МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

РОБОЧА ПРОГРАМА,
методичні вказівки та індивідуальні завдання до вивчення дисципліни «Вища математика» для студентів спеціальності 151 – Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології (бакалаврський рівень вищої освіти)

Частина 2

Друкується за планом видань навчальної та методичної літератури,
затвердженим Вченою радою НМетАУ
Протокол № 1 від 27.01.2017

Дніпро НМетАУ 2017

УДК 517(07)

Робоча програма, методичні вказівки та індивідуальні завдання до вивчення дисципліни «Вища математика» для студентів спеціальності 151 – Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології (бакалаврський рівень вищої освіти). У 2-х частинах. Частина 2 / Укл.: В.Л. Копорулін, Л.В. Моссаковська. – Дніпро: НМетАУ, 2017. – 116 с.

Наведені робоча програма до вивчення дисципліни «Вища математика» у III та IV семестрах, список рекомендованої літератури, методичні вказівки, супроводжені розв'язанням типових прикладів з докладними поясненнями, та варіанти контрольних завдань.

Призначена для студентів першого курсу спеціальності 151 – Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології заочної форми навчання (бакалаврський рівень вищої освіти).

Друкується за авторською редакцією

Укладачі: В.Л. Копорулін, канд. техн. наук, доц.
Л.В. Моссаковська, ст. викл.

Відповідальний за випуск В.Л. Копорулін, канд. техн. наук, доц.

Рецензент О.Ю. Потап канд. техн. наук, проф. (НМетАУ)

Підписано до друку 06.04.2017. Формат 60х84 1/16. Папір друк. Друк плоский.
Облік.-вид. арк. ____. Умов. друк. арк. ____. Тираж 100 пр. Замовлення №

Національна металургійна академія України
49600, м. Дніпро-5, пр. Гагаріна, 4

Редакційно-видавничий відділ НМетАУ

ЗМІСТ

ВСТУП

Вища математика без перебільшення є однією з найважливіших складових практично усіх природознавчих і технічних дисциплін. Тому її вивчення вкрай важливе для фундаментальної фахової підготовки сучасного інженера.

Лекції і практичні заняття, які проводяться для студентів заочної форми навчання, носять переважно оглядовий характер. Їх мета – створити уяву щодо загальної схеми побудови даного розділу математики, ознайомити з основними теоретичними відомостями і методами розв’язання типових задач. Головною ж формою навчання студента-заочника є самостійна робота. Вивчення теоретичних положень доцільно супроводжувати самостійним розв’язанням відповідних задач і лише після вироблення достатніх практичних навичок приступати до виконання завдань контрольної роботи. Необхідні консультації протягом навчального семестру надаються викладачами академії згідно із затвердженим розкладом.

Сьогодні в Інтернеті неважко знайти величезну кількість літератури з будь-якої теми, в тому числі і з вищої математики. Тому до списку рекомендованої літератури увійшли лише деякі з найбільш уживаних на думку авторів джерел. Рекомендації щодо їх використання дані у методичних вказівках до виконання кожної контрольної роботи. Консультації відносно інших підручників студент може отримати у викладача.

Р О Б О Ч А   П Р О Г Р А М А

навчальної дисципліни
«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

ІІІ семестр

Розподіл навчальних годин

Кількість годин					Кількість контр. робіт	Форма звітності
УСЬОГО	Аудиторних занять			Самостійної роботи		
	Усього	Лекцій	Практичних занять			
189	**36**	**20**	**16**	**153**	**2**	**екзамен**

Зміст програми

11. Подвійний і криволінійні інтеграли та їх застосування

37. Означення подвійного інтеграла у декартових координатах, умови його існування, геометричний зміст і основні властивості. Обчислення подвійного інтеграла у декартових та полярних координатах.

38. Обчислення площі плоскої фігури, об’єму тіла та площі поверхні.

39. Застосування подвійного інтеграла при розв’язуванні деяких задач механіки: обчислення статичних моментів, координат центру мас та моментів інерції плоскої платівки.

40. Поняття криволінійного інтеграла першого роду, його геометричний зміст і обчислення для різних способів завдання кривої.

41. Поняття криволінійного інтеграла другого роду, його фізичний зміст, обчислення, зв'язок із подвійним інтегралом (формула Гріна), незалежність від шляху інтегрування.

12. Диференціальні рівняння першого порядку

42. Задачі, які приводять до диференціальних рівнянь. Поняття звичайного диференціального рівняння першого порядку, загальний та частинний розв'язки, їх геометричний зміст. Задача Коші та її геометричний зміст. Теорема Коші (про існування і єдиність розв'язку задачі Коші). Диференціальні рівняння з відокремленими та відокремлюваними змінними.

43. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку та такі, що до них приводяться. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку, їх розв'язування методами Лагранжа (варіації довільної сталої) і Бернуллі. Рівняння Бернуллі.

44. Постановка і розв'язування задач геометричного і фізичного змісту, які приводять до звичайних диференціальних рівнянь першого порядку.

13. Диференціальні рівняння вищих порядків

45. Поняття звичайного диференціального рівняння вищого порядку. Розв'язок рівняння. Задача Коші.

46. Деякі типи диференціальних рівнянь вищих порядків, що допускають пониження порядку.

47. Поняття лінійного диференціального рівняння ***n***-го порядку. Загальні властивості.

48. Умови лінійної залежності і незалежності системи функцій. Визначник Вронського та його властивості. Фундаментальна система розв'язків лінійного однорідного рівняння, необхідна і достатня умова її утворення. Теорема про структуру загального розв'язку. Побудова рівняння за фундаментальною системою. Розв'язування лінійних однорідних диференціальних рівнянь вищих порядків зі сталими коефіцієнтами.

49. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння вищих порядків: теорема про структуру загального розв'язку, принцип суперпозиції частинних розв'язків. Розв'язування рівнянь зі сталими коефіцієнтами: метод варіації

довільних сталих (метод Лагранжа), підбір частинного розв’язку та його відшукання методом невизначених коефіцієнтів у випадку “спеціальної” правої частини.

50. Канонічні і нормальні системи звичайних диференціальних рівнянь. Розв’язок системи. Задача Коші. Розв’язування нормальних систем лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами методом послідовного виключення невідомих.

14. Числові ряди

51. Поняття числового ряду. Збіжність і розбіжність ряду. Ряд геометричної прогресії, ряд Діріхле. Необхідна умова збіжності. Достатня умова розбіжності. Залишок числового ряду. Основні властивості збіжних рядів.

52. Поняття факторіала. Достатні умови (ознаки) збіжності числових рядів з додатними членами: ознака порівняння у звичайному та граничному вигляді, ознака Д’Аламбера, “радикальна” ознака Коші, “інтегральна” ознака Маклорена-Коші.

53. Абсолютна і умовна збіжності знакозмінних числових рядів. Збіжність знакопочережних рядів (ознака Лейбніца). Властивості знакопочережних числових рядів.

15. Степеневі ряди та їх застосування

54. Поняття функціонального ряду. Область збіжності і залишок функціонального ряду, абсолютна і умовна збіжності.

55. Поняття рівномірної збіжності функціонального ряду. Властивості рівномірно збіжних рядів. Ознака Вейєрштрасса.

56. Степеневий ряд як частинний випадок функціонального ряду. Збіжність степеневих рядів (теорема Абеля). Радіус та інтервал збіжності степеневого ряду, їх обчислення. Область збіжності степеневого ряду. Основні властивості степеневих рядів.

57. Ряди Тейлора і Маклорена. Умови розвинення функції в ряд Тейлора. Формула Тейлора із залишковим членом у формі Лагранжа. Розвинення функцій в ряди Тейлора і Маклорена. Таблиця найпростіших розвинень та її застосування.

58. Наближені обчислення значень функцій, визначених інтегралів та відшукання частинних розв’язків деяких диференціальних рівнянь за допомогою степеневих рядів.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

ПІДРУЧНИКИ І НАВЧАЛЬНІ ПОСІБНИКИ

1. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. 2: Учеб. пособие для втузов. – М.: Высш. шк., 2000. – 416 с.

2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: А.С.К., 2006. – 648 с.

3. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. – М.: Айрис-пресс, 2009. – 608 с.

4. Шипачев В.С. Высшая математика: Учебник для вузов. – М.: Юрайт, Высшее образование, 2009. – 480 с.

ЗБІРНИКИ ЗАДАЧ

5. Вища математика: Збірник задач: Навч. посібник / В.П. Дубовик, І.І. Юрик, І.П.Вовкодав та ін.; За ред. В.П.Дубовика, І.І.Юрика. – К.: А.С.К., 2004. – 480 с.

6. Сборник задач по высшей математике. 2 курс / К.Н. Лунгу и др.; под ред. С.Н. Федина. – М.: Айрис-пресс, 2007. – 592 с.

7. Сборник задач по математике для втузов. В 4 частях. Ч. 2: Учеб. пособие для втузов / Под общ. ред. А.В. Ефимова и А.С. Поспелова. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 432 с.

8. Сборник задач по математике для втузов. В 4 частях. Ч. 3: Учеб. пособие для втузов / Под общ. ред. А.В. Ефимова и А.С. Поспелова. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 576 с.

