

$$\delta I = \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial y} \delta y + \frac{\partial}{\partial y'} \delta y' \right) F dx. \quad (6.9)$$

Варіацію δI називають також *варіацією першого порядку*. Аналогія формул (6.8) і (6.9) поширюється й на варіації вищих порядків. Наприклад,

$$\delta^2 I = \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial y} \delta y + \frac{\partial}{\partial y'} \delta y' \right)^2 F dx = \int_a^b \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \delta y^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \delta y \delta y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \delta y'^2 \right) dx.$$

Аналогічно формулі Тейлора

$$\Delta z = \frac{dz}{1!} + \frac{d^2 z}{2!} + \dots + \frac{d^n z}{n!} + \dots$$

приріст функціонала виражається через його варіації так:

$$\Delta I = \frac{\delta I}{1!} + \frac{\delta^2 I}{2!} + \dots + \frac{\delta^n I}{n!} + \dots \quad (6.10)$$

6.4. Екстремум функціоналу

Як відомо, необхідна умова екстремуму функції полягає у рівності нулю її диференціала. Аналогічно, для функціонала справедлива наступна

Теорема (необхідна умова екстремуму функціоналу).

Якщо функціонал $I[y]$ має варіацію δI і досягає на деякій функції $y_0 = y_0(x)$ екстремуму, то його варіація на цій функції дорівнює нулю:

$$\delta I[y_0, \delta y_0] = 0. \quad (6.11)$$

Функції, на яких варіація функціоналу існує і дорівнює нулю, називаються **стаціонарними функціями** або **екстремаліями**. У багатьох конкретних задачах клас допустимих функцій обмежують додатковими умовами:

$$y(a) = y_1, \quad y(b) = y_2 \quad (6.12)$$

де y_1, y_2 задані. Така задача має назву **варіаційної задачі з закріпленими кінцями**.

Оскільки умова (6.11) має виконуватися для будь-якої варіації функції, то для умов (6.12)

$$\delta y(a) = 0; \quad \delta y(b) = 0. \quad (6.13)$$

Максимум або мінімум функціоналу на екстремалі визначається знаком його приросту ΔI . За формулою (6.10) з урахуванням (6.11) маємо

$$\Delta I = \frac{1}{2!} \delta^2 I + \frac{1}{3!} \delta^3 I + \dots,$$

тобто знак ΔI визначається знаком $\delta^2 I$ внаслідок малості більш високого порядку наступних за $\delta^2 I$ доданків. Якщо $\delta^2 I > 0$ будь-якого δy , то на екстремалі $y = y_0$ функціонал має **мінімум**; якщо $\delta^2 I < 0$, то на екстремалі функціонал набуває **максимуму** (достатні умови екстремуму функціонала). Якщо друга варіація додатна для одних δy і ві'ємна для інших, то на такій екстремалі функціонал екстремумів не має.

В таблиці 6.1 наведено загальну відповідність понять диференціального та варіаційного числення.

Таблиця 6.1

<i>Диференціальне числення</i>	<i>Варіаційне числення</i>
Аргумент — числова змінна x	Аргумент — числова функція $y(x)$
Залежна змінна — числова y	Залежна змінна — числова I
Приріст аргументу Δx	Варіація аргументу δy
Приріст функції Δy	Приріст функціоналу ΔI

Диференціал функції dy	Варіація функціоналу δI
Другий диференціал функції $d^2 y$	Друга варіація функціоналу $\delta^2 I$
Необхідна умова екстремуму $dy = 0$	Необхідна умова екстремуму $\delta I = 0$
Стаціонарна точка функції	Стаціонарна функція (допустима екстремаль) функціоналу
Достатня умова екстремуму: $d^2 y > 0 - \min,$ $d^2 y < 0 - \max$	Достатня умова екстремуму: $\delta^2 I > 0 - \min,$ $\delta^2 I < 0 - \max$

6.5. Задача на екстремум функціоналу з закріпленими кінцями. Диференціальне рівняння екстремалей (рівняння Ейлера)

Поставимо таку *задачу*: знайти мінімум (максимум) функціоналу (6.2)

$I[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx$ при крайових умовах $y(a) = y_1, y(b) = y_2$ серед неперервно диференційованих на відрізку $[a, b]$ функцій $y = y(x)$.

Теорема. Допустимі екстремалі функціоналу $I[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx$ визнача-

ються як розв'язки диференціального рівняння $F'_{y'} - \frac{d}{dx} F''_{y'y'} = 0$ при крайових умовах (6.12).

