

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ**

**Л.П. КАГАДІЙ, І.П. ЗАЄЦЬ,
І.Л. ШИНКОВСЬКА, Л.Ф. СУШКО**

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Збірник задач

Частина I

Затверджено
навчально-методичною комісією НМетАУ
з напрямку підготовки 6.051301 – хімічна технологія
(Протокол № 18 від 19.02.2015 р.)

Дніпропетровськ НМетАУ 2015

УДК 517(07)

Л.П. Кагадій, І.П. Заєць, І.Л. Шинковська, Л.Ф. Сушко. Вища математика. Ч.1.
Навч. посібник / – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2015. – 58 с.

Збірник містить більше 1000 завдань з вищої математики і охоплює матеріал по наступним розділам : «Лінійна та векторна алгебра», «Аналітична геометрія», «Диференціальне та інтегральне числення». Наводиться велика кількість типових завдань з кожної теми, а також різноманітні задачі підвищеної складності або творчого характеру. Рекомендується для викладачів та студентів напряму 6.051301 «Хімічна технологія» та інших напрямів всіх форм навчання.

Бібліогр.: 8 найм.

Друкується за авторською редакцією.

Відповідальний за випуск А.В. Павленко, д-р фіз.-мат. наук, проф.

Рецензенти: О.О. Сдвижкова, д-р тех. наук, проф. (НГУ)
А.В. Сяєв, канд. фіз.-мат. наук, доц. (ДНУ)

© Національна металургійна академія
України, 2015

© Кагадій Л.П., Заєць І.П.,
Шинковська І.Л., Сушко Л.Ф., 2015

ЗМІСТ

ВСТУП.....	6
Глава1. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ.....	7
§1. Матриці.....	7
§2. Визначники.....	7
§3. Системи лінійних рівнянь.....	8
Глава2.ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ.....	10
§1. Лінійні дії над векторами.....	10
§2. Вектори в системі координат.....	10
§3. Скалярний добуток векторів.....	11
§4. Векторний добуток векторів.....	13
§5. Мішаний добуток векторів.....	14
Глава3. ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ.....	15
§1. Пряма на площині.....	15
§2. Криві другого порядку.....	17
§3. Рівняння площини.....	19
§4. Пряма в просторі.....	20
§5. Пряма і площина.....	21
Глава4. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ.....	23
§1. Функція.....	23
§2. Границі послідовності.....	24
§3. Границі функції.....	25
§4. Неперервність функції.....	26
Глава5. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ.....	28
§1. Похідна та диференціал функції. Правила диференціювання.....	28
§2. Геометричний і механічний зміт похідної. Застосування диференціала до наближених обчислень.....	29
§3. Похідні і диференціали вищих порядків.....	30
§4. Правило Лопіталя.....	31
§5. Дослідження функцій та побудова графіків.....	32
Глава 6. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ.....	39
§1. Функції двох змінних.....	39
§2. Похідні і диференціали функцій двох змінних.....	39
§3. Рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні. Екстремум функції двох змінних.....	41

Глава 7. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ.....	44
§1. Невизначений інтеграл	44
§2. Визначений інтеграл.....	46
§3. Невласні інтеграли	47
§4. Застосування визначеного інтегралу до задач геометрії	48
ЛІТЕРАТУРА.....	57

ВСТУП

Запропонований збірник задач охоплює традиційний курс вищої математики в обсязі, передбаченому діючими робочими програмами. Спираючись на власний досвід та враховуючи переваги і недоліки існуючих посібників, автори спробували в деякій мірі створити універсальний задачник, пристосований як для самоосвіти, так і для активного використання під час практичних занять, у тому числі і в якості домашніх завдань.

Матеріал згруповано та систематизовано згідно до робочих планів з дисципліни. Особливу увагу приділено стандартним задачам, достатньої кількості яких так не вистачає викладачам і студентам для успішного здійснення процесу навчання. Також до збірника включено досить багато більш складних завдань та задач, що потребують творчого, нестандартного підходу. До всіх завдань надані відповіді, а деякі супроводжуються вказівками до розв'язання, які для зручності подано наприкінці кожної глави. Посібник дозволяє оперативно формувати загальні та індивідуальні завдання для поточного контролю, діагностувати засвоєння учбового матеріалу, вести контроль за самопідготовкою і прогнозувати результати навчання.

Автори мають надію, що збірник стане в нагоді як викладачам, так і студентам при вивченні курсу вищої математики.

Глава 1.

ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

§1. Матриці

1. Задано матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ та $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Знайти матриці

$$C = 2A - 3B \text{ і } D = B + 2A^T.$$

Знайти добуток матриць:

$$2. \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}. \quad 3. \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}. \quad 4. \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -5 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$$5. \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}. \quad 6. \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}. \quad 7. (5 \ 0 \ -2 \ 3) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

8. Знайти матрицю $AB - BA$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

Знайти обернену матрицю до матриць:

$$9. \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}. \quad 10. \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}. \quad 11. \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad 12. \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язати матричні рівняння:

$$13. \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad 14. X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}.$$

15. Знайти всі матриці другого порядку, квадрати яких дорівнюють одиничній матриці.

§2. Визначники

Обчислити визначники:

$$16. \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}. \quad 17. \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}. \quad 18. \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}. \quad 19. \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}. \quad 20. \begin{vmatrix} a & \sqrt{a} \\ \sqrt{a} & 1 \end{vmatrix}.$$

$$21. \begin{vmatrix} a-2 & a \\ a^2 & a^2+a+4 \end{vmatrix} \quad 22. \begin{vmatrix} \cos \frac{\pi}{12} & \sin \frac{\pi}{6} \\ \cos \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{12} \end{vmatrix} \quad 23. \begin{vmatrix} \log_a \frac{1}{b} & 1 \\ 1 & \log_b a \end{vmatrix}.$$

$$24. \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \quad 25. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \quad 26. \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 14 & 3 & 2 \\ 21 & 3 & 5 \end{vmatrix} \quad 27. \begin{vmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & -10 & 7 \end{vmatrix}.$$

Розв'язати рівняння і нерівності:

$$28. \begin{vmatrix} x & x-2 \\ -5 & x-2 \end{vmatrix} = 0. \quad 29. \begin{vmatrix} x & x+2 \\ x-2 & 2x-5 \end{vmatrix} \leq 0. \quad 30. \begin{vmatrix} x-1 & 2 \\ 3 & \frac{1}{x+2} \end{vmatrix} = 1.$$

$$31. \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad 32. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & -1 & -x \\ -x & 2x & 1 \end{vmatrix} = 4. \quad 33. \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -3x^2 & 5 & x \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} > 0.$$

Обчислити визначники, користуючись їх властивостями:

$$34. \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} \quad 35. \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 13 & -4 & 15 \\ 7 & 0 & -4 \end{vmatrix} \quad 36. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 1 \end{vmatrix} \quad 37. \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

§3. Системи лінійних рівнянь

Розв'язати методом Крамера системи лінійних рівнянь:

$$38. \begin{cases} 3x - 5y = 13, \\ 2x + 7y = 81. \end{cases} \quad 39. \begin{cases} 3x + 2y - 7 = 0, \\ 4x - 5y - 40 = 0. \end{cases} \quad 40. \begin{cases} 5x + 2y = 4, \\ 7x + 4y - 8 = 0. \end{cases}$$

$$41. \begin{cases} 2x - y + z = 2, \\ 3x + 2y + 2z = -2, \\ x - 2y + z = 1. \end{cases} \quad 42. \begin{cases} 2x - y - z - 1 = 0, \\ x - 2y + 3z = 5, \\ x + 3y + 4z = 6. \end{cases} \quad 43. \begin{cases} 2x + y - 5z = -1, \\ x + 2y - 4z = 1, \\ x - y - z = -2. \end{cases}$$

$$44. \begin{cases} x + 2y + 3z = -1, \\ x - 3y - 2z = 3, \\ 2x - y + z = -2. \end{cases} \quad 45. \begin{cases} 2x - y - z = 2, \\ 3x - y + 2z = 5, \\ 4x - 2y - 2z = -3. \end{cases} \quad 46. \begin{cases} x - 4y = -5, \\ 2x - 3y + z = -7, \\ x + 4y + 2z = -1. \end{cases}$$

$$47. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4. \end{cases} \quad 48. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$$

Розв'язати системи лінійних рівнянь матричним методом:

$$49. \begin{cases} x + 2y - z = -3, \\ 3x + 4y + z = 1, \\ 5x + y - 3z = -2. \end{cases} \quad 50. \begin{cases} 3x + 2y + z = 5, \\ 2x - y + z = 6, \\ x + 5y = -3. \end{cases} \quad 51. \begin{cases} 4x + y + 4z + 2 = 0, \\ x + y + 2z + 1 = 0, \\ 2x + y + 2z = 0. \end{cases}$$

$$52. \begin{cases} 2x - y + z = 5, \\ 3x + 4y - 2z = -3, \\ x - 3y + z - 4 = 0. \end{cases} \quad 53. \begin{cases} 3x + z = -2, \\ x + 2y = 3, \\ -x + y + 2z = 5. \end{cases} \quad 54. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7, \\ 7x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 9, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 6. \end{cases}$$

Відповіді

1. $C = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & -10 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{pmatrix} -9 & 13 \\ 15 & 4 \end{pmatrix}$. 3. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 17 \\ 14 & 5 & 8 \end{pmatrix}$. 4. $\begin{pmatrix} -6 \\ 21 \\ -1 \end{pmatrix}$.
5. $\begin{pmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 9 & -27 & 32 \\ 13 & -17 & 26 \end{pmatrix}$. 6. $\begin{pmatrix} 56 \\ 69 \\ 17 \end{pmatrix}$. 7. (29). 8. $\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 12 & -4 \end{pmatrix}$. 9. $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
10. $\begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. 11. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 12. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$. 13. $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.
14. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$. 15. $\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, $a^2 = 1 - bc$. 16. 10. 17. -20. 18. -1.
19. -13. 20. 0. 21. -8. 22. $\frac{1}{2}$. 23. -2. 24. 35. 25. -8. 26. -9. 27. 120.
28. 2; -5. 29. [1; 4]. 30. $-\frac{5}{2}; -2$. 31. 1; 32. 32. $-\frac{1}{2}; 1$. 33. $(-\infty; \infty)$.
34. 4. 35. 40. 36. 54. 37. -160. 38. $x = 16, y = 7$. 39. $x = 5, y = -4$.
40. $x = 0, y = 2$. 41. (2; -1; -3). 42. (1; -1; 2). 43. $x = 2z - 1, y = z + 1, z \in R$.
44. Система розв'язків не має. 45. Система розв'язків не має. 46. (-1; 1; -2).

47. $x_1 = -1, x_2 = -1, x_3 = 0, x_4 = 1$. 48. $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1, x_4 = -2$. 49. $(1; -1; 2)$.
 50. $(2; -1; 1)$. 51. $(1; 2; -2)$. 52. $(1; 0; 3)$. 53. $(-1; 2; 1)$. 54. $x_1 = 1, x_2 = 0,$
 $x_3 = -1, x_4 = 4$.

Глава 2

ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

§1. Лінійні дії над векторами

1. За даними векторами \vec{a} і \vec{b} побудувати вектори:

- 1) $\vec{a} + \vec{b}$; 2) $\vec{a} - \vec{b}$; 3) $\vec{b} - \vec{a}$; 4) $-\vec{a} - \vec{b}$; 5) $2\vec{a} + 3\vec{b}$; 6) $\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$.

2. На трьох некопланарних векторах $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}$ і $\vec{OC} = \vec{c}$ побудовано паралелепіпед. Вказати ті його діагоналі, які відповідно рівні:

- 1) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$; 2) $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$; 3) $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$; 4) $\vec{b} - \vec{a} - \vec{c}$.

3. Три вектори $\vec{BC} = \vec{a}, \vec{AC} = \vec{b}$ і $\vec{AB} = \vec{c}$ є сторонами трикутника. Через вектори \vec{a}, \vec{b} і \vec{c} виразити вектори, що збігаються з медіанами трикутника \vec{AM}, \vec{BN} і \vec{CP} .

4. Дано: $|\vec{a}| = 13, |\vec{b}| = 19$ і $|\vec{a} + \vec{b}| = 24$. Обчислити $|\vec{a} - \vec{b}|$.

5. Визначити $|\vec{a} + \vec{b}|$ і $|\vec{a} - \vec{b}|$, якщо відомо, що вектори \vec{a} і \vec{b} взаємно перпендикулярні, причому $|\vec{a}| = 5$ і $|\vec{b}| = 12$.

6. Вектори \vec{a} і \vec{b} утворюють кут $\varphi = 60^\circ, |\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 8$. Знайти $|\vec{a} + \vec{b}|$ і $|\vec{a} - \vec{b}|$.

7. Три сили \vec{F}_1, \vec{F}_2 і \vec{F}_3 прикладені до однієї точки і мають взаємно перпендикулярні напрями. Визначити модуль їх рівнодійної, якщо $|\vec{F}_1| = 10H, |\vec{F}_2| = 11H$ і $|\vec{F}_3| = 2H$.

§2. Вектори в системі координат

8. У прямокутній системі координат побудувати точки $A(-2; 3; 5)$ і $B(1; 1; -3)$. Знайти координати вектора \vec{AB} , його довжину та напрямні косинуси.

9. Знайти координати точки K , з якою збігається кінець вектора $\overline{MK} = (3; -1; 4)$, якщо $M(1; 2; -3)$.

10. Визначити початок вектора $\overline{a} = (2; -3; -1)$, якщо його кінець збігається з точкою $(1; -1; 2)$.

11. Дано дві координати вектора $a_x = 4$, $a_y = -12$. Визначити його третю координату a_z , якщо $|\overline{a}| = 13$.

12. Вектор \overline{a} утворює з координатними осями Ox і Oy кути $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 120^\circ$. Знайти його координати, якщо $|\overline{a}| = 2$.

13. Дано два вектори $\overline{a} = (4; -1; 7)$ і $\overline{b} = (-1; 2; 1)$. Знайти проєкції на координатні осі векторів:

1) $\overline{a} - \overline{b}$; 2) $\overline{a} + 3\overline{b}$; 3) $3\overline{a} - 4\overline{b}$; 4) $-\overline{a} - 2\overline{b} + 5(\overline{a} + \overline{b})$.

14. Перевірити колінеарність векторів $\overline{a} = (3; -2; 1)$ і $\overline{b} = (-9; 6; -3)$. Який з них довший і в скільки разів?

15. При яких значеннях α і β вектори $\overline{c} = (-6; \beta; 2)$ та $\overline{d} = (\alpha; 4; -1)$ будуть колінеарні?

16. Дано точки $A(5; 0; 2)$, $B(-3; 3; -1)$, $C(1; 2; -3)$, $D(5; -4; 3)$. Чи можуть вони бути вершинами трапеції?

17. Знайти довжини медіан трикутника, знаючи координати його вершин $A(3; -2; 4)$, $B(5; 2; 2)$, $C(-1; 4; 0)$.

18. Дано три вершини паралелограма $ABCD$: $A(4; -4; 2)$, $B(6; -2; 0)$, $C(-4; 3; 1)$. Знайти координати четвертої вершини D .

19. Відрізок з кінцями в точках $C(1; -3; 2)$ і $D(4; 0; 5)$ розділений на три рівні частини. Знайти координати точок поділу.

§3. Скалярний добуток двох векторів

20. Вектори \overline{a} і \overline{b} , які мають довжини $|\overline{a}| = 4$ та $|\overline{b}| = 3$, утворюють між собою кут $\varphi = \frac{2}{3}\pi$. Обчислити:

1) $\overline{a} \cdot \overline{b}$; 2) \overline{a}^2 ; 3) $(\overline{a} + \overline{b})^2$; 4) $(3\overline{b} - 2\overline{a}) \cdot (\overline{b} + 2\overline{a})$.

21. Знайти скалярний добуток векторів \bar{a} і \bar{b} , якщо $\bar{a} = 3\bar{p} - 2\bar{q}$ і $\bar{b} = \bar{p} + 4\bar{q}$, де \bar{p} і \bar{q} – одиничні взаємно перпендикулярні вектори.

22. Визначити, при якому значенні α вектори $\bar{a}_1 + \alpha\bar{a}_2$ і $\bar{a}_1 - \alpha\bar{a}_2$ будуть перпендикулярними, якщо $|\bar{a}_1| = 3$, $|\bar{a}_2| = 5$.

23. Для векторів $\bar{c} = (2; -1; -2)$ і $\bar{d} = (12; -6; 4)$ знайти:

1) $\bar{c} \cdot \bar{d}$; 2) $(\bar{c} - \bar{d})^2$; 3) $2\bar{c} \cdot (\bar{d} - 3\bar{c})$.

24. Знайти косинус кута між векторами \bar{a} і \bar{b} , якщо:

1) $\bar{a} = (1; -2; 2)$, $\bar{b} = (-6; 4; 12)$; 2) $\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$, $\bar{b} = 2\bar{i} + 4\bar{j} + 4\bar{k}$.

25. Дано вершини чотирикутника $A(2; -1; 2)$, $B(2; 5; 0)$, $C(-3; 2; 1)$ і $D(-4; -4; 3)$. Довести, що його діагоналі AC і BD перпендикулярні.

26. При якому значенні α вектори $\bar{m} = \alpha\bar{i} - 2\bar{j} + 2\bar{k}$ і $\bar{n} = \bar{i} + 2\bar{j} - \alpha\bar{k}$ перпендикулярні ?

27. В трикутнику ABC задано координати вершин: $A(0; -1; 4)$, $B(-3; -1; 0)$, $C(4; -1; 1)$. Визначити його внутрішній кут при вершині B .

28. Знайти кут між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a} = (2; 1; 0)$ та $\bar{b} = (0; -2; 1)$.

29. Знайти проекцію вектора $\bar{a} = (5; 2; 5)$ на вектор $\bar{b} = (2; -1; 2)$.

30. Дано координати вершин трикутника $A(4; 1; 0)$, $B(2; 2; 1)$ і $C(6; 3; 1)$. Знайти проекцію вектора \overline{AB} на вектор \overline{AC} .

31. Дано три вектори: $\bar{a} = -4\bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}$, $\bar{b} = 2\bar{i} + 10\bar{j}$ і $\bar{c} = 2\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$. Обчислити $np_{\bar{c}}(3\bar{a} - 2\bar{b})$.

32. Обчислити довжину діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a} = 5\bar{m} + 2\bar{n}$ і $\bar{b} = \bar{m} - 3\bar{n}$, якщо $|\bar{m}| = 4\sqrt{2}$, $|\bar{n}| = 6$ і $(\bar{m}, \bar{n}) = \frac{\pi}{4}$.

33. Знайти вектор \bar{d} , перпендикулярний до векторів $\bar{a} = (2; 3; -1)$ і $\bar{b} = (1; -2; 3)$, що задовольняє умову: $\bar{d} \cdot \bar{c} = -6$, де $\bar{c} = (2; -1; 1)$.

34. На матеріальну точку діють дві сили $\bar{F}_1 = (1; 1; 3)$ і $\bar{F}_2 = (1; 1; -2)$. Знайти роботу, яку виконує рівнодійна цих сил при переміщенні точки із положення $A(2; -3; 5)$ в положення $B(4; 1; -1)$.

35. Який кут створюють одиничні вектори \bar{m} та \bar{n} , якщо відомо, що вектори $\bar{a} = \bar{m} + 2\bar{n}$ та $\bar{b} = 5\bar{m} - 4\bar{n}$ перпендикулярні?

§4. Векторний добуток векторів

36. Чому дорівнює модуль векторного добутку векторів \bar{a} і \bar{b} , якщо $|\bar{a}| = \sqrt{3}$, $|\bar{b}| = 4$, $(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{\pi}{3}$?

37. Обчислити $(2\bar{a} + \bar{b}) \times (\bar{a} + 2\bar{b})$, якщо $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 3$, $(\bar{a}, \bar{b}) = 30^\circ$.

38. При якому значенні α вектори $\bar{m} = \alpha\bar{a} - 4\bar{b}$ та $\bar{n} = 2\bar{a} + 5\bar{b}$ колінеарні?

39. Знайти векторний добуток $\bar{a} \times \bar{b}$:

1) $\bar{a} = 2\bar{i} + 11\bar{j} - 10\bar{k}$ і $\bar{b} = 3\bar{i} - 2\bar{k}$; 2) $\bar{a} = (1; 2; -2)$ і $\bar{b} = (8; 6; 4)$.

40. Дано вектори $\bar{a} = (3; -1; 2)$ і $\bar{b} = (1; 2; -1)$. Перевірити, чи виконується рівність $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$.

41. Дано точки $A(2; -1; 2)$, $B(1; 2; -1)$ і $C(3; 2; 1)$. Знайти векторний добуток $(\overline{BC} - 2\overline{CA}) \times \overline{CB}$.

42. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах \bar{a} і \bar{b} :

1) $\bar{a} = (-5; -6; 1)$ і $\bar{b} = (3; 7; 0)$; 2) $\bar{a} = 8\bar{i} + 4\bar{j} + \bar{k}$ і $\bar{b} = 2\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$.

43. Трикутник ABC заданий координатами вершин. Обчислити його площу та довжину висоти BD , якщо:

1) $A(4; 2; 3)$, $B(5; 1; 2)$, $C(6; 5; 8)$; 2) $A(0; -1; 3)$, $B(-5; 0; 4)$, $C(1; 4; 3)$.

44. Площа трикутника ABC дорівнює $\frac{\sqrt{35}}{2}$. Дві його вершини лежать у точках $A(2; -1; 3)$ і $B(1; 2; 1)$. Які координати має вершина C , якщо відомо, що вона лежить на осі Oz ?

45. Обчислити площу паралелограма, сторони якого співпадають з векторами $\bar{a} = \bar{m} + 2\bar{n}$ та $\bar{b} = \bar{m} - 3\bar{n}$, якщо $|\bar{m}| = 5$, $|\bar{n}| = 3$, і кут між векторами \bar{m} та \bar{n} дорівнює 30° .

46. Дано: $|\bar{a}| = 10$, $|\bar{b}| = 2$, $\bar{a} \cdot \bar{b} = 12$. Обчислити $|\bar{a} \times \bar{b}|$.

47. Дано: $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 26$ і $|\bar{a} \times \bar{b}| = 72$. Обчислити $\bar{a} \cdot \bar{b}$.

48. Довести тотожність $(\bar{a} \times \bar{b})^2 + (\bar{a} \cdot \bar{b})^2 = \bar{a}^2 \bar{b}^2$.

49. Спростити вирази:

1) $(3\bar{j} \times 5\bar{k}) \cdot (\bar{j} - \bar{i})$; 2) $(3\bar{i} \times 2\bar{i} + \bar{k} \times 2\bar{i}) \cdot (\bar{j} - 2\bar{i})$;

3) $(2\bar{i} + \bar{j} - 3\bar{k}) \times (\bar{k} - 3\bar{j})$; 4) $2\bar{i} \cdot (\bar{j} \times \bar{k}) + 3\bar{j} \cdot (\bar{i} \times \bar{k}) + \bar{k} \cdot (\bar{i} \times \bar{j})$;

5) $\bar{i} \times (\bar{j} + \bar{k}) - \bar{j} \times (\bar{i} + \bar{k}) + \bar{k} \times (\bar{i} + \bar{j} + \bar{k})$.

§5. Мішаний добуток векторів

50. Обчислити мішані добутки $\bar{a} \bar{b} \bar{c}$ заданих векторів:

1) $\bar{a} = \bar{i} - 3\bar{j}$, $\bar{b} = \bar{i} - \bar{k}$, $\bar{c} = \bar{i} - 4\bar{j} + \bar{k}$;

2) $\bar{a} = (1; 2; 3)$, $\bar{b} = (3; 1; 2)$, $\bar{c} = (2; 3; 1)$.

51. Чи компланарні вектори \bar{a} , \bar{b} і \bar{c} , якщо:

1) $\bar{a} = (3; 2; 2)$, $\bar{b} = (1; -1; 3)$, $\bar{c} = (1; 9; -11)$;

2) $\bar{a} = (2; 3; -1)$, $\bar{b} = (1; -1; 3)$, $\bar{c} = (1; 9; -11)$?

52. При якому значенні параметра λ вектори $\bar{a} = (3; 2; -1)$, $\bar{b} = (0; 1; 1)$ та $\bar{c} = (-2; \lambda; 2)$ будуть компланарними ?

53. Чому дорівнює об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\bar{a} = (2; 1; 3)$, $\bar{b} = 3\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$ і $\bar{c} = \bar{i} + 3\bar{j} + \bar{k}$?

54. Довести, що точки $A(2; 3; -1)$, $B(1; 2; 5)$, $C(0; 3; 1)$ і $D(3; 2; 3)$ лежать в одній площині.

55. Піраміда $ABCD$ визначена координатами її вершин: $A(3; -2; 5)$, $B(1; 3; 1)$, $C(-1; -1; 3)$, $D(4; 3; 4)$. Знайти об'єм піраміди.

56. Знайти довжину висоти DP піраміди $ABCD$, якщо $A(1; 2; 1)$, $B(3; 0; -2)$, $C(5; 2; 7)$ і $D(-6; -5; 8)$.

57. Три вершини піраміди – це точки $A(2; -3; 5)$, $B(3; 2; 4)$, $C(-2; -2; 3)$. Об'єм цієї піраміди дорівнює 6. Знайти четверту вершину піраміди, якщо відомо, що вона належить осі Ox .

58. Обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\bar{a} = 3\bar{m} + 5\bar{n}$, $\bar{b} = \bar{m} - 2\bar{n}$ і $\bar{c} = 2\bar{m} + 7\bar{n}$, де $|\bar{m}| = \frac{1}{2}$, $|\bar{n}| = 3$, $(\bar{m}, \bar{n}) = \frac{3\pi}{4}$.

Відповіді

3. $\overline{AM} = \bar{c} + \frac{1}{2}\bar{a}$, $\overline{BN} = \bar{a} + \frac{1}{2}\bar{b}$, $\overline{CP} = \bar{b} + \frac{1}{2}\bar{c}$. 4. 22. 5. $|\bar{a} + \bar{b}| = |\bar{a} - \bar{b}| = 13$.
6. $\sqrt{129}$. 7. 15. 8. $\overline{AB} = (3; -2; -8)$, $|\overline{AB}| = \sqrt{77}$, $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{77}}$, $\cos \beta = -\frac{2}{\sqrt{77}}$,
 $\cos \gamma = -\frac{8}{\sqrt{77}}$. 9. $K(4; 1; 1)$. 10. $(-1; 2; 3)$. 11. ± 3 . 12. $\bar{a} = (1; -1; \sqrt{2})$.
13. 1) $(5; -3; 6)$; 2) $(1; 5; 10)$; 3) $(16; -11; 17)$. 14. $\bar{b} = -3\bar{a}$. 15. $\alpha = 3$.
16. Можуть. 17. $\sqrt{35}, \sqrt{17}$ і $5\sqrt{2}$. 18. $(-2; -5; -1)$. 19. $(2; -1; 3)$ і $(3; -1; 4)$.
20. 1) -6 ; 2) 16 ; 3) 13 ; 4) -61 . 21. -5 . 22. $\pm \frac{3}{5}$. 23. 1) 22 ; 2) 162 ; 3) -10 .
24. 1) $\frac{5}{21}$; 2) $\frac{4}{9}$. 26. -4 . 27. 45° . 28. 90° . 29. 6 . 30. $-\frac{1}{3}$. 31. -22 . 32. 30
і $2\sqrt{593}$. 33. $(-3; 3; 3)$. 34. 31 . 35. $\frac{\pi}{3}$. 36. 6 . 37. 6 . 38. $-\frac{8}{5}$. 39.
- 1) $38\bar{i} - 26\bar{j} - 21\bar{k}$; 2) $(20; -20; -10)$. 40. Так. 41. $(-12; 8; 12)$. 42. 1) $\sqrt{347}$;
2) $18\sqrt{2}$. 43. 1) $S = \frac{1}{2}\sqrt{78}$, $h = \sqrt{\frac{39}{19}}$; 2) $S = \frac{1}{2}\sqrt{702}$, $h = \sqrt{7}$. 44. $C(0; 0; 2)$.
45. $37,5$. 46. 16 . 47. ± 30 . 49. 1) -15 ; 2) 2 ; 3) $-8\bar{i} - 2\bar{j} - 6\bar{k}$; 4) 0 ; 5) $-2\bar{i} + 2\bar{k}$.
50. 1) 2 ; 2) 18 . 51. 1) Так; 2) ні. 52. $\lambda = 0$. 53. 13 . 54. $\overline{AB} \times \overline{AC} \cdot \overline{AD} = 0$.
55. 6 . 56. 11 . 57. $D(0; 2; 1)$. 58. Вектори компланарні, $V = 0$.

Глава 3

ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

§1. Пряма на площині

1. Побудувати прямі:

- 1) $2x - 3y - 6 = 0$; 2) $2x + 3y = 0$; 3) $\frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 1$; 4) $2y - 7 = 0$; 5) $x + 5 = 0$.

2. Записати рівняння прямої, знайти її кутовий коефіцієнт та відстань до початку координат, якщо вона

- 1) проходить через точку $M(-1; 2)$ і має нормальний вектор $\bar{n}(2; 5)$;
2) задана точкою $N(3; -1)$ і напрямним вектором $\bar{s}(-2; 3)$;

- 3) проходить через точки $A(4;1)$ і $B(-4;3)$;
4) відтинає на осях Ox і Oy відповідно 3 і -5 одиниць;
5) проходить через точку $K(4;-3)$ і утворює з додатнім напрямом осі абсцис кут $\varphi = 45^\circ$.

3. Задано пряму $y - 2x - 1 = 0$ і точку $M(-1;2)$. Треба:

1) написати рівняння прямої, що проходить через точку M перпендикулярно до заданої прямої;

2) написати рівняння прямої, що проходить через точку M паралельно заданій прямій;

3) написати рівняння прямої, що проходить через точку M під кутом 135° до заданої прямої.

4. Знайти площу трикутника, обмеженого осями координат та прямою $2x - 5y + 20 = 0$.

5. Чому дорівнює кут між прямими $3x + y - 7 = 0$ та $\frac{x+2}{1} = \frac{y+3}{2}$?

6. Знайти відстань від точки $M(1;2)$ до прямої $6x + 8y - 35 = 0$.

7. В трикутнику з вершинами $A(-4;2)$, $B(2;-5)$ і $C(6;0)$ знайти:

1) рівняння сторін AB , AC і BC ;

2) величину кута A ;

3) рівняння медіани BM ;

4) рівняння і довжину висоти AP .

8. Знайти координати точки перетину прямих $x + y - 7 = 0$ та AB , якщо $A(2;-6)$ і $B(3;4)$.

9. Одна з вершин квадрата співпадає з початком координат, а діагоналі перетинаються в точці $(-1;1)$. Скласти рівняння сторін квадрата.

10. Знайти відстань між прямими $3x - 5y + 1 = 0$ та $6x - 10y - 7 = 0$, якщо вони паралельні, або кут між ними, якщо прямі перетинаються.

11. Записати рівняння прямих, які проходять через точку $A(2;7)$ та створюють кут 45° з прямою AB , якщо $A(-1;7)$ і $B(8;-2)$.

12. Знайти координати точки P , яка симетрична точці $S(-5;13)$ відносно прямої $2x - 3y - 3 = 0$.

13. Записати рівняння прямих, паралельних до прямої $5x + 12y + 20 = 0$ та віддалених від неї на відстані двох одиниць.

§2. Криві другого порядку

14. Яку криву визначає кожне з рівнянь:

1) $7x^2 + 7y^2 - 2x - 7y - 1 = 0$; 2) $2x^2 + 3y^2 - 6x - 12 = 0$;

3) $x^2 - 3y + 5 = 0$; 4) $x^2 - 4y^2 - 8y + 1 = 0$; 5) $3x + 2y^2 + y - 16 = 0$?

15. Скласти рівняння кола, якщо:

1) центром кола є точка $C(2; -3)$, а радіус дорівнює 7 одиниць;

2) центром кола є точка $C(6; -8)$ і коло проходить через початок координат;

3) точки $A(3; 2)$ і $B(-1; 6)$ є кінцями одного з діаметрів кола.

16. Знайти центр та радіус кола $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$.

17. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис, симетрично щодо початку координат, якщо:

1) його півосі дорівнюють 4 і 2 одиниці;

2) відстань між фокусами $2c = 10$, більша вісь $2a = 12$;

3) більша вісь $2a = 20$, а ексцентриситет $\varepsilon = 0,8$;

4) менша вісь $2b = 6$, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

5) сума осей дорівнює 16, відстань між фокусами $2c = 8$.

18. Записати рівняння еліпса, що проходить через точки $(3; 2)$ та $\left(2; \sqrt{\frac{32}{3}}\right)$ і фокуси якого лежать на осі абсцис, симетрично щодо початку координат.

19. Побудувати еліпс $25x^2 + 169y^2 - 4225 = 0$. Визначити довжину осей, координати фокусів та ексцентриситет.

20. Земля рухається по еліпсу, в одному фокусі якого знаходиться Сонце. Найменша відстань від Землі до Сонця дорівнює 147,5 млн. км, найбільша – 152 млн. км, знайти більшу напіввісь та ексцентриситет орбіти Землі.

21. Побудувати гіперболу $16x^2 - 9y^2 - 144 = 0$. Знайти півосі, координати фокусів, ексцентриситет, рівняння асимптот.

22. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розміщені на осі абсцис, симетрично щодо початку координат, якщо:

1) її осі $2a = 10$ і $2b = 8$;

2) відстань між фокусами $2c = 10$ і вісь $2b = 8$;

3) відстань між фокусами $2c = 6$ і ексцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{2}$;

4) вісь $2a = 16$ і ексцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{4}$;

5) рівняння асимптот $y = \pm \frac{4}{3}x$, а відстань між фокусами $2c = 20$.

23. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розміщені на осі ординат, симетрично щодо початку координат, якщо її осі $2a = 16$ і $2b = 36$. Побудувати гіперболу та знайти її ексцентриситет.

24. На якій відстані знаходяться фокуси гіперболи $x^2 - 8y^2 = 8$ від її асимптот?

25. Знайти координати фокуса і рівняння директриси параболи $y^2 = 8x$. Побудувати криву.

26. Скласти канонічне рівняння параболи, якщо:

1) відстань від фокуса, що лежить на осі Ox , до вершини дорівнює 4;

2) відстань від фокуса, що лежить на осі Oy , до директриси дорівнює 6;

3) вона симетрична відносно осі абсцис і містить точку $M(1;2)$.

27. Дослідити взаємне розміщення параболи $y^2 = x$ та прямої $x + y - 2 = 0$.

28. Записати канонічні рівняння кривих та побудувати їх:

1) $x^2 + y^2 - 14x - 2y + 41 = 0$; 2) $y^2 - 2x - 18y + 75 = 0$;

3) $5x^2 - 30x + 9y^2 + 18y + 9 = 0$; 4) $x^2 + 4x + 10y + 54 = 0$;

5) $9x^2 - 6x - 16y^2 + 8y - 144 = 0$.

29. Визначити траєкторію точки M , що, рухаючись, залишається втричі ближчою до точки $F(1;0)$, ніж до прямої $x - 9 = 0$.

30. Скласти рівняння геометричного місця точок, які однаково віддалені від точки $A(-2;1)$ та від прямої $x - 3 = 0$. Побудувати лінію.

31. Визначити траєкторію точки M , що при переміщенні залишається вдвічі ближчою до прямої $y = 1$, ніж до точки $A(0;4)$.

§3. Рівняння площини

32. Побудувати площини:

1) $4x + y + 2z - 8 = 0$; 2) $y + 2x - 6 = 0$; 3) $y = -2$; 4) $y - 2z = 4$.

33. З'ясувати, які з точок $A(4;1;2)$, $B(3;0;4)$ та $C(1;-2;2)$ належать площині $3x - 5y + 2z - 17 = 0$.