Доведення. Застосуємо необхідну умову екстремуму (6.11), тобто $\delta I = 0$, до співвідношення (6.2). Для цього в (6.7) другий доданок проінтегруємо частинами:

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' dx = \left. \begin{array}{l} u = \frac{\partial F}{\partial y'} \\ du = d \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} dx \\ dv = \delta y' dx = \frac{d}{dx} \delta y dx = d \delta y \\ v = \delta y \end{array} \right| =$$

$$= \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y dx.$$

З урахуванням рівностей (6.13) маємо

$$\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \Big|_a^b = \frac{\partial F(b)}{\partial y'} \delta y(b) - \frac{\partial F(a)}{\partial y'} \delta y(a) = 0.$$

Отже варіацію (6.7) за умовою (6.11) можна записати у вигляді

$$\delta I = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y dx = 0.$$

Оскільки δy довільна, то приходимо до рівняння, яке називають **рівнянням Ейлера**

$$F'_{,y} - \frac{d}{dx} F'_{,y'} = 0. \quad (6.14)$$

З урахуванням того, що

$$d \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} dx + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} dy + \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y'} dy', \quad \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = F''_{,xy} + F''_{,yy'} y' + F''_{,y'y'} y'',$$

рівняння Ейлера (6.14) набуває розгорнутого вигляду

$$F'_{,y} - F''_{,xy'} - F''_{,yy'} y' - F''_{,y'y'} y'' = 0. \quad (6.15)$$

Рівняння (6.14) і (6.15) є звичайними диференціальними рівняннями другого порядку, загальний розв'язок кожного з них утворює двопараметричну сім'ю екстремалей $y = y(x, C_1, C_2)$, з якої можна дістати частинний розв'язок за допомогою двох граничних умов $y(a) = y_1, \quad y(b) = y_2$.

6.6. Зниження порядку рівняння Ейлера

Порядок рівняння (6.15) можна знизити на одиницю у таких випадках.

1. Підінтегральна функція $F(x, y, y')$ не залежить від y' ($F(x, y)$). У цьому випадку $\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$ і (6.15) набуває вигляду $F'_{,y} = 0$. Воно не є диференціальним рівнянням, тому лише у виключних випадках матиме розв'язок.

2. Якщо $F(x, y, y')$ не залежить від y ($F(x, y')$), то $F'_y = 0$. Рівняння

$$(6.15) \text{ набуває вигляду } \frac{d}{dx} F'_{y'} = 0, \text{ тобто } F'_{y'} = c.$$

3. Якщо $F(x, y, y')$ не залежить від x ($F(y, y')$), то $F''_{xy} = 0$ і рівняння (6.15) має вигляд

$$F'_y - F''_{yy'} y' - F''_{y'y'} y'' = 0.$$

Це рівняння інтегрується в загальному вигляді.

Приклад 6.5. Знайти екстремалі функціоналу

$$I[y] = \int_0^1 (2y - 2xy' + (y')^2) dx, \quad y(0) = 1; \quad y(1) = 2$$

Розв'язання. Знайдемо усі похідні, що входять до рівняння Ейлера:

$$F(x, y, y') = 2y - 2xy' + (y')^2; \quad F'_y = 2; \quad F'_{y'} = -2x + 2y';$$

$$\frac{d}{dx} F'_{y'} = \frac{d}{dx} (-2x + 2y') = -2 + 2y''. \text{ Тоді рівняння Ейлера } F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} = 0$$

набуває вигляду: $2 - (-2 + 2y'') = 0; y'' + 2 = 0$.

Розв'яжемо одержане рівняння:

$$y' = \int (-2) dx = -2x + C_1; \quad y = \int (-2x + C_1) dx = -x^2 + C_1 x + C_2.$$

Отже, екстремалами є функції:

$$y = -x^2 + C_1 x + C_2, \text{ де } C_1 \text{ і } C_2 \text{ — довільні сталі.}$$

Знайдемо конкретні значення C_1 і C_2 із крайових умов:

$$\begin{cases} C_2 = 1 \\ -1 + C_1 + C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 1 \\ C_1 = 2 \end{cases}.$$

Отже, допустима екстремаль є $y = -x^2 + 2x + 1$.

Приклад 6.6. Знайти екстремалі функціоналу

$$I[y] = \int_0^1 (x \sin y + \cos y) dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Розв'язання. Функція $F(x, y) = x \sin y + \cos y$ не залежить від y' . Знайдемо похідні:

$$F'_y = x \cos y - \sin y; \quad F'_{y'} = 0.$$

Отже, рівняння Ейлера має вигляд $x \cos y - \sin y = 0$. Його розв'язок :
 $x = \operatorname{tg} y; \quad y = \operatorname{arctg} x$.