34. Записати рівняння площини, яка проходить:

1) через точку $A(3;-1;2)$ перпендикулярно до вектора \overline{OA} ;

2) через точки $M(1;-3;-4)$ і $N(-2;1;-3)$ паралельно осі Oy ;

3) через вісь Ox і точку $D(-1;1;-3)$;

4) через точку $A(-3;-2;2)$ паралельно площині Oyz .

35. Скласти рівняння площини, яка:

1) відтинає на осях Ox , Oy та Oz відрізки 3, -2 та 5 відповідно;

2) проходить через точку $B(-1;2;3)$ і відтинає від осей Ox та Oy відрізки $a = 2$, $b = -1$;

3) проходить через точку $M(0;1;2)$ паралельно векторам $\bar{a}_1(2;0;1)$ та $\bar{a}_2(1;1;0)$;

4) проходить через точки $M_1(1;1;1)$ і $M_2(2;3;-1)$ паралельно вектору $\bar{a}(0;-1;2)$;

5) містить точку $(1;0;-1)$ і перпендикулярна площинам $3x - 2y + z = 0$ та $x + 2y - 1 = 0$.

36. Записати рівняння площини, що проходить через точку $M(0;3;-2)$ паралельно до площини $x - 2y + 4z - 3 = 0$.

37. З'ясувати, чи будуть паралельними площини $4x - 2y + 2z - 1 = 0$ та $2x - y + z + 3 = 0$.

38. Чи перпендикулярні площини $3x - 2y + z = 0$ та $x - 4y - 2z + 3 = 0$?

39. Знайти кут між площинами $x - y - 12 = 0$ та $y - z - 7 = 0$.

40. Обчислити відстань від початку координат до площини, що проходить через точки $M(1;-1;0)$, $N(2;1;-1)$ і $P(1;-1;-2)$.

41. Чи можна провести площину через точки $A(1;-1;1)$, $B(0;2;4)$, $C(-1;0;5)$ і $D(4;0;-3)$?

§4. Пряма в просторі

42. Скласти канонічні та параметричні рівняння прямої:

$$1) \begin{cases} 2x - y + 2z - 4 = 0, \\ x + 2y - z - 1 = 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x + 2y - 3z - 5 = 0, \\ 2x - y + z + 2 = 0. \end{cases}$$

43. Скласти рівняння прямої, що проходить через дві точки M_1 і M_2 , якщо: 1) $M_1(1;-2;1)$, $M_2(3;1;-1)$; 2) $M_1(3;-1;0)$, $M_2(1;0;-3)$.

44. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку $A(1;-5;3)$ і утворює з осями координат кути відповідно $60^\circ, 45^\circ$ і 120° .

45. Чи паралельні прямі $\begin{cases} 2x + 2y - z - 10 = 0, \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$, та $\frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4}$?

46. Довести, що пряма $\frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{5}$ перпендикулярна прямій $\begin{cases} x = 3 + 4t, \\ y = -1 + 6t, \\ z = 2t. \end{cases}$

47. Написати канонічні рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(1;0;4)$ паралельно:

1) вектору $\vec{s}(-1;6;2)$; 2) прямій $\frac{x-1}{5} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{-3}$; 3) осі Ox .

48. У площині Oxz знайти пряму що проходить через початок координат перпендикулярно до прямої $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{1}$.

49. Скласти рівняння загального перпендикуляра до двох прямих:

$$\begin{cases} x = 7 + t, \\ y = 3 + 2t, \\ z = 9 - t \end{cases} \quad \text{та} \quad \frac{x+1}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}.$$

50. Чому дорівнює кут між прямими $\frac{x-3}{-3} = y+5 = \frac{z-1}{4}$ та $\begin{cases} x = -t+1 \\ y = 7 \\ z = 2t-3 \end{cases}$?

51. Чи перетинаються прямі $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{3} = 5-z$ та $\frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{5}$?

§5. Пряма і площина

52. Задано пряму $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{0}$ і точку $M(0; -1; 2)$. Треба скласти

рівняння площини, що проходить:

- 1) через задану пряму і точку M ;
- 2) через точку M перпендикулярно до прямої.

53. Задано площину $x - y - z + 1 = 0$ і пряму $\frac{x-1}{0} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$. Треба:

- 1) обчислити кут між прямою і площиною;
- 2) знайти координати точки перетину прямої і площини;
- 3) скласти рівняння площини, що проходить через пряму перпендикулярно до даної площини.

54. При якому значенні коефіцієнта A площина $Ax + 2y - z + 5 = 0$ паралельна прямій $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{2}$?

55. При яких значеннях коефіцієнтів A і B площина $Ax + By + 9x - 1 = 0$ перпендикулярна до прямої $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{6} = \frac{z-3}{3}$?

56. Чи лежать прямі $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4}$ і $\frac{x-7}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-2}$ в одній площині? Якщо так, скласти рівняння цієї площини.

57. Через точку $M(1; -2; 1)$ провести пряму, паралельно площинам $x + y + z + 1 = 0$ і $x - y - z + 2 = 0$.

58. Знайти точку перетину прямої $\begin{cases} x = -3 + 5t \\ y = 2 + t \\ z = -1 - 4t \end{cases}$ та площини ABC , якщо

$A(0; 1; -3)$, $B(0; 3; -4)$ і $C(1; -2; 1)$.

59. Записати рівняння площини, яка проходить через пряму $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{-1}$ паралельно до прямої AB , якщо $A(-2; 1; -2)$ та $B(-1; 4; 3)$.

60. Знайти проекцію точки $M(-5; 7; -4)$ на пряму $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{-1}$.

61. Записати рівняння та знайти довжину перпендикуляра, проведеного з точки $M(7; 5; -3)$ до прямої AB , якщо $A(1; 0; -2)$, $B(3; 3; 1)$.

62. Знайти відстань між прямими:

$$1) \begin{cases} 2x + 2y - z - 10 = 0, \\ x - y - z - 22 = 0 \end{cases} ; \quad i \quad \frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4};$$

$$2) \frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1} ; \quad i \quad \frac{x+2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-3}{-1}.$$

Відповіді

2. 1) $2x + 5y - 8 = 0$; 2) $3x + 2y - 7 = 0$; 3) $x + 4y - 8 = 0$; 4) $5x - 3y - 15 = 0$;

5) $x - y - 7 = 0$. 3. 1) $x + 2y - 3 = 0$; 2) $2x - y + 4 = 0$; 3) $3x + y + 1 = 0$. 4. 20.

5. $\varphi = \arctg \frac{1}{7}$. 6. 1,3. 7. 1) $AB: 7x + 6y + 16 = 0$, $AC: x + 5y - 6 = 0$,

$BC: 5x - 4y - 30 = 0$; 2) $\angle A = \arctg \frac{58}{11}$; 3) $6x + y - 7 = 0$; 4) $|AP| = \frac{58}{\sqrt{41}}$,

$AP: 4x + 5y + 6 = 0$. 8. (3;4). 9. $x = 0, x = -2, y = 0, y = 2$. 10. $d = \frac{9}{\sqrt{136}}$.

11. $y - 7 = 0$. 12. (11; -11). 13. $5x + 12y - 6 = 0$; $5x + 12y + 46 = 0$. 14. 1) коло;

2) еліпс; 3) парабола; 4) гіпербола; 5) парабола. 15. 1) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 49$;

2) $(x-6)^2 + (y+8)^2 = 100$; 3) $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 8$. 16. $C(2; -3), R = 4$.

17. 1) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$; 2) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{11} = 1$; 3) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$; 4) $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$; 5) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

18. $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1$. 19. $2a = 26, 2b = 10; F_1(0; -12), F_2(0; 12); \varepsilon = \frac{5}{3}$. 20. $a = 150$ млн.;

$\varepsilon = \frac{1}{60}$. 21. $a = 3, b = 4; F_1(-5; 0), F_2(5; 0); \varepsilon = \frac{5}{3}; y = \pm \frac{4}{3}x$. 22. 1) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$;

2) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$; 3) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$; 4) $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$; 5) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$. 23. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$.

24. 1. 25. $F(2; 0), x = -2$. 26. 1) $y^2 = 16x$; 2) $x^2 = 24y$; 3) $y^2 = 4x$. 27. Пере-

тинаються в точках (4; -2) і (1; 1). 28. 1) коло $(x-7)^2 + (y-1)^2 = 9$;

2) парабола $(y-9)^2 = 2(x+3)$; 3) еліпс $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{5} = 1$; 4) парабола

$(x+2)^2 = -10(y+5)$; 5) гіпербола $\frac{(x-\frac{1}{3})^2}{16} - \frac{(y-\frac{1}{4})^2}{9} = 1$. 29. еліпс

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1. \quad 30. (y-1)^2 = -10\left(x - \frac{1}{2}\right). \quad 31. \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1. \quad 33. \text{Точки } B \text{ і } C.$$

$$34. 1) 3x - y + 2z - 14 = 0; \quad 2) x + 3z + 11 = 0; \quad 3) 3y + z = 0; \quad 4) x + 3 = 0. \quad 35.$$

$$1) 10x - 15y + 6z - 30 = 0; \quad 2) 3x - 6y + 7z - 6 = 0; \quad 3) x - y - 2z + 5 = 0; \quad 4) 2x - 2y - z + 1 = 0; \quad 5) 2x - y - 8z - 6 = 0. \quad 36. x - 2y + 4z + 14 = 0. \quad 37. \text{Так.}$$

$$38. \text{Ні.} \quad 39. \varphi = 60^\circ. \quad 40. \frac{3}{\sqrt{5}}. \quad 41. \text{Ні. Вказівка: перевірити компланарність}$$

$$\text{векторів } \overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}. \quad 42. 1) \frac{x}{-3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}, \quad x = -3t, y = 2 + 4t, z = 3 + 5t;$$

$$2) \frac{x}{1} = \frac{y-1}{7} = \frac{z+1}{5}, \quad x = t, y = 1 + 7t, z = -1 + 5t. \quad 43. 1) \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{-2};$$

$$2) \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}. \quad 44. \frac{x-1}{1} = \frac{y+5}{\sqrt{2}} = \frac{z-3}{-1}. \quad 45. \text{Так.} \quad 46. \bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2 = 0.$$

$$47. 1) \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{6} = \frac{z-4}{2}; \quad 2) \frac{x-1}{5} = \frac{y}{2} = \frac{z-4}{-3}; \quad 3) \frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z-4}{0}. \quad 48. \frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{-3}.$$

$$49. \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{4}. \quad 50. \arccos \frac{11}{\sqrt{130}}. \quad 51. \text{Ні. Прямі мимобіжні.} \quad 52.$$

$$1) x - 2y + z = 0; \quad 2) 2x + y - 1 = 0. \quad 53. 1) \varphi = \arccos \frac{1}{\sqrt{15}}; \quad 2) M(1; -6; -4); \quad 3)$$

$$3x - y + 2z - 1 = 0. \quad 54. A = -2. \quad 55. A = -6, B = -18. \quad 56. \text{Так. Прямі лежать в}$$

$$\text{площині } 2x - 16y - 13z + 31 = 0. \quad 57. \frac{x-1}{0} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{-1}. \quad 58. M\left(\frac{13}{4}; \frac{13}{4}; 4\right).$$

$$59. 15x - 7y + 9z - 3 = 0. \quad 60. M(1; 4; -1). \quad 61. \frac{x-7}{-2} = \frac{y-5}{1} = \frac{z+3}{-1}, \quad d = \sqrt{101}.$$

$$62. 1) 25. \text{Вказівка: взяти точку на одній із прямих і знайти відстань від неї до іншої прямої.} \quad 2) \frac{22}{\sqrt{59}}.$$

Глава 4

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

§1. Функція

$$1. \text{Дано: } f(x) = 3x^2 - 2x - 1. \text{Знайти: } 1) f(2); \quad 2) f(-2); \quad 3) f(-x).$$

2. Дано: $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$. Знайти, якщо можна: 1) $f(1)$; 2) $f(2)$; 3) $f(-1)$;

4) $f(-2)$.

Знайти область визначення функцій:

3. $y = \frac{5}{1-x^2}$. 4. $y = \frac{x-1}{x^2-7x+12}$. 5. $y = \frac{\sin x}{x^2+x+1}$. 6. $y = \sqrt{2x+3}$.

7. $y = \sqrt[3]{x^2-4}$. 8. $y = \sqrt{25-x}$. 9. $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-5x}}$. 10. $y = \lg(4-x)$.

11. $y = \ln(x^2-5x+6)$. 12. $y = \arcsin(3x-8)$. 13. $y = \arccos\left(\frac{x}{2}-1\right)$.

13. $y = 5^{x^2-3}$. 14. $y = \log_5(x-1) + \frac{1}{x-3}$.

Дослідити функції на парність (непарність):

15. $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 5$. 16. $f(x) = x^5 + 3x$. 17. $f(x) = \cos x + |x|$.

18. $f(x) = \sin x - \cos x$. 19. $f(x) = 2x^3 \operatorname{tg} x$. 20. $f(x) = \frac{1}{2} \sin x \cos 2x$.

21. $f(x) = 4^x$. 22. $f(x) = x^2 - e^{2|x|}$. 23. $f(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$. 24. $f(x) = \frac{x^2-5}{\operatorname{ctg} 3x}$.

З'ясувати, які з наведених функцій є періодичними, та знайти їх найменший період:

25. $f(x) = 4 \cos 6x - 2$. 26. $f(x) = \frac{1}{2} \sin \frac{x}{4}$. 27. $f(x) = 5 \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.

28. $f(x) = 2 - 3 \operatorname{ctg} x$. 29. $f(x) = 2 \sin^2 3x$. 30. $f(x) = 2 \sin x - 3 \cos \frac{x}{2}$.

Визначити обернену функцію $x = \varphi(y)$ та область її існування для функцій:

31. $y = 3x + 3, x \in (-\infty; \infty)$. 32. $y = x^2, x \in (-\infty; 0]$. 33. $y = \frac{1-x}{1+x}, x \neq -1$.

34. $y = \sqrt{1-x^2}, x \in [0; 1]$. 35. $y = 3^{x+2}, x \in (-\infty; \infty)$.

§ 2. Границя послідовності

Обчислити границі послідовностей:

36. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{2n+5}$. 37. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2n^2}{4n^2+3n-1}$. 38. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^5+6n-3}{3n^2-4n^3}$.

$$39. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^2 - 5}{1 - 3n^3 + n^6}. \quad 40. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{8n^3 + 3n^2 - 4}}{5n - 2}. \quad 41. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 8n - 1}{\sqrt{81n^4 - 5n + 9}}.$$

$$42. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n - 1}{2n + 3} - \frac{2 + 3n^2}{2n^2 + 7} \right). \quad 43. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 3} - \sqrt{n^2 - 3} \right).$$

$$44. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 1)!}{(n + 2)! - n!}. \quad 45. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 1)! - n!}{(n + 1)! + n!}. \quad 46. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 4)!}{(n + 3)! + (n + 2)!}.$$

$$47. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n - 2)! n + (n - 1)!}. \quad 48. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 1)! - 3n!}{(n + 2)n!}.$$

§3. Границя функції

Знайти границі:

$$49. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 5}{4x - 1}. \quad 50. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 4x + 3}{\sqrt{x + 4}}. \quad 51. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 4}{x - 2}. \quad 52. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 2x - x^3}{x^5 + 3x + 1}.$$

$$53. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + x^3 + 3x^2 - 1}{1 - 2x^3}. \quad 54. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - x^5 + 1}{1 + x + 3x^5}. \quad 55. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{x^3} + \sqrt[3]{x^7} - x}{2\sqrt{x^3} + 3}.$$

$$56. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{x + 1}}{\sqrt[4]{4 + 3x^2 + x^3 + x}}. \quad 57. \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{x^2 + 1} - x \right). \quad 58. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 2x + 1}.$$

$$59. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - 3} \right). \quad 60. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 5x + 6}. \quad 61. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 6x + 9}.$$

$$62. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{3x - 1}{3x^2 + 2x - 1}. \quad 63. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}. \quad 64. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^3 - 9x}.$$

$$65. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1}. \quad 66. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^3 - 8}. \quad 67. \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x - 2} - \frac{12}{x^3 - 8} \right).$$

$$68. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x^2}. \quad 69. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x - 1} - \sqrt{x}}{x^3 - 1}. \quad 70. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x - 2} - 2}{\sqrt{x + 7} - 3}.$$

$$71. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x - 8}{\sqrt[3]{x} - 2}. \quad 72. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2 - 1}}{\sqrt{x} - 1}. \quad 73. \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a + x} - \sqrt{x}}{a}. \quad 74. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{x}.$$

$$75. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\sin 2x}. \quad 76. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x \sin x}{\sin 4x}. \quad 77. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x + \sin 2x}{\sin x}.$$

$$78. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - 7x}{\sin 4x}. \quad 79. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}. \quad 80. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \sin 3x}{1 - \cos 10x}.$$

$$81. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 7x - \cos 3x}{1 - \cos 2x}. \quad 82. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 1}{3x^2 + 5} \right)^x. \quad 83. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 1}{x + 5} \right)^{2x}.$$

$$84. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1 + x} \right)^x. \quad 85. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^{\frac{3x-1}{x}}. \quad 86. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x} \right)^{2x^2}.$$

$$87. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 - 2}{3x^2 + 1} \right)^{x+1}. \quad 88. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-3}{5x+2} \right)^{2x+1}. \quad 89. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x^3 + 2}{7x^3 - 3} \right)^{x^3 - x}.$$

$$90. \lim_{x \rightarrow 1} (4x - 3)^{\frac{x}{x^3 - 1}}. \quad 91. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - 2x)}{x}. \quad 92. \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln x - \ln(x + 2)).$$

Обчислити односторонні границі:

$$93. \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{2}{x-3}; \lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{2}{x-3}. \quad 94. \lim_{x \rightarrow 2+0} 3^{\frac{1}{x-2}}; \lim_{x \rightarrow 2-0} 3^{\frac{1}{x-2}}.$$

$$95. \lim_{x \rightarrow 2 \pm 0} f(x), \text{ якщо } f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \in (-\infty; 2), \\ x^2, & x \in [2; \infty). \end{cases}$$

§4. Неперервність функції

96. На підставі означення неперервності функції довести, що функція

$$y = \frac{4x - 5}{x^2 - 3x + 2} \text{ неперервна в точці } x = 0$$

Дослідити функції на неперервність та побудувати схематично їх графіки:

$$97. y = \frac{2}{3x - 1} + 1. \quad 98. y = 5^{\frac{1}{x+3}}.$$

$$99. y = \begin{cases} x + 1, & x \leq 1, \\ 2x^2 - 1, & -1 < x \leq 1, \\ \frac{1}{x}, & x > 1. \end{cases} \quad 100. y = \begin{cases} \cos x, & x < 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 1, \\ \frac{1}{x-3}, & x > 1. \end{cases}$$

$$101. \text{ При якому значенні параметра } a \text{ функція } f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leq \frac{\pi}{2}, \\ a - x, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ буде}$$

неперервною? Побудувати її графік.

102. Скільки точок розриву і якого роду має функція $y = \frac{1}{\ln|x-2|}$?

Побудувати її графік.

Відповіді

1. 1)7; 2)15; $3x^2 + 2x - 1$. 2. 1) 0; 2) $\frac{1}{4}$; 3)-2; 4) не існує в точці $x = -2$.

3. $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$. 4. $(-\infty; 3) \cup (3; 4) \cup (4; \infty)$. 5. $x \in \mathbf{R}$. 6. $[-1; 5; \infty)$.

7. $x \in \mathbf{R}$; 8. $[-5; 5]$. 9. $(-\infty; 0) \cup (5; \infty)$. 10. $(-\infty; 4)$. 11. $(-\infty; 2) \cup (3; \infty)$.

12. $\left[\frac{7}{3}; 3\right]$. 13. $x \in \mathbf{R}$; 14. $(1; 3) \cup (3; \infty)$. 15. Парна. 16. Непарна. 17. Парна.

18. Не є парною або непарною. 19. Парна. 20. Непарна. 21. Парна. 22. Не є

парною або непарною. 23. Парна. 24. Непарна. 25. $T_0 = \frac{\pi}{3}$. 26. $T_0 = 8\pi$.

27. $T_0 = \frac{\pi}{2}$. 28. $T_0 = \pi$. 29. $T_0 = \frac{\pi}{3}$. 30. $T_0 = 4\pi$. 31. $x = \frac{y-3}{2}, y \in \mathbf{R}$. 32.

$x = -\sqrt{y}, y \geq 0$. 33. $x = \frac{1-y}{1+y}, y \neq -1$. 34. $x = \sqrt{1-y^2}, 0 \leq y \leq 1$.

35. $x = \log_3 y - 2, y > 0$. 36. $\frac{3}{2}$. 37. $-\frac{1}{2}$. 38. ∞ . 39. 0. 40. ∞ . 41. $\frac{1}{9}$. 42. 0.

43. 0. 44. 0. 45. 1. 46. ∞ . 47. ∞ . 48. 1. 49. 2. 50. 0. 51. ∞ . 52. 0. 53. ∞ .

54. $-\frac{1}{3}$. 55. ∞ . 56. 1. 57. $\frac{1}{2}$. 58. ∞ . 59. 0. 60. 0. 61. ∞ . 62. $\frac{3}{4}$. 63. $-\frac{2}{5}$.

64. $-\frac{1}{9}$. 65. 6. 66. $\frac{1}{6}$. 67. $\frac{1}{2}$. 68. $\frac{1}{4}$. 69. $\frac{1}{3}$. 70. 12. 72. ∞ . 73. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. 74. 7. 75. 2.

76. 0. 77. 6. 78. $-\frac{7}{4}$. 79. $\frac{1}{2}$. 80. $\frac{3}{25}$. 81. -10. 82. 0. 83. ∞ . 84. $\frac{1}{e}$. 85. 1.

86. ∞ . 87. 1. 88. $\frac{1}{e^2}$. 89. $\frac{5}{7}$. 90. $\frac{1}{e^4}$. 91. -2. 92. -2. 93. $+\infty; -\infty$. 94. $+\infty; 0$. 95. 4; 3.

97. $x = \frac{1}{3}$ - т.р. 2-го роду. 98. $x = -3$ - т.р. 2-го роду. 99. $x = -1$ - т.р. 1-го

роду. 100. $x = 0, x = 1$ - т.р. 1-го роду, $x = 3$ - т.р. 2-го роду. 101. $a = 1 + \frac{\pi}{2}$.

102. $x = 0$ - т.р. 1-го роду (усувний), $x = 1, x = 3$ - т.р. 2-го роду.

Глава 5

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

§1. Похідна та диференціал функції. Правила диференціювання.

Знайти похідні функцій:

$$1. y = 5x^2 - 3x + 1. \quad 2. y = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} - 5x^2 + x + 7. \quad 3. y = 5x + \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt[5]{x^4}.$$

$$4. y = \frac{4}{5}x\sqrt[4]{x} - \frac{3}{\sqrt[4]{x^3}}. \quad 5. y = \frac{2}{x} - \frac{\sin x}{5} + \sqrt{3}. \quad 6. y = 6\operatorname{ctgx} + 2\ln x - 2^x + \cos \frac{\pi}{4}.$$

$$7. y = 2\sqrt{x} + 5 - 3\operatorname{arctgx} - 4x^{10}. \quad 8. y = 10^x \cdot \arcsin x - \ln 5. \quad 9. y = \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

$$10. y = 3^x - \cos x \cdot \ln x. \quad 11. y = x^7 \cdot (x^3 - 5) + \arccos \frac{1}{2}. \quad 12. y = e^x \cdot \operatorname{tg} x + \lg 3.$$

$$13. y = \frac{2 + x^5}{x^4 - 2}. \quad 14. y = \frac{\operatorname{arctgx}}{\log_5 x}. \quad 15. y = (2x - 5)^8 - \frac{1}{3 - 4x}. \quad 16. y = \sin^2 \frac{x}{4}.$$

$$17. y = \sqrt{5 - x^2}. \quad 18. y = \cos x^2 - e^{6x}. \quad 19. y = \frac{\lg(3x^2 - 5x)}{\cos 3x} + \operatorname{arctg} \sqrt{3}.$$

$$20. y = \operatorname{arctg} 6x \cdot 7^{\cos x}. \quad 21. y = \frac{\cos^5 x}{\arcsin 8x}. \quad 22. y = (x^4 - x^2 + 1)^3 + 4^{\sin^3 x}.$$

$$23. y = \lg \frac{10 - x}{x + 2} - \sin^6 \frac{x}{3}. \quad 24. y = \cos^5 3x \cdot \operatorname{tg}(\sin x) + e^{\operatorname{tg} 3x}. \quad 25. y = \sin^2 \left(\ln \frac{x^3}{5} \right)$$

$$26. y = \log_2 \frac{x - 6}{3} \cdot \sin^7 \frac{2}{x}. \quad 27. y = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{x}}}{x^3}. \quad 28. y = \frac{\cos^2 x}{3\sqrt{x}}. \quad 29. y = 4^{x \sin 2x}.$$

Обчислити значення похідних y' функцій в точці x_0 :

$$30. y = x^3 - 6x^2 + x - 1, x_0 = 0. \quad 31. y = \frac{4x + 9}{x^2 + 16}, x_0 = 3.$$

$$32. y = \ln x + 2^x, x_0 = 1. \quad 33. y = e^x (\sin x + 2\sqrt{x}), x_0 = \pi.$$

$$34. y = \frac{6^x + x^6}{\ln x}, x_0 = e. \quad 35. y = \left(x^2 + \frac{4}{x} \right)^2, x_0 = 2.$$

Знайти похідні y' функцій, заданих неявно:

$$36. x^3 + y^3 - 3xy = 0. \quad 37. 3^x + 3^y = 3^{x+y}. \quad 38. x^4 - 3y^3 = y \cos x.$$

$$39. x - \sqrt{y} = 3 - x^2 y. \quad 40. xy = \arcsin(x + y). \quad 41. x^2 y - \operatorname{arctg}(2x + y) = 0.$$

$$42. \sin(5x - 2y) = e^{\pi xy}. \quad 43. x \ln y = \cos xy^2. \quad 44. x^2 - y = \operatorname{arctg} y.$$

Використовуючи логарифмування, знайти похідні функцій:

$$\begin{aligned}
 45. \quad y &= x^{5x} & 46. \quad y &= x^{3x} & 47. \quad y &= (\sqrt[3]{x})^{\sqrt{x}} & 48. \quad y &= (\lg x)^{\frac{5}{2x}} \\
 49. \quad y &= x^{3\cos x} & 50. \quad y &= (\cos x)^{\arcsin x} & 51. \quad y &= (x^3 + 5)^{\cos x} & 52. \quad y &= \left(\frac{2x+1}{x+3}\right)^{x+2} \\
 53. \quad y &= x^3 \cdot 3^{x^2} \cos 5x & 54. \quad y &= x^2 \cdot 5^{\sqrt{x}} \cdot \operatorname{tg} x & 55. \quad y &= e^{\operatorname{ctg} x} \cdot \sqrt{(3x-1)^5} \cdot \lg^3 x \\
 56. \quad y &= \frac{(x-1)^2 \cdot (3x+1)}{(x+5)^2} & 57. \quad y &= \frac{(3x-5)^7}{4^{x-2} \sqrt[5]{x+6}} & 58. \quad y &= \frac{\sqrt{5x-8} \cdot \cos^4 x}{e^{7x+10}}
 \end{aligned}$$

Знайти похідні $\frac{dy}{dx}$ функцій, заданих параметрично:

$$\begin{aligned}
 59. \quad \begin{cases} x = e^{2t}, \\ y = e^{5t}. \end{cases} & 60. \quad \begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = \frac{1}{3}t^3 - t. \end{cases} & 61. \quad \begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t. \end{cases} \\
 62. \quad \begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = t^3. \end{cases} & 63. \quad \begin{cases} x = te^{-t}, \\ y = \frac{2}{3-5t}. \end{cases} & 64. \quad \begin{cases} x = 3 \sin 2t - \sin 3t, \\ y = 3 \cos 2t + \cos 3t. \end{cases} \\
 65. \quad \begin{cases} x = \lg(2+t^3), \\ y = \operatorname{arcctg} t - 2t. \end{cases} & 66. \quad \begin{cases} x = e^{2t} \sin 3t, \\ y = e^{2t} \cos 3t. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Знайти диференціали dy функцій:

$$\begin{aligned}
 67. \quad y &= 3x^4 - \frac{5}{x} & 68. \quad y &= \frac{7}{x^{15}} + 3x^7 - \sqrt[8]{x} & 69. \quad y &= 3x^8 - 5\sqrt[7]{x} + \frac{2}{x^7} - \frac{3}{\sqrt[6]{x^{11}}} \\
 70. \quad y &= \frac{3x+1}{x^2+1} & 71. \quad y &= \sin \ln x & 72. \quad y &= \frac{1}{\arccos^5 x} & 73. \quad y &= 7^{\ln(3x+2)}
 \end{aligned}$$

§2. Геометричний і механічний зміст похідної. Застосування диференціала до наближених обчислень.

Скласти рівняння дотичної і нормалі до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0 :

$$\begin{aligned}
 74. \quad y &= 4 - x^2, x_0 = 2 & 75. \quad y &= x^3 - 3x^2 + 9x - 1, x_0 = 1 \\
 76. \quad y &= \cos 2x, x_0 = \pi & 77. \quad y &= 3\sqrt[3]{x^5} + 1, x_0 = 1 \\
 78. \quad y &= \frac{3x+1}{x^2+1}, x_0 = 1 & 79. \quad y &= x^2 e^{-x}, x_0 = 1
 \end{aligned}$$

Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої :

80. $x^2 + y^2 = 5$ в точці $M_0(1;2)$. 81. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ в точці $M_0\left(5; -\frac{9}{4}\right)$.

82. $\begin{cases} x = 6\sin 2t, \\ y = 8\cos t \end{cases}$ в точці, якій відповідає значення параметру $t_0 = \frac{\pi}{6}$.

83. Скласти рівняння дотичної до графіка функції $y = \frac{x^3 + 1}{3}$ у точці перетину його з віссю абсцис.

84. Визначити абсцису точки, в якій дотична до графіка функції $y = \ln 3x$ перпендикулярна прямій $3x + 4y + 2 = 0$.

85. У точці $M(1;8)$ до графіка функції $y = (5 - x^{2/3})^2$ проведена дотична. Знайти довжину її відрізка, що міститься між осями координат.

86. Тіло рухається прямолінійно за законом $S(t) = t^2 + 4t + 1$. Знайти його швидкість у момент часу $t = 4$.

87. Точка рухається вздовж кривої $y = 7x - x^2$ так, що її абсциса змінюється з часом за законом $x = t^3$. З якою швидкістю змінюється ордината точки?

88. Маса $m(t)$ радіоактивної речовини змінюється з часом за законом $m(t) = m_0 2^{\frac{t_0 - t}{T}}$, де m_0 – початкова маса в момент часу t_0 , а T - період напіврозпаду речовини. Довести, що швидкість розпаду речовини пропорційна її наявній кількості. Знайти коефіцієнт пропорційності.

Обчислити наближено:

89. $\sqrt{82}$. 90. $\lg 0,9$. 91. $\sin 31^\circ$. 92. $\operatorname{arctg} 1,05$. 93. $\operatorname{arccos} 0,45$.

§3. Похідні і диференціали вищих порядків

Знайти похідні 2-го порядку для функцій:

94. $y = \sin^2 x$. 95. $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x}$. 96. $y = e^{-5x^2}$.

97. $y = \ln \operatorname{tg} x$. 98. $y = e^{2x} \cos 5x$. 99. $y = \frac{\ln 6x}{x^2}$.

100. Знайти $y''(0)$ і $y'''(0)$, якщо $y = e^{3x} \cdot \sin 2x$.

101. Обчислити $y^{(5)}(1)$ для функції $y = x^4 \cdot \ln x$.

Довести, що наведені функції задовольняють співвідношенням:

$$102. y = xe^{2x}, y'' - 4y' + 4y = 0. \quad 103. y = \frac{x}{2} + \sin \ln x, x^2 y'' + xy' + y = x.$$

$$104. y = \frac{x-3}{x+4}, 2(y')^2 = (y-1)y''.$$

Знайти похідні 2-го порядку для функцій, заданих неявно:

$$105. y = 1 + xe^y. \quad 106. y = \operatorname{ctg}(x+y). \quad 107. 2^{x-y} = x+y. \quad 108. x^2 + y^2 = 2e^y.$$

Знайти другі похідні $\frac{d^2 y}{dx^2}$ функцій, заданих параметрично:

$$109. \begin{cases} x = \operatorname{tg} t, \\ y = \frac{1}{\cos t}. \end{cases} \quad 110. \begin{cases} x = \sin^2 3t, \\ y = 6t - \sin 6t. \end{cases} \quad 111. \begin{cases} x = \arccos t, \\ y = \ln(1-t^2). \end{cases} \quad 112. \begin{cases} x = \sin 2t, \\ y = e^{t^2-1}. \end{cases}$$

Знайти диференціали 2-го порядку функцій:

$$113. y = 5x^2 + 6x + 1. \quad 114. y = \sqrt[5]{x^4}. \quad 115. y = 5 \cos(x+1).$$

$$116. y = \frac{\lg x}{x}. \quad 117. y = x^2 e^{-5x}. \quad 118. y = \ln \cos 2x.$$

$$119. \text{ Довести, що коли } \begin{cases} x = f(t) \cos t - f'(t) \sin t, \\ y = f(t) \sin t + f'(t) \cos t \end{cases}, \text{ то виконується}$$

$$\text{рівність } dx^2 + dy^2 = (f(t) + f''(t))^2 dt^2.$$

§4. Правило Лопітала

Обчислити границі функцій, застосовуючи правило Лопітала:

Невизначеність $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$

$$120. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\arcsin 2x}. \quad 121. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x^3 - x^5}{4x - x^4}. \quad 122. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 1}{\sin x}. \quad 123. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 2^x}{5^x - 4^x}.$$

$$124. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\sin 4x}. \quad 125. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 2^{-x}}{\ln(1+2x)}. \quad 126. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{\sin 4x}. \quad 127. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2}.$$

Невизначеність $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$

$$128. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^3}. \quad 129. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x}. \quad 130. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x}. \quad 131. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x}. \quad 132. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln 5x}{\operatorname{ctg} x}.$$

$$133. \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\ln \sin x}. \quad 134. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xe^{\frac{x}{2}}}{x + e^x}. \quad 135. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin 2x^3}{\ln \sin x^2}. \quad 136. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}.$$

Невизначеність $\{\infty - \infty\}$

$$137. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right). \quad 138. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{1-x^2} - \frac{4}{1-x^4} \right). \quad 139. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x \right).$$

$$140. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right). \quad 141. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right). \quad 142. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right).$$

Невизначеність $\{0 \cdot \infty\}$

$$143. \lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \operatorname{ctg} \pi x). \quad 144. \lim_{x \rightarrow 0} (\arcsin x \cdot \operatorname{ctg} x). \quad 145. \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \cdot \operatorname{ctg} x.$$

$$146. \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{x} \cdot \ln x. \quad 147. \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot e^{-x}. \quad 148. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\cos \frac{\pi x}{2}} \cdot \ln \frac{1}{x} \right).$$

Невизначеність $\{0^0; \infty^0; 1^\infty\}$

$$149. \lim_{x \rightarrow +0} x^x. \quad 150. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\pi - 2x)^{\cos x}. \quad 151. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x \right)^x. \quad 152. \lim_{x \rightarrow +0} (1+x)^{\ln x}.$$

$$153. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}. \quad 154. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}. \quad 155. \lim_{x \rightarrow \infty} (x+2)^{\frac{1}{x}}. \quad 156. \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}.$$

§5. Дослідження функцій та побудова графіків

157. Показати, що функція $y = 4 - 3x - x^3$ є спадною.

158. Показати, що функція $y = e^x - x$ зростає при $x > 0$.