Ця рівність задовольняє крайовим умовам

$$y(0) = 0 : \quad \operatorname{arctg} 0 = 0;$$

$$y(1) = \frac{\pi}{4} : \quad \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

і є рівнянням екстремалі функціоналу.

Приклад 6.7. Знайти екстремалі функціоналу

$$I[y] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (9y^2 - (y')^2) dx; \quad y(0) = 2; \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0;$$

Розв'язання. Знайдемо усі похідні, що входять до рівняння Ейлера:

$$F(x, y, y') = 9y^2 - (y')^2; \quad F'_y = 18y; \quad F'_{y'} = -2y'; \quad \frac{d}{dx} F'_{y'} = -2y''.$$

Тоді рівняння Ейлера $F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} = 0$ набуває вигляду

$$18y - (-2y'') = 0, \quad y'' + 9y = 0.$$

Розв'яжемо одержане рівняння: $k^2 + 9 = 0$, $k_{1,2} = \pm 3i$ і екстремаліями служать функції $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$, де C_1, C_2 — довільні сталі.

Знайдемо конкретні значення C_1, C_2 з крайових умов:

$$\begin{cases} C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = 2; & C_1 = 2; \\ C_1 \cos \frac{3\pi}{2} + C_2 \sin \frac{3\pi}{2} = 0; & C_2 = 0. \end{cases}$$

Отже, допустима екстремаль $y = 2 \cos 3x$.

Приклад 6.8. Знайти екстремалі функціоналу

$$I[y] = \int_0^1 (y^2 + (y')^2 + 8y(e^{-x} + 3e^{2x})) dx;$$

$$y(0) = 4; \quad y(1) = 4e^2, \quad y(0) = 4, \quad y(1) = 0.$$

Розв'язання. Знайдемо усі похідні, що входять до рівняння Ейлера:

$$F(x, y, y') = y^2 + (y')^2 + 8y(e^{-x} + 3e^{2x}), \quad F'_y = 2y + 8(e^{-x} + 3e^{2x}),$$

$$F'_{y'} = 2y', \quad \frac{d}{dx} F'_{y'} = 2y''.$$

Тоді рівняння Ейлера $F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} = 0$ набуває вигляду:

$$2y + 8(e^{-x} + 3e^{2x}) - 2y'' = 0, \quad y'' - y = 4e^{-x} + 12e^{2x}.$$

Розв'яжемо одержане рівняння:

1) $y'' - y = 0, \quad k^2 - 1 = 0, \quad k_{1,2} = \pm 1$, отже $y_{одн} = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.

2) Права частина $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, де $f_1(x) = 4e^{-x}$, $f_2(x) = 12e^{2x}$.

3) $y_1^* = Axe^{-x}, \quad y_1^{*\prime} = Ae^{-x} - Axe^{-x}$,

$y_1^{*\prime\prime} = -Ae^{-x} - Ae^{-x} + Axe^{-x} = Axe^{-x} - 2Ae^{-x}$. Підставивши ці вирази у рівняння, отримаємо $Axe^{-x} - 2Ae^{-x} - Axe^{-x} = 4e^{-x}$, звідки $-2A = 4$, тобто $A = -2$. Отже, $y_1^* = -2xe^{-x}$.

4) $y_2^* = Ae^{2x}, \quad y_2^{*\prime} = 2Ae^{2x}, \quad y_2^{*\prime\prime} = 4Ae^{2x}$. Підставивши ці вирази у рівняння, отримаємо $4Ae^{2x} - Ae^{2x} = 12e^{2x}$, звідки $3A = 12$, тобто $A = 4$. Отже, $y_2^* = 4e^{2x}$.

5) Частинний розв'язок $y^* = y_1^* + y_2^*$, тобто $y^* = -2xe^{-x} + 4e^{2x}$.

6) Загальний розв'язок $y = y_{одн} + y^*$, тобто рівняння сім'ї екстремалей має вигляд $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 2xe^{-x} + 4e^{2x}$, де C_1, C_2 — довільні сталі.