Знайти інтервали монотонності функцій:

$$159. y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5. \quad 160. y = x^4 - 8x^2 + 1. \quad 161. y = x(1 + \sqrt{x}).$$

Дослідити на монотонність та екстремум функції:

$$162. y = x^3 - 3x + 5. \quad 163. y = 8x^3 - x^4. \quad 164. y = x^2 \cdot e^{-2x}.$$

$$165. y = \frac{x^3 + 4}{x^2}. \quad 166. y = x \cdot \ln x. \quad 167. y = \sqrt[3]{x^2}. \quad 168. y = \sqrt[3]{x^3 + x^2}.$$

$$169. y = (x-1)^3 \cdot (x+1)^2. \quad 170. y = x^{1-\ln x}.$$

Знайти найбільше і найменше значення функцій на зазначеному відрізку:

$$171. y = 2x^3 - 6x^2 + 3, [-1; 1]. \quad 172. y = x - 4\sqrt{x} + 1, [1; 9].$$

$$173. y = x + \frac{4}{x^2}, [1; 3]. \quad 174. y = \frac{x}{1+x^2}, [0; 2]. \quad 175. y = \sqrt{21 + 4x - x^2}, [-1; 7].$$

$$176. y = \sin 2x, [0; \pi]. \quad 177. y = \sqrt[3]{(x^2 - 2x)^2}, [0; 3]. \quad 178. y = \frac{1}{3^{x^2 - 5x + 4}}, [-2; 3].$$

179. Число 16 розкласти на два доданки так, щоб сума їх квадратів була найменшою.

180. Знайти таке додатне число, щоб сума з оберненим до нього числом була найменшою.

181. Якими мають бути розміри ящика з кришкою місткістю $V = 1764 \text{ см}^3$, якщо сторони основи відносяться, як **3:4**, щоб на його виготовлення пішло найменше матеріалу?

182. Об'єм правильної шестикутної призми дорівнює V . Якою має бути сторона основи, щоб повна поверхня призми була найменшою?

183. Треба зробити конічну лійку з твірною, що дорівнює **20 см**. Якою має бути висота лійки, щоб її об'єм був найбільший?

184. На параболі $y^2 = 4x$ знайти точку, найближчу до точки $A(6;0)$.

185. Через точку **(2;8)** провести пряму, яка б відтinalа на додатних півосях координат відрізки, сума яких була б найбільшою.

Знайти точки перегину та інтервали опуклості і вгнутості графіків функцій:

186. $y = x^3 - 3x^2 + 6x$. 187. $y = x^5 - 3x + 1$. 188. $y = x^4 - 4x^3 - 18x^2 + 2x$.

189. $y = \ln(4 + x^2)$. 190. $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$. 191. $y = \frac{x}{x^2 + 1}$. 192. $y = x \cdot \text{arctg}x$.

193. $y = x^2 \cdot \ln x$. 194. $y = (x + 1)^2 \cdot (x - 2)$. 195. $y = \sqrt[3]{(x - 5)^5} + 2$.

Знайти асимптоти ліній:

196. $y = 5^x$. 197. $y = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$. 198. $y = \frac{2x^2 + 3}{x^2 + 5}$. 199. $y = \frac{2x^3}{x^2 - 2x - 3}$.

200. $y = xe^{\frac{2}{x^2}} + 2$. 201. $y = \frac{1}{x} + x$. 202. $y = \sqrt{\frac{x^3}{x - 2}}$. 203. $y = x^2 \cdot e^{-x}$.

Зробити повне дослідження функцій і побудувати їх графіки:

204. $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2$. 205. $y = \frac{x^3}{2(x + 1)^2}$. 206. $y = \frac{(x^2 - 4)^2}{16}$.

207. $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$. 208. $y = \frac{5x}{x^2 - 4}$. 209. $y = \frac{x^2 - 4}{2x + 1}$. 210. $y = x - e^{\frac{1}{x-1}}$.

211. $y = 3xe^x$. 212. $y = \sqrt{3x^3 - 3x}$. 213. $y = \ln(x^2 + 2x)$.

Відповіді

1. $10x - 3$. 2. $x^4 - x^2 - 10x + 1$. 3. $5 - \frac{1}{2\sqrt{x^3}}$. 4. $\sqrt[4]{x} + \frac{9}{4\sqrt[4]{x^7}}$. 5. $-\frac{2}{x^2} - \frac{\cos x}{5}$.
6. $-\frac{6}{\sin^2 x} + \frac{2}{x} - 2^x \ln 2$. 7. $\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{1+x^2} - 40x^9$. 8. $10^x \ln 10 \arcsin x + \frac{10^x}{\sqrt{1-x^2}}$.
9. $\frac{3x \cos x - 2 \sin x}{3\sqrt[3]{x^5}}$. 10. $3^x \ln 3 + \sin x \ln x - \frac{\cos x}{x}$. 11. $10x^9 - 35x^6$.
12. $e^x \operatorname{tg} x + \frac{e^x}{\cos^2 x}$. 13. $\frac{5x^8 + 6x^4 - 8x^3}{(x^4 - 2)^2}$. 14. $\left(\frac{\log_5 x}{1+x^2} - \frac{\operatorname{arctg} x}{x \ln 5}\right) \frac{1}{\log_5^2 x}$.
15. $16(2x-5)^7 - \frac{4}{(3-4x)^4}$. 16. $\frac{1}{4} \sin \frac{x}{2}$. 17. $-\frac{x}{\sqrt{5-x^2}}$. 18. $-2x \sin x^2 - 6e^{6x}$.
19. $\frac{6x-5}{(3x^2-5x) \cdot \ln 10 \cdot \cos 3x} + \frac{3 \operatorname{tg} 3x \cdot \lg(3x^2-5x)}{\cos 3x}$. 20. $\frac{6 \cdot 7^{\cos x}}{1+36x^2} -$
 $- 7^{\cos x} \ln 7 \cdot \sin x \cdot \operatorname{arctg} 6x$. 21. $-\frac{5 \cos^4 x \cdot \sin x \cdot \arcsin 8x + \frac{8 \cos^5 x}{\sqrt{1-64x^2}}}{\arcsin^2 8x}$
22. $6(x^4 - x^2 + 1)^2 (2x^3 - x) + 3 \cdot 4^{\sin^3 x} \ln 4 \sin^2 x \cos x$. 23. $-\frac{12}{(10-x)(x+2) \ln 10} -$
 $- 2 \sin^5 \frac{x}{3} \cos \frac{x}{3}$. 24. $-15 \cos^4 3x \sin 3x \operatorname{tg} \sin x + \frac{\cos^5 3x \cos x}{\cos^2 \sin x}$. 25. $\frac{3}{x} \sin 2 \ln \frac{x^3}{5}$.
26. $\frac{\sin^7 \frac{2}{x}}{(x-6) \ln 2} - \frac{14 \log_2 \frac{x-6}{3} \sin^6 \frac{2}{x} \cos \frac{2}{x}}{x^2}$. 27. $\frac{1}{4x^3 \sqrt{2\sqrt{x}+x}} + \frac{3\sqrt{2+\sqrt{x}}}{x^4}$.
28. $-\frac{2\sqrt{x} \sin 2x + \cos^2 x \ln 3}{2\sqrt{x} \cdot 3^{\sqrt{x}}}$. 29. $4^{x \sin 2x} \ln 4 (\sin 2x + 2x \cos 2x)$. 30. 1.
31. $-\frac{26}{625}$. 32. $1 + 2 \ln 2$. 33. $e^\pi \frac{2\pi - \sqrt{\pi} + 1}{\sqrt{\pi}}$. 34. $6^e \left(\ln 6 - \frac{1}{e}\right) + 5e^5$. 35. 36.
36. $\frac{x^2 - y}{x - y^2}$. 37. $\frac{(1-3^y)3^{x-y}}{3^x - 1}$. 38. $\frac{4x^3 + y \sin x}{\cos x + 9y^2}$. 39. $\frac{2\sqrt{y}(2xy+1)}{1-2x^2\sqrt{y}}$.
40. $\frac{y\sqrt{1-(x+y)^2} - 1}{1-x\sqrt{1-(x+y)^2}}$. 41. $\frac{2-2xy(1+(2x+y)^2)}{x^2(1+(2x+y)^2) - 1}$. 42. $\frac{5 \cos(5x-2y) - \pi y e^{\pi xy}}{\pi x e^{\pi xy} + 2 \cos(5x-2y)}$.

43. $-\frac{y(\ln y + \sin xy^2)}{x(1 + 2y \sin xy^2)}$. 44. $2x\left(1 + \frac{1}{y^2}\right)$. 45. $5x^{5x}(\ln x + 1)$.

46. $3^x \cdot x^{3x} \left(\frac{1}{x} + \ln 3 \ln x\right)$. 47. $\frac{2 + \ln x}{6\sqrt{x}} \cdot x^{\frac{\sqrt{x}}{3}}$. 48. $\frac{5}{2x^2} \left(\frac{1}{\ln 10 \lg x} - \ln \lg x\right) (\lg x)^{\frac{5}{2x}}$.

49. $3\left(\frac{\cos x}{x} - \sin x \ln x\right) x^{3 \cos x}$. 50. $\left(\frac{\ln \cos x}{\sqrt{1-x^2}} - \operatorname{tg} x \arcsin x\right) (\cos x)^{\arcsin x}$.

51. $\left(\frac{3x^2 \cos x}{x^2 + 5} - \sin x \ln(x^3 + 5)\right) (x^3 + 5)^{\cos x}$. 52. $\left(\frac{5x + 10}{2x^2 + 7x + 3} + \ln \frac{2x + 1}{x + 3}\right) \times$
 $\times \left(\frac{2x + 1}{x + 3}\right)^{x+2}$. 53. $\left(\frac{3}{x} + 2x \ln 3 - 5 \operatorname{tg} 5x\right) x^3 3^{x^2} \cos 5x$. 54. $\left(\frac{2}{x} + \frac{\ln 5}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{\sin 2x}\right) \times$
 $\times x^2 \cdot 5^{\sqrt{x}} \cdot \operatorname{tg} x$. 55. $\left(\frac{15}{6x-2} + \frac{3}{x \ln 10} - \frac{1}{\sin^2 x}\right) e^{\operatorname{ctg} x} \sqrt{(3x-1)^5} \lg^3 x$.

56. $\frac{(3x^2 + 48x - 3)(x-1)}{(x+5)^3}$. 57. $\left(\frac{21}{3x-5} - \ln 4 - \frac{1}{5x+30}\right) \frac{(3x-5)^7}{4^{x-2} \sqrt[5]{x+6}}$.

58. $\left(\frac{5}{10x-16} - 4 \operatorname{tg} x - 7\right) \frac{\sqrt{5x-8} \cos^4 x}{e^{7x+10}}$. 59. $\frac{5}{2} e^{3t}$. 60. $\frac{t^2-1}{3t^2}$. 61. $-ctgt$.

62. $-3t^2 \cdot e^t$. 63. $\frac{10e^t}{(3-5t)^2(1-t)}$. 64. $\frac{\sin 3t + 2 \sin 2t}{\cos 3t - 2 \cos 2t}$. 65. $-(3 + 2t^2) \times$
 $\times \frac{(2 + t^3) \ln 10}{3t^2(1+t^2)}$. 66. $\frac{2 \cos 3t - 3 \sin 3t}{2 \sin 3t + 3 \cos 3t}$. 67. $\left(12x^3 + \frac{5}{x^2}\right) dx$.

68. $\left(-\frac{105}{x^{16}} + 21x^6 - \frac{1}{8\sqrt{x^7}}\right) dx$. 69. $\left(24x^7 - \frac{5}{7\sqrt{x^6}} - \frac{14}{x^8} + \frac{11}{2\sqrt{x^{17}}}\right) dx$.

70. $-\frac{3x^2 + 2x - 3}{(x^2 + 1)^2} dx$. 71. $-\frac{\sin \ln x}{x} dx$. 72. $\frac{5dx}{\arccos^6 x \cdot \sqrt{(1-x^2)}}$. 73. $3 \ln 7 \frac{7^{\ln(3x+2)}}{3x+2} dx$.

74. $4x + y - 8 = 0; x - 4y - 2 = 0$. 75. $6x - y = 0; x + 6y - 37 = 0$. 76. $y = 1; x = \pi$.

77. $5x - y - 1 = 0; x + 5y - 21 = 0$. 78. $x + y - 3 = 0; x - y + 1 = 0$. 79. $x - ey = 0;$
 $ex + y - \left(e + \frac{1}{e}\right) = 0$. 80. $x + 2y - 5 = 0; 2x - y = 0$. 81. $5x + 4y - 16 = 0;$
 $16x - 20y - 65 = 0$. 82. $2x + 3y - 18\sqrt{3} = 0; 3x - 2y - \sqrt{3} = 0$. 83. $x - y + 1 = 0$.

84. $\frac{3}{4}$. 85. $5\sqrt{5}$. 86. 12 . 87. $21t^2 - 6t^5$. 88. $\frac{\ln 2}{T}$. 89. $\approx 9,055$. 90. $\approx 0,04576$.

91. $\approx 0,515$. 92. $\approx 0,8104$. 93. $\approx 18^\circ 10'$. 94. $2 \cos 2x$. 95. $-\frac{3x+1}{4x(1+x^2)\sqrt{x}}$.
96. $10(10x^2-1)e^{-5x^2}$. 97. $-\frac{4\cos 2x}{\sin^2 2x}$. 98. $-e^{2x}(20\sin 5x+21\cos 5x)$.
99. $\frac{1+6\ln 6x}{x^4}$. 100. $y''(0)=12; y'''(0)=46$. 101. 24. 105. $\frac{e^y}{2-y}$.
106. $\frac{\sin 2(x+y)\sin^2(x+y)}{(1+\sin^2(x+y))^3}$. 107. $\frac{4 \cdot 2^{x-y} \ln^2 2}{(2^{x-y} \ln^2 2 + 1)^3}$. 108. $1 - \frac{x^2(e^y-1)}{(e^y-y)^2}$.
109. $\cos^3 t$. 110. $\frac{1}{\sin 3t \cos^3 3t}$. 111. $\frac{2}{t^2-1}$. 112. $\frac{((1+2t^2)\cos 2t+2t\sin 2t)e^{t^2-1}}{2\cos^3 2t}$.
113. $10dx^2$. 114. $-\frac{4dx^2}{25x\sqrt[5]{x}}$. 115. $-5\cos(x+1)dx^2$. 116. $\frac{1}{x^3}\left(\lg x - \frac{3}{\ln 10}\right)dx^2$.
117. $(2-20x+25x^2)e^{-5x}dx^2$. 118. $-\frac{4dx^2}{\cos^2 2x}$. 120. $\frac{3}{2}$. 121. $\frac{1}{4}$. 122. $\ln 5$.
123. $\frac{\ln \frac{3}{2}}{\ln \frac{5}{4}}$. 124. $-\frac{1}{2}$. 125. $\ln 2$. 126. $\frac{3}{4}$. 127. $\frac{9}{2}$. 128. 0. 129. 0. 130. 0.
131. ∞ . 132. 0. 133. 1. 134. ∞ . 135. 1. 136. $\frac{5}{3}$. 137. $-\frac{1}{2}$. 138. -1. 139. $\frac{2}{3}$.
140. $\frac{1}{2}$. 141. 0. 142. $\frac{1}{2}$. 143. $\frac{1}{\pi}$. 144. 1. 145. 0. 146. 0. 147. 0. 148. $\frac{2}{\pi}$. 149. 1.
150. 1. 151. $-\frac{2}{\pi}$. 152. 1. 153. e^{-6} . 154. $\sqrt[3]{e}$. 155. 1. 156. 1. 157.
- $y' = -3(1+x^2) < 0$. 158. $y' = e^x - 1 > 0$ при $x > 0$. 159. Зростає при $x \in (-\infty; -2)$ і $(1; \infty)$, спадає при $x \in (-2; 1)$. 160. Зростає при $x \in (-2; 0)$ і $(2; \infty)$, спадає при $x \in (-\infty; -2)$ і $(0; 2)$. 161. $x \in \mathbf{R}$. 162.
- $y_{\max} = y(-1) = 7, y_{\min} = y(1) = 3$; зростає при $x \in (-\infty; -1)$ і $(1; \infty)$, спадає при $x \in (-1; 1)$. 163. $y_{\max} = y(6) = 432$; зростає при $x \in (-\infty; 6)$, спадає при $x \in (6; \infty)$. 164. $y_{\max} = y(1) = \frac{1}{e^2}, y_{\min} = y(0) = 0$; зростає при $x \in (0; 1)$, спадає при $x \in (-\infty; 0)$ і $(1; \infty)$. 165. $y_{\min} = y(2) = 3$; зростає при $x \in (-\infty; 0)$ і

$(2; \infty)$, спадає при $x \in (0; 2)$. 166. $y_{\min} = y\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$; спадає при $x \in \left(-\infty; \frac{1}{e}\right)$, зростає при $x \in \left(\frac{1}{e}; \infty\right)$. 167. $y_{\min} = y(0) = 0$; спадає при $x \in (-\infty; 0)$, зростає при $x \in (0; \infty)$. 168. $y_{\max} = y\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{\sqrt[3]{4}}{3}$, $y_{\min} = y(0) = 0$; зростає при $x \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$ і $(0; \infty)$, спадає при $x \in \left(-\frac{2}{3}; 0\right)$. 169. $y_{\max} = y(-1) = 0$, $y_{\min} = y\left(-\frac{1}{5}\right) = -1\frac{331}{3125}$; зростає при $x \in (-\infty; -1)$ і $\left(-\frac{1}{5}; \infty\right)$, спадає при $x \in \left(-1; -\frac{1}{5}\right)$. 170. $y_{\max} = y(\sqrt{e}) = \sqrt[4]{e}$; зростає при $x \in (0; \sqrt{e})$, спадає при $x \in (\sqrt{e}; \infty)$. 171. 3 і -5. 172. -2 і -3. 173. 5 і 3. 174. $\frac{1}{2}$ і 0. 175. 5 і 0. 176. -1 і 1. 177. $\sqrt[3]{9}$ і 0. 178. $9\sqrt[4]{3}$ і 3^{-18} . 179. 8 і 8. 180. 1. 181. 10,5; 14 і 12. 182. $\frac{\sqrt[3]{2V}}{\sqrt{3}}$. 183. $\frac{20\sqrt{3}}{3}$. 184. $M(4; 4)$. 185. $2x + y - 12 = 0$. 186. т.п.: $A(1; 4)$; опуклий при $x \in (-\infty; 1)$, вгнутий при $x \in (1; \infty)$. 187. т.п.: $A(0; 1)$; опуклий при $x \in (-\infty; 0)$, вгнутий при $x \in (0; \infty)$. 188. т.п.: $A(-1; -16)$, $B(3; -184)$; опуклий при $x \in (-1; 3)$, вгнутий при $x \in (-\infty; -1)$ і $(3; \infty)$. 189. т.п.: $A(-2; \ln 8)$, $B(2; \ln 8)$; опуклий при $x \in (-\infty; -2)$, вгнутий при $x \in (-2; \infty)$. 190. т.п.: $A\left(-1; \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$, $B\left(1; \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$; вгнутий при $x \in (-\infty; -1)$ і $(1; \infty)$, опуклий при $x \in (-1; 1)$. 191. т.п.: $A(0; 0)$, $B\left(-\sqrt{3}; -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $C\left(\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$; опуклий при $x \in (-\infty; -\sqrt{3})$ і $(0; \sqrt{3})$, вгнутий при $x \in (-\sqrt{3}; 0)$ і $(\sqrt{3}; \infty)$. 192. Скрізь опуклий. 193. т.п.: $A\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}}; -\frac{3}{2e^3}\right)$; опуклий при $x \in \left(0; e^{-\frac{3}{2}}\right)$, вгнутий при $x \in \left(e^{-\frac{3}{2}}; \infty\right)$. 194. т.п.: $A(0; -2)$; вгнутий при $x \in (-\infty; 0)$, опуклий при

$x \in (0; \infty)$. 195. т.п.: $A(5; 2)$; опуклий при $x \in (-\infty; 0)$, вгнутий при $x \in (5; \infty)$. 196. Асимптот немає. 197. $x = 2, x = 3, y = 0$. 198. $y = 2$.
 199. $x = -1, x = 3, y = 2x + 4$. 200. $x = 0, y = x + 2$. 201. $x = 0, y = x$.
 202. $x = 2, y = x + 1$ – права похила асимптота, $y = -x - 1$ – ліва. 203. $y = 0$.
 204. $x \in \mathbf{R}$; асимптот немає; $y_{\min} = y(3) = -\frac{37}{4}, y_{\max} = y(0) = 2$. 205. $D(y)$:
 $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$; $x = -1$ і $y = \frac{1}{2}x - 1$ – асимптоти; $y_{\max} = y(-3) = -\frac{27}{8}$;
 графік функції опуклий при $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0)$, вгнутий при $x \in (0; \infty)$.
 206. $x \in \mathbf{R}$; парна; $y_{\max} = y(0) = 1, y_{\min} = y(\pm 2) = 0$; точки перегину $\left(\pm \frac{2}{\sqrt{3}}; \frac{4}{9}\right)$;
 асимптот немає. 207. $x \in \mathbf{R}$; непарна; неперіодична; $y_{\min} = y(-1) = -1$,
 $y_{\max} = y(1) = 1$; точки перегину $(0; 0)$ і $\left(\pm \sqrt{3}; \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $y = 0$ – горизонтальна
 асимптота. 208. $D(y)$: $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; \infty)$; непарна; екстремумів
 немає; скрізь спадає; точка перегину $(0; 0)$; асимптоти: $x = -2, x = 2, y = 0$.
 209. $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; \infty\right)$; екстремумів і точок перегину немає; зростає;
 асимптоти: $x = -\frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$. 210. $x \in (-\infty; 1) \cup (1; \infty)$; екстремумів немає;
 зростає; точка перегину $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2} - \frac{1}{e^2}\right)$; асимптоти: $x = 1$ і $y = x - 1$. 211. $x \in \mathbf{R}$;
 парна; $y_{\min} = y(-1) = -\frac{3}{e}$; спадає при $x \in (-\infty; -1)$, зростає при $x \in (-1; \infty)$;
 точка перегину $\left(-2; -\frac{6}{e^2}\right)$; асимптот немає. 212. $x \in [-\sqrt{3}; -1] \cup [\sqrt{3}; \infty)$;
 $y_{\max} = y(-1) = \sqrt{2}$; спадає при $x \in (-1; 0)$, зростає при $x \in (-\sqrt{3}; -1)$ і $(\sqrt{3}; \infty)$;
 точок перегину і асимптот немає. 213. $x \in (-\infty; -2) \cup (0; \infty)$; екстремумів і
 точок перегину немає; спадає при $x \in (-\infty; -2)$, зростає при $x \in (0; \infty)$; графік
 опуклий; асимптоти: $x = -2, x = 0$.

Глава 6.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ

§1. Функції двох змінних

1. Дано функцію $z = \frac{x + 3y}{x - 3y}$. Знайти:

а) $z(1;0)$; б) $z(0;1)$; в) $z(3;-1)$; г) $z(-x;-y)$; д) $z\left(\frac{1}{x};\frac{1}{y}\right)$.

2. Дано функцію $f(x;y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. Знайти:

а) $f\left(\frac{1}{x};\frac{1}{y}\right)$ б) $f(kx;ky), k \neq 0$; в) $f(\cos t; \sin t)$.

Знайти та зобразити область визначення функцій:

3. $z = \frac{x}{x - y}$. 4. $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{y^2 - 1}$. 5. $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}$.

6. $z = \ln(-x - y)$ 7. $z = x\sqrt{x - y}$. 8. $z = \lg(25 - x^2 - y^2)$.

9. $z = \ln x - \ln y$. 10. $z = \sqrt[4]{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}}$.

§2. Похідні і диференціали функцій двох змінних

Знайти частинні похідні першого порядку від функцій:

11. $z = x^4 - 2x^2y^2 + y^4$. 12. $z = x^2y^8 - 3x^2y$. 13. $z = x^y$. 14. $z = (1 + v)^{\sin u}$.

15. $z = \frac{y}{x}$. 16. $z = \frac{3^x}{\operatorname{tg} y}$. 17. $u = \rho^4 \cdot \cos^2 \varphi$. 18. $z = e^{xy^2}$. 19. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

20. $z = \ln \frac{x}{y}$. 21. $z = \operatorname{arctg} \frac{3y}{x}$. 22. $z = 3^{\sin y} \cdot x^2$. 23. $z = \frac{\arcsin x^2}{y^2 + 1}$.

24. $z = \frac{x - y}{x + y}$. 25. $z = \ln \sin(x - y)$. 26. $z = (1 + x^3)^y$. 27. $u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

28. $z = u \ln(v^2 - u^2)$.

Обчислити частинні похідні у заданих точках:

29. $z = x + y + \sqrt{x^2 + y^2}, (3;4)$. 30. $z = \ln\left(x + \frac{y}{2x}\right), (1;2)$.

$$31. z = \frac{\operatorname{tg}(x-y)}{\operatorname{tg}(x+y)}, \left(\frac{\pi}{4}; \pi\right).$$

$$32. \text{ Дано функцію } z = \cos(x^2 + y^2). \text{ Довести, що } y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

$$33. \text{ Дано функцію } z = e^{\frac{x}{y^2}}. \text{ Довести, що } 2x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

$$34. \text{ Чи вірно, що } \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 1, \text{ якщо } z = \ln(e^x + e^y)?$$

Знайти повні диференціали функцій:

$$35. z = \sqrt{x^2 - y^3}. \quad 36. z = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}. \quad 37. z = \ln \operatorname{tg}(xy). \quad 38. z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}.$$

Знайти похідні складених функцій:

$$39. z = \ln(x^2 - y^2), y = e^x. \quad 40. z = x^2 y^2, y = \cos x.$$

$$41. z = e^x + y^2, x = \ln t, y = \sin t. \quad 42. z = \arcsin(x-y), x = 3t, y = 4t^3.$$

$$43. z = xy^2, \text{ де } x = \frac{\sin u}{v}, y = v \cos u. \quad 44. z = x^2 \ln y, x = \frac{v}{u}, y = u^2 + v^2.$$

Знайти похідну $\frac{dy}{dx}$ від функцій, заданих неявно:

$$45. x^2 y + xy^2 - y^3 - 1 = 0. \quad 46. xe^y + ye^x - e^{xy} = 0. \quad 47. xy - \ln y = \ln a.$$

$$48. yx^2 = e^y. \quad 49. y^2 - x \operatorname{tg}(xy) = 0.$$

Знайти z'_x та z'_y :

$$50. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad 51. z^3 + 3xyz = a^3. \quad 52. \sin z + e^{xyz} - 1 = 0.$$

Обчислити z'_x та z'_y у зазначеній точці:

$$53. z^3 - 4xz + y^2 = 4, (1; -2; 2). \quad 54. e^z = x + y + z, (1; 1; 1).$$

Знайти частинні похідні другого порядку:

$$55. z = x^2 y^2 - 3x^3 y. \quad 56. z = x^4 + 3x^2 y^2 + y^4. \quad 57. z = \left(\frac{y}{x}\right)^2.$$

$$58. z = \ln(x + y^2). \quad 59. z = x \sin(x + y). \quad 60. z = \frac{2x + 3y}{x - y}.$$

61. Знайти $\left(x^3 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2$, якщо $z = \frac{\cos y^2}{x}$.

62. З'ясувати, чи задовольняє функція $z = x^3 e^{\sin y}$ умові $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

63. Довести, що $xu''_{xy} + 2(u'_x + u'_y) = yu''_{yy}$, якщо $u = xe^{-\frac{y}{x}}$.

§3. Рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні. Екстремум функції двох змінних

Скласти рівняння дотичної площини та рівняння нормалі до заданих поверхонь у вказаних точках:

64. $z = 3 + x^2 - y^2, (1; 2; 0)$.

65. $z = 2 + (x - 1)^2 + (y - 2)^2, (2; 3; 4)$.

66. $z = \sin x \cos y, \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{1}{2}\right)$.

67. $z = \arctg \frac{y}{x}, \left(1; 1; \frac{\pi}{4}\right)$.

68. $2^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{y}{z}} = 8, (2; 2; 1)$.

69. $2x^2 + y^2 + z^2 - xyz - 5 = 0, (1; 1; -1)$.

70. $x^3 + xy^2 + x^2y - z^3 = 7, (2; 0; 1)$.

Дослідити на екстремум функції:

71. $z = x^2 + y^2 + xy - 3x - 6y$.

72. $z = x^2 - y^2 + 2xy - 4x - 8y + 1$.

73. $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$.

74. $z = x^3 + y^3 - 9xy + 2z$.

75. $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$.

76. $z = e^{\frac{x}{2}} \cdot (x + e^2)$.

Відповіді

1. а) 1; б) -1; в) 0; г) $\frac{x+3y}{x-3y}$; д) $\frac{x+3y}{x-3y}$. 2. а) $\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}$; б) $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$; в) $\cos 2t$.

3. $y \neq x$. Уся координатна площина, крім точок прямої $y = x$. 4. $|x| \leq 1, |y| \leq 1$.

Квадрат з вершинами в точках $(1; 1), (-1; 1), (1; -1), (-1; -1)$. 5. $x^2 + y^2 > 4$.

Зовнішність круга $R = 2$ і центром $(0; 0)$. 6. $y < -x$. Півплощина під прямою

$y = -x$ за винятком точок цієї прямої. 7. $y \leq x$. Півплощина під прямою $y = x$

з долученням точок цієї прямої. 8. $x^2 + y^2 < 25$. Круг $R = 5$ з центром $(0; 0)$

за винятком точок контура. 9. $y > 0, x > 0$. Внутрішні точки першої

координатної чверті. 10. Точки еліпса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ та всі його внутрішні точки.

11. $z'_x = 4x(x^2 - y^2)$; $z'_y = -4y(x^2 - y^2)$. 12. $z'_x = 2xy^8 - 6xy$; $z'_y = 8x^2y^7 -$

$-3x^2$. 13. $z'_x = yx^{y-1}$; $z'_y = x^y \ln x$. 14. $z'_u = \sin u(1+v)^{\sin u-1}$; $z'_v = \ln(1+v) \times$

$\times \cos u(1+v)^{\sin u}$. 15. $z'_x = -\frac{y}{x^2}$; $z'_y = \frac{1}{x}$. 16. $z'_x = \frac{1}{\operatorname{tg} y} \cdot 3^x \ln 3$; $z'_y = -\frac{3^x}{\sin^2 y}$.

17. $u'_\rho = 4\rho^3 \cos^2 \varphi$; $u'_\varphi = \rho^4 \sin 2\varphi$. 18. $z'_x = y^2 e^{xy^2}$; $z'_y = 2yxe^{xy^2}$. 19. $z'_x =$

$= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; $z'_y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. 20. $z'_x = \frac{1}{x}$; $z'_y = -\frac{1}{y}$. 21. $z'_x = -\frac{3y}{x^2 + 9y^2}$; $z'_y =$

$= \frac{3x}{x^2 + 9y^2}$. 22. $z'_x = 2x \cdot 3^{\sin y}$; $z'_y = x^2 \cdot 3^{\sin y} \ln 3 \cos y$. 23. $z'_x = \frac{2x}{(y^2 + 1)\sqrt{1-x^4}}$;

$z'_y = -\frac{2y \arcsin x^2}{(y^2 + 1)^2}$. 24. $z'_x = \frac{2y}{(x+y)^2}$; $z'_y = -\frac{2x}{(x+y)^2}$. 25. $z'_x = \operatorname{ctg}(x-y)$;

$z'_y = -\operatorname{ctg}(x-y)$. 26. $z'_x = 3x^2 y(1+x^3)^{y-1}$; $z'_y = (1+x^3)^y \ln(1+x^3)$. 27. $z'_x =$

$= \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$; $z'_y = \frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$. 28. $z'_u = \ln(v^2 - u^2) - \frac{2u^2}{v^2 - u^2}$; $z'_v = \frac{2uv}{v^2 - u^2}$.

29. $\frac{2}{5}; \frac{1}{5}$. 30. $0; \frac{1}{4}$. 31. $0; 0$. 34. Так. 35. $dz = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^3}} \left(xdx - \frac{3}{2} y^2 dy \right)$.

36. $dz = -\left(\frac{y}{x^2} + \frac{1}{y} \right) dx + \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{y^2} \right) dy$. 37. $dz = \frac{2y}{\sin 2xy} dx + \frac{2x}{\sin 2xy} dy$

38. $dz = \frac{dx}{1+x^2} + \frac{dy}{1+y^2}$. 39. $\frac{dz}{dx} = \frac{2(x - e^{2x})}{x^2 - e^{2x}}$. 40. $\frac{dz}{dx} = x(2 \cos x - x \sin x)$.

41. $\frac{dz}{dt} = 1 + \sin 2t$. 42. $\frac{dz}{dt} = \frac{3 - 13t^2}{\sqrt{1 - (3t - 4t^3)^2}}$. 43. $z'_u = v \cos^3 u - 2v \cos^2 u \sin u$;

$z'_v = \sin u \cos^2 u$. 44. $z'_u = \frac{2v^2}{u} \left(\frac{1}{u^2 + v^2} - \frac{\ln(u^2 + v^2)}{u^2} \right)$; $z'_v = \frac{2v}{u^2} \left(\ln(u^2 + v^2) +$

$+ \frac{v^2}{u^2 + v^2} \right)$. 45. $y' = \frac{2xy + y^2}{3y^2 - x^2 - 2xy}$. 46. $y' = \frac{ye^{xy} - ye^x - e^y}{xe^y + e^x - xe^{xy}}$. 47. $y' = \frac{y^2}{1 - xy}$.

$$48. y' = \frac{2y}{x(y-1)}. \quad 49. y' = \frac{\sin xy \cos xy + xy}{2y \cos^2 xy - x^2}. \quad 50. z'_x = -\frac{c^2 x}{a^2 z}; \quad z'_y = \frac{c^2 y}{b^2 z}.$$

$$51. \quad z'_x = -\frac{yz}{xy + z^2}; \quad z'_y = -\frac{xz}{xy + z^2}. \quad 52. \quad z'_x = \frac{yz(\sin z - 1)}{\cos z + xy(1 - \sin z)};$$

$$z'_y = \frac{xz(\sin z - 1)}{\cos z + xy(1 - \sin z)}. \quad 53. \quad z'_x = 1, z'_y = \frac{1}{2}. \quad 54. \quad z'_x = z'_y = \frac{1}{2}. \quad 55. \quad z''_{xx} =$$

$$= 2y^3 - 18xy; \quad z''_{xy} = 6xy^2 - 9x^2; \quad z''_{yy} = 6x^2 y. \quad 56. \quad z''_{xx} = 12x^2 + 6y^2; \quad z''_{xy} = 12xy;$$

$$z''_{yy} = 6x^2 + 12y^2. \quad 57. \quad z''_{xx} = \frac{6y^2}{x^4}; \quad z''_{xy} = -\frac{4y}{x^2}; \quad z''_{yy} = \frac{2}{x^2}. \quad 58. \quad z''_{xx} = -\frac{1}{(x+y^2)^2};$$

$$z''_{xy} = -\frac{2y}{(x+y^2)^2}; \quad z''_{yy} = \frac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2}. \quad 59. \quad z''_{xx} = 2\cos(x+y) - x\sin(x+y);$$

$$z''_{xy} = -x\sin(x+y); \quad z''_{yy} = \cos(x+y) - x\sin(x+y) \quad 60. \quad z''_{xx} = \frac{10y}{(x-y)^3};$$

$$z''_{xy} = -\frac{5(x+y)}{(x-y)^3}; \quad z''_{yy} = \frac{10x}{(x-y)^3}. \quad 61. \quad 4. \quad 62. \quad \text{Так.} \quad 64. \quad 2x - 4y - z + 6 = 0;$$

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z}{-1}. \quad 65. \quad 2x + 2y - z - 6 = 0; \quad \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{-1}.$$

$$66. \quad x - y - 2z + 1 = 0; \quad \frac{x - \pi/4}{1} = \frac{y - \pi/4}{-1} = \frac{z - 1/2}{-2}. \quad 67. \quad x - y + 2z - \frac{\pi}{2} = 0;$$