7) Знайдемо конкретні значення C_1, C_2 з крайових умов:

$$\begin{cases} C_1 e^0 + C_2 e^0 + 4 = 4 \\ C_1 e + C_2 e^{-1} - 2e^{-1} + 4e^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e + C_2 e^{-1} = 2e^{-1} - 4e^2 \end{cases}$$

$$C_2 = -C_1; \quad C_1 e - C_1 e^{-1} = \frac{2 - 4e^3}{e}; \quad C_1 \cdot \frac{e^2 - 1}{e} = \frac{2 - 4e^3}{e};$$

$$C_1 = \frac{2 - 4e^3}{e^2 - 1}; \quad C_2 = \frac{4e^3 - 2}{e^2 - 1}.$$

Таким чином, рівняння допустимої екстремалі є

$$y = \frac{4e^3 - 2}{e^2 - 1} (e^{-x} - e^x) - 2xe^{-x} + 4e^{2x}.$$

6.7. Деякі висновки та зауваження

Зауваження 1. В багатьох варіаційних задачах існування та характер екстремуму очевидні з геометричного чи фізичного змісту задачі. Якщо при цьому допустима екстремаль є єдиною, то вона і буде розв'язком варіаційної задачі. В загальному випадку для того, щоб встановити наявність і характер екстремуму, треба скористатися достатніми умовами екстремуму (п. 6.4.).

Зауваження 2. *Варіаційною задачею на умовний екстремум* називається задача дослідження на екстремум функціоналу, коли на функції, від вибору яких залежить цей функціонал, окрім крайових, накладено й інші додаткові умови (зв'язки). Такі задачі зводяться до задач на безумовний екстремум (пп.6.4. – 6.6.).

Варіаційне числення, окрім окремих задач і методів їх розв'язування, містить варіаційні принципи, які можна застосовувати до аналізу різноманітних явищ. Суть кожного з них полягає в тому, що з усіх станів, можливих для даної системи, реалізується той, при якому деякий функціонал (свій для кожного принципу) набуває екстремуму (принцип мінімуму потенціальної енергії, принцип найменшої дії тощо).

ЛІТЕРАТУРА

1. Андре Анго. Математика для электро- и радиоинженеров. – М.: Наука, 1967. – 780 с.
2. Вища математика: Збірник задач. У 2-х ч. – Ч.2 / Овчинников П.П., Кропив'янський П.С., Полушкін С.П. та ін. – К.: Техніка, 2003. – 376 с.
3. Вища математика: основні означення, приклади і задачі: Навч. посібник. У 2-х кн. – Кн. 2 / Васильченко І.П., Данилов В.Я., Лобанов А.І., Таран Є.Ю. – К.: Либідь, 1994. – 280 с.
4. Высшая математика: Сборник задач / Гаврильченко Х.И., Кривой А.Ф., Кропивянский П.С. и др. – К.: Вища. шк., 1991. – 455 с.
5. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. – Ч.2: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 1999. – 416 с.
6. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: А.С.К., 2001. – 648 с.
7. Елементи варіаційного числення (конспект лекцій) / Бізюк В.В., Данилевський М.П., Якунін А.В. –Харків: ХДАМГ, 2000. – 80 с.
8. Овчинников П.П., Михайленко В.М. Вища математика: Підручник. У 2-х ч. – Ч.2. – К.: Техніка, 2004. – 792 с.
9. Пак В.В., Носенко Ю.Л. Вища математика: Підручник. – К.: Либідь, 1996. – 440 с.
10. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. В 3-х ч. – Ч.2. – М.: Айрис-пресс, 2002. – 256 с.
11. Реклейтис Г., Рейвиндран А., Регсдел К. Оптимизация в технике. – М.: Мир, 1986. – 243 с.
12. Сборник задач по математике для вузов. Ч. 1. Линейная алгебра и основы математического анализа: Учеб. пособие для вузов / Болгов В.А., Демидович Б.П., Ефимов А.В. и др. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 464 с.
13. Сборник задач по математике для вузов. Специальные курсы / Вуколов Э.А., Ефимов А.В., Земсков В.Н. и др. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. – 608 с.
14. Сборник задач и упражнений по специальным главам высшей математики:

Учеб. пособие для вузов / Кручкович Г.И., Мордасова Г.М., Сулейманова Х.Р. и др. – М.: Высш. школа, 1970. – 512 с.

15. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 736 с.
16. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х т. Т.3. – М.: Наука, 1970. – 656 с.
17. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1969. – 424 с.

Навчальне видання

**Копорулін Володимир Львович
Пасічник Ірина Володимирівна
Моссаковська Людмила Володимирівна
Щербіна Ірина Володимирівна**

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Додаткові розділи

Конспект лекцій

Тем. план 2010, поз. 189

Підписано до друку 29.01.10. Формат 60x84 ¹/₁₆. Папір друк. Друк плоский.
Облік.-вид. арк. 4,88. Умов. друк. арк. 4,81. Тираж 100 пр. Замовлення № 16.

Національна металургійна академія України
49600, м. Дніпропетровськ- 5, пр. Гагаріна, 4

Редакційно-видавничий відділ НМетАУ