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z - \pi/2}{2}. \quad 68. \quad x + y - 4z = 0; \quad \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-4}.$$

$$69. \quad 5x + 3y - 3z - 11 = 0; \quad \frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{-3}. \quad 70. \quad 12x + 4y - 3z - 21 = 0;$$

$$\frac{x-2}{12} = \frac{y}{4} = \frac{z+3}{-3}. \quad 71. \quad z_{\min}(0;3) = -9. \quad 72. \quad \text{Екстремуму в точці } (3;-1) \text{ немає.}$$

$$73. \quad z_{\max}(0;0) = 10. \quad 74. \quad z_{\min}(3;3) = 0; \text{ у стаціонарній точці } (0;0) \text{ екстремуму}$$

$$\text{немає.} \quad 75. \quad z_{\min}(-1;-1) = -2; \quad z_{\min}(1;1) = -2; \text{ у точці } (0;0) \text{ екстремуму немає.}$$

$$76. \quad z_{\min}(-2;0) = -\frac{2}{e}.$$

Глава 7

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

§1. Невизначений інтеграл

1.1. Безпосереднє інтегрування

Обчислити інтеграли:

1. $\int (6x^3 - 3x^2 + 2x - 5)dx.$
2. $\int \left(x^2 - 2x\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + \frac{5}{x} \right) dx.$
3. $\int \left(5^x - \frac{3}{\cos^2 x} + \frac{4}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx.$
4. $\int (x^2 - 1)(x^3 + 4) dx.$
5. $\int \frac{5^x}{3^{2x}} dx.$
6. $\int \frac{\sqrt[3]{x} + 2x - x^4}{x^5} dx.$
7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}.$
8. $\int \frac{x^2 + 2}{1 + x^2} dx.$
9. $\int \operatorname{ctg}^2 x dx.$
10. $\int \frac{(x+2)^3}{x^2} dx.$
11. $\int 5^{\frac{2+11x}{4}} dx.$
12. $\int (2x+5)^{10} dx.$
13. $\int \operatorname{ctg}(4-5x) dx.$
14. $\int \frac{dx}{2x^2 - 18}.$
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}}.$
16. $\int \frac{dx}{4x^2 + 64}.$
17. $\int \operatorname{tg} \frac{7x+1}{9} dx.$
18. $\int \left(3 \sin 6x - \frac{2}{5x-1} + e^{\frac{x}{3}} \right) dx.$
19. $\int \left(\frac{3}{5x^2+8} - \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} \right) dx.$

1.2. Метод заміни змінної (метод підстановки)

20. $\int x^2 \sin 2x^3 dx.$
21. $\int e^{2\cos x} \sin x dx.$
22. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+2x^2}}.$
23. $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^{10}-2}}.$
24. $\int \sqrt[3]{1+x^3} x^2 dx.$
25. $\int \frac{e^{-x} dx}{9+e^{-2x}}.$
26. $\int x^3 e^{-2x^4} dx.$
27. $\int \frac{1}{x} \cdot 2^{\ln x} dx.$
28. $\int \frac{\cos 5x dx}{\sqrt[6]{1-2\sin 5x}}.$
29. $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} dx.$
30. $\int \frac{dx}{(1+x^2) \operatorname{arctg}^3 x}.$
31. $\int \frac{\sin x}{e^{\cos x}} dx.$
32. $\int \frac{(2\ln x + 3)^3}{x} dx.$
33. $\int \frac{2^x dx}{9-4^x}.$
34. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx.$
35. $\int \frac{dx}{x \sin^2(\ln x)}.$
36. $\int \frac{e^{\arcsin 2x}}{\sqrt{1-4x^2}} dx.$
37. $\int \frac{\sin \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx.$
38. $\int \frac{\sqrt{x} dx}{x+3}.$

$$39. \int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}. \quad 40. \int \frac{dx}{e^x + 7}. \quad 41. \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}.$$

1. 3. Метод інтегрування частинами

$$42. \int x \cos x dx. \quad 43. \int x \sin \frac{x}{4} dx. \quad 44. \int (2x-3) \cdot 4^x dx. \quad 45. \int (2-x)e^{-x} dx.$$

$$46. \int x^2 e^{3x} dx. \quad 47. \int \lg x dx. \quad 48. \int \arcsin x dx. \quad 49. \int \operatorname{arctg} 3x dx.$$

$$50. \int x \operatorname{arctg} x dx. \quad 51. \int \sqrt{x} \ln x dx. \quad 52. \int e^{2x} \cos 3x dx. \quad 53. \int \frac{xdx}{\cos^2 6x}.$$

$$54. \int \frac{\ln x dx}{x^3}. \quad 55. \int \sqrt{4+x^2} dx. \quad 56. \int \sin(\ln x) dx.$$

1. 4. Інтегрування раціональних функцій

$$57. \int \frac{dx}{x^2 + 6x + 25}. \quad 58. \int \frac{dx}{2x^2 - 2x + 3}. \quad 59. \int \frac{xdx}{(x+1)(2x+1)}.$$

$$60. \int \frac{dx}{x^2(x-1)}. \quad 61. \int \frac{dx}{x(x+1)(x^2+1)}. \quad 62. \int \frac{2x-1}{x^3+4x^2-5x} dx.$$

$$63. \int \frac{x^5 + 2x^4 + 3}{x^2 - 1} dx. \quad 64. \int \frac{x^3 dx}{x^2 + 2x + 1}. \quad 65. \int \frac{2x+1}{x^3+x} dx.$$

$$66. \int \frac{3x-1}{x^2-4x+8} dx. \quad 67. \int \frac{dx}{x^4-x^2}. \quad 68. \int \frac{x-4}{x^3+x^2+x} dx.$$

$$69. \int \frac{x-3}{x^3-4x^2} dx. \quad 70. \int \frac{x^4}{x^4-16} dx.$$

1.5. Інтегрування функцій, раціонально залежних від тригонометричних

$$71. \int \frac{dx}{5+3\cos x}. \quad 72. \int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}. \quad 73. \int \frac{dx}{1+\sin^2 x}.$$

$$74. \int \frac{dx}{5-\sin^2 x+2\cos^2 x}. \quad 75. \int \frac{dx}{\sin^3 x}. \quad 76. \int \frac{dx}{\cos^6 x}. \quad 77. \int \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[4]{\sin x}}.$$

$$78. \int \frac{\sin^3 x dx}{1+\cos x}. \quad 79. \int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^4 x}. \quad 80. \int \frac{\cos^5 x dx}{\sin^4 x}. \quad 81. \int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^7 x}.$$

$$82. \int \sin^2 \frac{x}{3} dx. \quad 83. \int \cos^3 2x dx. \quad 84. \int \cos^3 x \sin^4 x dx. \quad 85. \int \sin x \sin 3x dx.$$

$$86. \int \sin 6x \cos 7x dx. \quad 87. \int \frac{\operatorname{tg} x dx}{1 + \operatorname{tg} x}. \quad 88. \int \operatorname{ctg}^3 x dx.$$

1. 6. Інтегрування деяких ірраціональних функцій

$$89. \int \frac{1 + \sqrt[4]{x}}{x + \sqrt{x}} dx. \quad 90. \int \frac{dx}{x(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2})}. \quad 91. \int \frac{xdx}{\sqrt[3]{2x-3}}. \quad 92. \int \frac{\sqrt{x+2} + 3}{\sqrt{x+2} - 4} dx.$$

$$93. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}. \quad 94. \int \frac{dx}{\sqrt{5 + 7x - 3x^2}}. \quad 95. \int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2 - 2x + 1}}.$$

$$96. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4 - x^2}}. \quad 97. \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 25)^3}}. \quad 98. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 9}}. \quad 99. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 25}}.$$

$$100. \int x^2 \sqrt{9 - x^2} dx. \quad 101. \int \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{x^2} dx. \quad 102. \int \frac{dx}{x\sqrt{1 + x^2}}.$$

§ 2. Визначений інтеграл

Обчислити інтеграли:

$$103. \int_2^3 (1 + 2x + 3x^2) dx. \quad 104. \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11 + 5x)^2}. \quad 105. \int_1^8 \frac{2 + 5\sqrt[3]{x}}{x^3} dx.$$

$$106. \int_1^4 \frac{dx}{3x - 2} \quad 107. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx. \quad 108. \int_0^{\frac{\pi}{6}} \operatorname{ctg} 3x dx. \quad 109. \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{\sqrt{4 - 9x^2}}.$$

$$110. \int_2^5 \frac{dx}{x^2 + 2x + 10}. \quad 111. \int_0^1 \frac{xdx}{1 + x^4}. \quad 112. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx. \quad 113. \int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx.$$

$$114. \int_1^2 \frac{e^x dx}{x^2}. \quad 115. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + 5 \operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx. \quad 116. \int_0^1 (e^x - 1)^4 e^x dx. \quad 117. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3 + 2 \cos x}.$$

$$118. \int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}. \quad 119. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1 + 2 \sin^2 x}. \quad 120. \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx. \quad 121. \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^5}}.$$

$$122. \int_4^9 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x-1}}. \quad 123. \int_2^{\frac{4}{\sqrt{3}}} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} dx. \quad 124. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \sin 2x dx. \quad 125. \int_0^{\pi} x \cos x dx.$$

$$126. \int_0^1 x e^{-x} dx. \quad 127. \int_0^3 x \operatorname{arctg} x dx. \quad 128. \int_0^{e-1} \ln(x+1) dx. \quad 129. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\cos^2 x}.$$

$$130. \int_0^1 \arcsin x dx. \quad 131. \int_0^{\pi} x \sin \frac{x}{2} dx. \quad 132. \int_1^e \frac{\ln x dx}{x^2}.$$

§3. Невласні інтеграли

3.1. Невласні інтеграли 1-го роду

Обчислити інтеграли з нескінченими межами або встановити їх розбіжність:

$$133. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}. \quad 134. \int_1^{+\infty} \cos \frac{\pi x}{4} dx. \quad 135. \int_1^{+\infty} e^{-3x+2} dx. \quad 136. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}.$$

$$137. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}. \quad 138. \int_{-\infty}^{-5} \frac{dx}{(3x-1)^2}. \quad 139. \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^2-5}. \quad 140. \int_{-\infty}^{-1} e^{7-2x} dx.$$

$$141. \int_{-\infty}^3 \frac{dx}{x^2+3}. \quad 142. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x+5}. \quad 143. \int_0^{+\infty} \frac{xdx}{x^2+3}. \quad 144. \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}.$$

$$145. \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x dx}{x^2+1}. \quad 146. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{4+5x^2}. \quad 147. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}. \quad 148. \int_0^{+\infty} x \cos x dx.$$

$$149. \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx. \quad 150. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)}. \quad 151. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+17}. \quad 152. \int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-1)^2}.$$

Дослідити збіжність інтегралів:

$$153. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}. \quad 154. \int_2^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^4-1}}. \quad 155. \int_0^{+\infty} \frac{\cos x dx}{x^2+4}. \quad 156. \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^2}.$$

$$157. \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx. \quad 158. \int_1^{+\infty} \frac{(5+\cos x) dx}{\sqrt[3]{x^2}}. \quad 159. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+\cos^2 x}}.$$

3.2. Невласні інтеграли 2-го роду

Обчислити інтеграли або встановити їх розбіжність:

$$160. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}. \quad 161. \int_2^4 \frac{dx}{4-x}. \quad 162. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \quad 163. \int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}. \quad 164. \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^4}.$$

$$\begin{aligned}
165. & \int_{-2}^3 \frac{dx}{x^2 - x - 6}. & 166. & \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 6x + 5}}. & 167. & \int_0^{\pi/4} \frac{x dx}{\sin x^2}. & 168. & \int_1^e \frac{dx}{x \sqrt{\ln^3 x}}. \\
169. & \int_0^{\frac{1}{\pi}} \frac{\cos \frac{1}{x} dx}{x^2}. & 170. & \int_0^{\pi^2/9} \frac{\sin^2 \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx. & 171. & \int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{8 - x^3}}. & 172. & \int_{-1}^0 \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1 - x^2}}. \\
173. & \int_0^1 \frac{dx}{(1 + x^2) \operatorname{arctg} x}. & 174. & \int_0^3 \frac{dx}{2x^2 + x^4}. & 175. & \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 - \cos x}. & 176. & \int_0^1 x \ln x dx. \\
177. & \int_{-1}^2 \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}}. & 178. & \int_0^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{4 - x^2}}.
\end{aligned}$$

Дослідити на збіжність інтеграли:

$$\begin{aligned}
179. & \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4}}. & 180. & \int_1^2 \frac{dx}{(x-1) \sqrt{\sin(x-1)}}. & 181. & \int_{-1/2}^2 \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{x^2 - x - 2}}. \\
182. & \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2 + x^3}}. & 183. & \int_0^1 \frac{dx}{\sin x}.
\end{aligned}$$

§4. Застосування визначеного інтеграла до задач геометрії

4.1. Обчислення площ плоских фігур

Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$\begin{aligned}
184. & y = 3x + 1, x = 0, x = 2, y = 0. & 185. & y = 3^x, y = 0, x = 1, x = 2. \\
186. & y = x, y = 2x, x = 3. & 187. & y = x^2, y = 4. & 188. & y = x^2 + 4x, y = 0. \\
189. & y = 6x - x^2 \text{ та віссю } Ox. & 190. & x = -y^2 + 8y - 7, x = 0. \\
191. & y = \frac{4}{x}, x + y - 5 = 0. & 192. & y = x^2, y = \frac{1}{x^2}, x = 2, y = 0. \\
193. & y = x + 1, y = \cos x. & 194. & y = \ln x, x - y - 1 = 0, y = -1. \\
195. & \text{Знайти площу фігури, обмеженої еліпсом} \begin{cases} x = a \sin t, \\ y = b \cos t. \end{cases} \\
196. & \text{Знайти площу фігури, обмеженої астроїдою} \begin{cases} x = a \sin^3 t, \\ y = a \cos^3 t. \end{cases}
\end{aligned}$$

197. Обчислити площу фігури, яка обмежена однією аркою циклоїди

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \text{ та віссю } Ox.$$

198. Знайти площу фігури, обмеженої кардіоїдою $\begin{cases} x = a(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = a(2 \sin t - \sin 2t) \end{cases}$.

199. Знайти площу однієї пелюстки "рози" $\rho = a \sin 2\varphi$.

200. Знайти площу фігури $\rho = a \sin 3\varphi$.

201. Знайти площу фігури, обмеженої лемніскатою Бернуллі $\rho^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$.

202. Знайти площу фігури, обмеженої кривою $\rho = a \operatorname{tg} \varphi$ ($a > 0$) і променем $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

203. Знайти площу фігури, обмеженої першим та другим витком спіралі Архімеда $\rho = a\varphi$ і полярною віссю.

204. Знайти площу петлі декартового листа $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

4.2. Довжина дуги гладкої кривої

205. Знайти довжину кола $x^2 + y^2 = R^2$.

206. Обчислити довжину дуги кривої $y^2 = x^3$ від $x = 0$ до $x = 1$ ($y \geq 0$).

207. Обчислити довжину дуги кривої $y = 2\sqrt{x}$ від $x = 0$ до $x = 1$.

208. Обчислити довжину ланцюгової лінії $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ між точками з абсцисами $x = 0$ і $x = 1$.

209. Обчислити довжину дуги кривої $x = -\ln \cos y$ від точки $y = 0$ до $y = \frac{\pi}{3}$.

210. Обчислити довжину дуги кривої $y = 1 - \ln \cos x$, де $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

211. Знайти довжину астроїди $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

212. Знайти довжину однієї арки циклоїди $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$.

213. Обчислити довжину дуги кривої $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t \end{cases}$ від $t = 0$ до $t = \ln \pi$.

214. Знайти довжину петлі кривої $\begin{cases} x = a(t^2 + 1), \\ y = \frac{a}{3}(t^3 - 3t) \end{cases}$.

215. Знайти довжину кардіоїди $\rho = 2a(1 - \cos \varphi)$.

216. Знайти довжину замкненої кривої $\rho = a \sin^2 \frac{\varphi}{3}$.

217. Знайти довжину першого витка спіралі Архімеда $\rho = a\varphi$.

218. Знайти довжину замкненої кривої $\rho = a \sin \varphi$.

4.3. Об'єм тіла обертання

219. Знайти об'єм кулі $x^2 + y^2 = R^2$.

Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями:

220. $y = -3x + 2, y = -x, x = -2, x = 0$. 221. $y = x^2 - 9, y = 0$.

222. $y = x^2 + 1, y = 3x - 1$. 223. $y = 2x - x^2, x + y - 2 = 0, y \geq 0$.

224. $y^2 = x + 2, x = y, y \geq 0$. 225. $y = \cos x, y = \sin x, x = 0$.

226. $y = \sqrt{1 - x^2}, x + y + 1 = 0$. 227. $y = \sqrt{4 - x}, y = \frac{x}{3}, y = 0$.

228. $y = x^3, y = 8, x = 0$. 229. $xy = 4, x = 1, x = 3y + 1$.

230. $y = x^2, y = \frac{1}{x}, x = 3$ і віссю Ox .

231. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої лініями $y^2 + x - 1 = 0$ та $x = 0$.

232. Фігура, обмежена лініями $y^3 = 4x^2$ та $y = 2$, обертається навколо осі ординат. Знайти об'єм утвореного тіла.

233. Знайти об'єм еліпсоїда, отриманого обертанням навколо осі Oy еліпса $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

234. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лінією $\begin{cases} x = a \sin t, \\ y = b \sin 2t \end{cases}$, якщо $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

235. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox однієї арки циклоїди $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$.

236. Знайти об'єм тіла, отриманого обертанням кривої $\rho = a \sin \varphi$ навколо полярної осі.

4. 4. Обчислення площі поверхні тіл обертання

237. Знайти площу поверхні сфери, як тіла обертання.

238. Знайти бічну поверхню параболоїда, утвореного обертанням параболу $y^2 = 8x$ навколо осі Ox на відрізку $[0; 2]$.

239. Обчислити площу поверхні тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лінією $y = \sqrt{x}$, якщо $0 \leq x \leq 1$.

240. Обчислити площу поверхні тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, що обмежена лініями $y^2 = 4 + x$ і $x = 2$.

241. Обчислити площу поверхні тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, що обмежена кривою $y = \frac{1}{3}x^3$ від точки $O(0; 0)$ до точки $A\left(1; \frac{1}{3}\right)$.

242. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox дуги синусоїди $y = \sin 2x$ від $x = 0$ до $x = \frac{\pi}{2}$.

243. Обчислити поверхню тора, утвореного обертанням кола $x^2 + (y - 4)^2 = 4$ навколо осі Ox .

244. Знайти площу поверхні, отриманої обертанням прямої $y = 4x$ навколо осі Oy від $y = 1$ до $y = 4$.

245. Обчислити поверхню, утворену обертанням еліпса $4x^2 + y^2 = 4$ навколо осі Oy .

246. Фігура, обмежена лініями $x^2 = y + 2$ і $y = 1$, обертається навколо осі ординат. Обчислити площу поверхні утвореного тіла.

247. Знайти поверхню тіла, утвореного обертанням однієї арки циклоїди

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \text{ навколо осі абсцис.}$$

248. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням астроїди $\begin{cases} x = a \sin^3 t, \\ y = a \cos^3 t \end{cases}$

навколо осі абсцис.

249. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням кардіоїди $\rho = a(1 + \cos \varphi)$ навколо полярної осі.

250. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням лемніскати $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ навколо полярної осі.

251. Знайти площу поверхні тіла, утвореного обертанням кривої $\rho = \cos^2 \varphi$ навколо полярної осі, якщо $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Відповіді

1. $\frac{3}{2}x^4 - x^3 + x^2 - 5x + C$.
2. $\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{5}\sqrt{x^5} + \frac{9}{4}\sqrt[3]{x^4} + 5\ln|x| + C$.
3. $\frac{5^x}{\ln 5} - 3\operatorname{tg} x + 4\arcsin x + C$.
4. $\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} - 4x + C$.
5. $\frac{\left(\frac{5}{9}\right)^x}{\ln \frac{5}{9}} + C$.
6. $-\frac{3}{11\sqrt[3]{x^{11}}} - \frac{2}{3x^3} - \ln|x| + c$.
7. $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C$.
8. $x + \operatorname{arctg} x + C$.
9. $-\operatorname{ctg} x - x + C$.
10. $\frac{1}{2}x^2 + 6x + 18\ln|x| - \frac{8}{x} + C$.
11. $\frac{4}{11\ln 5} \cdot 5^{\frac{2+11x}{4}} + C$.
12. $\frac{1}{22}(2x+5)^{11} + C$.
13. $-\frac{1}{5}\ln|\sin(4-5x)| + C$.
14. $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C$.
15. $\frac{1}{5}\arcsin 5x + C$.
16. $\frac{1}{16}\operatorname{arctg} \frac{x}{4} + C$.
17. $-\frac{9}{7}\ln\left|\cos \frac{7x+1}{9}\right| + C$.
18. $-\frac{1}{2}\cos 6x - \frac{2}{5}\ln|5x-1| + 3e^{\frac{x}{3}} + C\ln|x|$.
19. $\frac{3}{2\sqrt{10}}\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}x}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\arcsin 2x + C$.
20. $-\frac{1}{6}\cos 2x^3 + C$.
21. $-\frac{1}{2}e^{2\cos x} + C$.
22. $\frac{1}{2}\sqrt{1+2x^2} + C$.
23. $\frac{1}{5}\ln|x^5 + \sqrt{x^{10}-2}| + C$.
24. $\frac{1}{4}\sqrt[3]{(1+x^3)^4} + C$.
25. $-\frac{1}{3}\operatorname{arctg} \frac{e^{-x}}{3} + C$.
26. $-\frac{1}{8}e^{-2x^4} + C$.
27. $\frac{2^{\ln x}}{\ln 2} + C$.

28. $-\frac{3}{25}\sqrt[6]{1-2\sin 5x} + C.$ 29. $\frac{2}{3}\sqrt{\arcsin^3 x} + C.$ 30. $-\frac{1}{2\operatorname{arctg}^2 x} + C.$

31. $e^{-\cos x} + C.$ 32. $\frac{1}{8}(2\ln x + 3)^4 + C.$ 33. $\frac{1}{6\ln 2}\ln\left|\frac{3+2^x}{3-2^x}\right| + C.$ 34. $2e^{\sqrt{x}} + C.$

35. $\operatorname{ctg}(\ln x) + C.$ 36. $\frac{1}{2}e^{\arcsin 2x} + C.$ 37. $-3\cos\sqrt[3]{x} + C.$ 38. $2\sqrt{x} -$
 $-2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{3}} + C.$ 39. $\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right| + C.$ 40. $-\frac{1}{7}\ln(1+7e^{-x}) + C.$

Підстановка $1+7e^{-x}=t.$ 41. $\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right| + C.$ 42. $x\sin x + \cos x + C.$

43. $-4x\cos\frac{x}{4} + 16\sin\frac{x}{4} + C.$ 44. $\frac{1}{\ln 4}(2x-3)\cdot 4^x - \frac{2}{\ln^2 4}\cdot 4^x + C.$

45. $e^{-x}(x-1) + C.$ 46. $e^{3x}\left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{2}{27}\right) + C.$ 47. $x\lg x - \frac{1}{\ln 10}x + C.$

48. $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$ 49. $x\operatorname{arctg} 3x - \frac{1}{6}\ln(1+9x^2) + C.$ 50. $\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x -$
 $-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$ 51. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\left(\ln|x| - \frac{2}{3}\right) + C.$ 52. $\frac{9}{13}e^{2x}\left(\frac{1}{3}\sin 3x + \frac{2}{9}\cos 3x\right) +$
 $+C.$ 53. $\frac{1}{6}x\operatorname{tg} 6x + \frac{1}{36}\ln|\cos 6x| + C.$ 54. $-\frac{1}{2x^2}\left(\ln|x| + \frac{1}{2}\right) + C.$ 55. $\frac{1}{2}x\sqrt{4+x^2} +$
 $+2\ln|x + \sqrt{4+x^2}| + C.$ 56. $\frac{1}{2}x(\sin \ln x - \cos x \ln x) + C.$ *Вказівка: попередньо*
зробити заміну $t = \ln x, dx = e^t dt.$ 57. $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{4} + C.$ 58. $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{5}} +$
 $+C.$ 59. $\ln\left|\frac{x+1}{\sqrt{2x+1}}\right| + C.$ 60. $\frac{1}{x} + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.$ 61. $\frac{1}{4}\ln\frac{x^4}{(x+1)^2(x^2+1)} -$
 $-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$ 62. $\ln_{30}\sqrt{\frac{x^6(x-1)^5}{(x+5)^{11}}} + C.$ 63. $\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x +$
 $+ \ln\frac{|x-1|^3}{(x+1)^2} + C.$ 64. $\frac{x^2}{2} - x + \frac{2}{x+1} + 3\ln|x+1| + C.$ 65. $\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) +$

$$\begin{aligned}
& +2\operatorname{arctg} x + C. \quad 66. \frac{3}{2} \ln(x^2 - 4x + 8) + \frac{5}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{2} + C. \quad 67. \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + \frac{1}{x} + C. \\
68. \quad & 4 \ln \left| \frac{x+1}{x} \right| - \frac{5}{x+1} + C. \quad 69. \frac{1}{16} \ln \left| \frac{x-4}{x} \right| - \frac{3}{4x} + C. \quad 70. \quad x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| - \\
& - \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C. \quad 71. \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{2} \right) + C. \quad 72. \quad -\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2} + C. \quad 73. \quad -\frac{1}{\operatorname{tg} x} \\
74. \quad & \frac{1}{2\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2\operatorname{tg} x}{\sqrt{7}} \right) + C. \quad 75. \quad -\frac{1}{8} \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \frac{1}{8} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + C. \quad 76. \quad \operatorname{tg} x + \\
& + \frac{2}{3} \operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x + C. \quad 77. \quad \frac{4}{3} \sqrt[4]{\sin^3 x} - \frac{4}{11} \sqrt[4]{\sin^{11} x} + C. \quad 78. \quad \frac{(1 - \cos x)^2}{2} + C. \\
79. \quad & -\frac{1}{3 \operatorname{ctg}^3 x} + C. \quad 80. \quad -\frac{1}{3 \sin^3 x} + \frac{2}{\sin x} + \sin x + C. \quad 81. \quad \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x + \frac{1}{6} \operatorname{tg}^6 x + C. \\
82. \quad & \frac{1}{2} x - \frac{3}{4} \sin \frac{2x}{3} + C. \quad 83. \quad \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{6} \sin^3 2x + C. \quad 84. \quad \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{1}{7} \sin^7 x + C. \\
85. \quad & \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{8} \sin 4x + C. \quad 86. \quad \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{26} \cos 13x + C. \quad 87. \quad \frac{1}{4} \ln(1 + \operatorname{tg}^2 x) + \\
& + \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \ln|1 + \operatorname{tg} x| + C. \quad 88. \quad -\frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 x + \frac{1}{2} \ln(\operatorname{ctg}^2 x + 1) + C. \quad 89. \quad 4\sqrt[4]{x} + \\
& + 2 \ln(\sqrt{x} + 1) - 4 \operatorname{arctg} \sqrt[4]{x} + C. \quad 90. \quad -\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{6}{\sqrt[6]{x}} + 6 \ln \frac{\sqrt[6]{x} + 1}{\sqrt[6]{x}} + C. \\
91. \quad & \frac{3}{20} \sqrt[3]{(2x-3)^5} + \frac{9}{8} \sqrt[3]{(2x-3)^2} + C. \quad 92. \quad x + 2 + 14\sqrt{x+2} + 56 \ln|\sqrt{x+2} - 4| + \\
& + C. \quad 93. \quad \ln \left| x + 2 + \sqrt{(x+2)^2 + 1} \right| + C. \quad 94. \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{6x-7}{\sqrt{109}} + C. \quad 95. \quad -\ln \left| \frac{1}{x} - 1 + \right. \\
& \left. + \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 5} \right| + C. \quad 96. \quad 2 \arcsin \frac{x}{2} - \frac{x}{2} \sqrt{4-x^2} + C. \quad 97. \quad \frac{x}{25\sqrt{25+x^2}} + C. \\
98. \quad & \frac{1}{9x} \sqrt{x^2-9} + C. \quad 99. \quad \frac{\sqrt{x^2-25}}{25x} + C. \quad 100. \quad \frac{81}{8} \left(\arcsin \frac{x}{3} - \frac{1}{4} \sin \left(4 \arcsin \frac{x}{3} \right) \right) + \\
& + C. \quad 101. \quad -\frac{1}{\sin \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{3} \right)} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{3} + 1 \right)}{\sin \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{3} - 1 \right)} \right| + C. \quad 102. \quad \ln \frac{|x|}{1 + \sqrt{1+x^2}} + C.
\end{aligned}$$

103. 25. 104. $\frac{1}{6}$. 105. $\frac{249}{64}$. 106. $\frac{1}{3}\ln 10$. 107. $\frac{\pi}{4}$. 108. $\frac{2}{3}\ln 2$. 109. $\frac{\pi}{9}$.
110. $\frac{1}{3}\operatorname{arctg} 2 - \frac{\pi}{12}$. 111. $\frac{\pi}{8}$. 112. $\frac{1}{3}$. 113. $\frac{3}{2}$. 114. $e - \sqrt{e}$. 115. $\frac{8 + \sqrt{3}}{3}$.
116. $\frac{(e-1)^5}{5}$. 117. $\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{5}}$. 118. $\frac{32}{3}$. 119. $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. 120. $1 - \frac{\pi}{4}$.
121. $\frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{11}{24}$. 122. $7 + 2\ln 2$. 123. $\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{3}$. 124. $\frac{2}{5}$. 125. -2. 126. $1 - \frac{2}{e}$.
127. $5\operatorname{arctg} 3 - \frac{3}{2}$. 128. 1. 129. $\frac{5\sqrt{3}}{18}\pi + \ln \frac{1}{\sqrt{3}}$. 130. $\frac{\pi}{2} + 1$. 131. 4.
132. $1 - \frac{2}{e}$. 133. Розбігається. 134. Розбігається. 135. $\frac{1}{3e}$. 136. Розбігається.
137. $\frac{\pi}{4}$. 138. $\frac{1}{48}$. 139. $-\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln \frac{7-3\sqrt{5}}{2}$. 140. Розбігається. 141. $\frac{5\pi}{6\sqrt{3}}$.
142. Розбігається. 143. Розбігається. 144. Розбігається. 145. $\frac{\pi}{2}$.
146. Розбігається. 147. Розбігається. 148. Розбігається. 149. $\frac{1}{2}$. 150. $\ln 2$.
151. $\frac{\pi}{4}$. 152. $\frac{1}{8}(3 - 2\ln 3)$. 153. Збігається. 154. Розбігається. 155. Збігається.
156. Збігається. 157. Збігається. 158. Розбігається. 159. Розбігається. 160. 2.
161. Розбігається. 162. $\frac{\pi}{2}$. 163. $6\sqrt[3]{2}$. 164. Розбігається. 165. Розбігається.
166. Розбігається. 167. Розбігається. 168. Розбігається. 169. Розбігається.
170. $\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{12}$. 171. $\frac{4}{3}$. 172. $-\frac{\pi^2}{36}$. 173. Розбігається. 174. Розбігається.
175. Розбігається. 176. $\frac{1}{4}$. 177. $\frac{\pi}{3}$. 178. $\frac{256}{15}$. 179. Збігається. 180. Розбігається.
181. Збігається. 182. Збігається. 183. Збігається. 184. 8.
185. $\frac{6}{\ln 3}$. 186. $\frac{9}{2}$. 187. $\frac{16}{3}$. 188. $\frac{32}{3}$. 189. 36. 190. 36. 191. $7,5 - 4\ln 4$.
192. $\frac{5}{6}$. 193. $\frac{3}{2}$. 194. $\frac{1-2e}{2e^2}$. 195. πab . 196. $\frac{3}{8}\pi a^2$. 197. $3\pi a^2$. 198. $6\pi a^2$.

199. $\frac{1}{8}\pi a^2$. 200. $\frac{1}{4}\pi a^2$. 201. $2a^2$. 202. $\frac{a^2(4-\pi)}{8}$. 203. $8\pi^3 a^2$. 204. $\frac{3}{2}a^2$.
 205. $2\pi R$. 206. $\frac{\sqrt{2197}-8}{27}$. 207. $\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})$. 208. $\frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right)$. 209.
 $\ln \operatorname{tg} \frac{5\pi}{12}$. 210. $\ln \left| \operatorname{tg} \frac{3\pi}{8} \right|$. 211. $6a$. 212. $8a$. 213. $\sqrt{2}(\pi - 1)$. 214. $4a\sqrt{3}$.
 215. $16a$. 216. $\frac{3\pi a}{2}$. 217. $\frac{a}{2}\left(2\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \ln\left|2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}\right|\right)$. 218. πa .
 219. $\frac{4}{3}\pi R^3$. 220. $\frac{160}{3}\pi$. 221. $\frac{1296}{5}\pi$. 222. $\frac{19}{15}\pi$. 223. $\frac{13}{15}\pi$. 224. $\frac{19}{3}\pi$.
 225. $\frac{\pi}{2}$. 226. $\frac{16}{3}\pi$. 227. $\frac{13}{2}\pi$. 228. $\frac{768}{7}\pi$. 229. $\frac{89}{9}\pi$. 230. $\frac{13}{15}\pi$.
 231. $\frac{512}{15}\pi$. 232. π . 233. 64π . 234. $\frac{8}{15}\pi ab^2$. 235. $5\pi^2 a^3$. 236. $\frac{\pi^2 a^3}{4}$.
 237. $4\pi R^2$. 238. $\frac{32\pi}{3}(2\sqrt{2}-1)$. 239. $\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)$. 240. $\frac{62}{3}\pi$. 241. $\frac{\pi}{9}(2\sqrt{2}-1)$.
 242. $\frac{\pi}{2}\left(2\sqrt{5} + \ln(2 + \sqrt{5})\right)$. 243. $32\pi^2$. 244. $\frac{15\sqrt{17}}{16}\pi$. 245. $\frac{8\pi}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.
 246. $\frac{\pi}{6}(13\sqrt{13}-1)$. 247. $\frac{64}{3}\pi a^2$. 248. $\frac{12}{5}\pi R^2$. 249. $\frac{32}{5}\pi a^2$. 250. $2\pi a^2 \times$
 $\times (2 - \sqrt{2})$. 251. $\frac{43}{135}\pi$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: А.С.К., 2006.-648 с.
2. Овчинников П.П. та ін. Вища математика. У 2-х ч. Ч.1: Підручник.– К.: Техніка, 2004.-278 с.
3. Лунгу К.Н. и др. Сборник задач по высшей математике.1 курс.: Учебное пособие / Под ред. С.Н.Федина. – М.:Айрис-пресс, 2009.-576 с.
4. Шкіль М.І., Колесник Т.В. Вища математика. У 3-х кн. Кн.1: Підручник.– К: Либідь, 1994.-280 с.
5. Шкіль М.І., Колесник Т.В. Вища математика. У 3-х кн. Кн.2: Підручник.– К: Либідь, 1994.-352 с.
6. Вища математика: Збірник задач: Навч. посібник / За ред. В.П. Дубовика, І.І. Юрика. – К.: А.С.К., 2004.-480 с.
7. Шипачёв В.С. Задачник по высшей математике: Учебное пособие для вузов.- М.: Высшая школа, 2003.-304 с.
8. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч.1: Учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 2000.-304 с.

Навчальне видання

Кагадій Лариса Петрівна
Заєць Ірина Петрівна
Шинковська Ірина Леонідвна
Сушко Лариса Федорівна

ЗБІРНИК ЗАДАЧ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Навчальний посібник

Тем. план 2015, поз.

Підписано до друку Формат 60x84 1/16. Папір друк. Друк плоский.
Облік.-вид. арк. Умов. друк. арк. Тираж 100 пр. Замовлення №

Національна металургійна академія України
49600, м. Дніпропетровськ-5, пр. Гагаріна, 4