КОНТРОЛЬНІ РОБОТИ

Виконання кожної контрольної роботи треба починати з вивчення теоретичних положень за наведеними посиланнями, причому це необхідно поєднувати з самостійним розв’язанням рекомендованих задач. До виконання контрольних завдань доцільно приступати тільки після вироблення достатніх практичних навичок. Типові приклади наведені з метою допомогти в цьому. Вони перенумеровані наступним чином: перша цифра означає порядковий номер контрольної роботи, друга цифра – порядковий номер прикладу. Перша цифра номеру рисунка означає порядковий номер контрольної роботи, друга цифра – його порядковий номер.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 5

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ

Рекомендується (скориставшись одним або двома з наведених нижче джерел)

– вивчити теоретичні положення за **[2]**, гл. 8, §§1.1-1.5, 2, 3, 4.1, 4.2, 6, гл. 10, §§ 1, 3.1-3.8; **[3]**, гл. X, §§ 47, 48.1 - 48.4, 49, 50, 51.1-51.4, 52, гл. XI, § 53, гл. XII, §§ 55, 56; **[4]**, гл. 13, §§ 1-7, гл. 15, §§ 1.1-1.6, 2 - 4;
– розібрати розв’язання задач у **[1]**, гл. I, §§ 1-6, гл. II, §§ 1-3, гл. IV;
– самостійно розв’язати задачі: **[1]**, №№ 10-12, 17, 19, 22, 23, 31, 34, 41, 42, 186, 188, 191, 197, 214, 217, 222, 515, 516, 523, 550, 551, 554, 568, 570, 603, 605, 611, 645, 647, 651, 652, 659, 660, 685, 686, 696, 697, 698, 703, 704, 721, 723, 725, 743, 744, 764, 766, 778, 779, 781, 797; **[5]**, гл. 8, №№ 2, 4, 43, 44, 48, 61, 66, 84, 86, 103, 105, 115, 121, 124, 133, 140, 206, 213, 214, 215, 217, 221, 227, 246-а, 246-б, 270 – 273, 291, 308 – 310, 315, 322, 339, 345, 350, 373, 376, 378, 395, 396, 405, 406, гл. 10, №№ 1, 3, 7, 9, 18, 24, 46, 48, 50, 51, 69, 71, 74, 76, 111, 116, 124, 130, 406 – 414, 429, 471 – 473, 477, 478, 491, 492, 537, 539; **[6]**, №№ 2.1.2 (а, б), 16, 19, 23, 25, 40, 64, 2.2.2, 4, 10, 27, 2.3.2, 3, 5, 12, 23, 2.6.2, 4, 7, 9, 12, 13, 17, 24, 27, 28, 30, 2.7.4, 6, 19, 26, 34, 38 – 40, 44, 45, 49, 58, 61, 78, 79, 81, 86, 87, 2.8.4, 5, 7, 8, 3.1.9, 10, 11, 16, 17, 21, 24, 27 - 29, 64, 3.2.8, 9, 13, 3.3.4, 5, 4.1.6, 9, 14, 25, 34, 4.2.3, 7, 16, 17, 42; **[7]**, 9.2, 9.3, 9.4, 9.7, 9.10, 9.11,

9.18, 9.19, 9.20, 9.24, 9.26, 9.28, 9.31, 9.41, 9.43, 9.45, 9.49, 9.59, 10.22-10.25, 10.36, 10.46, 10.47, 10.50, 10.51, 10.67, 10.68, 10.69, 10.71, 10.86, 10.89, 10.211, 10.212, 10.215-10.217, 10.219, 10.321, 10.322, 10.323, 10.342, 10.343, 10.354, 10.357, 10.362, 10.370, 10.431, 10.432, 10.441, 10.442; **[8]**, 11.48, 11.49, 11.51, 11.79, 11.82.

Приклад 5.1. Обчислити повторний інтеграл.

$$\text{а) } \int_0^2 dx \int_x^{x\sqrt{3}} \frac{xdy}{x^2+y^2}; \qquad \text{б) } \int_1^3 dy \int_2^5 \frac{dx}{(x+2y)^2}.$$

Розв'язання.

$$\text{а) } \int_0^2 dx \int_x^{x\sqrt{3}} \frac{xdy}{x^2+y^2} = \int_0^2 \left(x \cdot \frac{1}{x} arctg \frac{y}{x} \Bigg|_x^{x\sqrt{3}} \right) dx = \int_0^2 (arctg\sqrt{3} - arctg 1)\, dx =$$

$$= \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) \cdot x \Bigg|_0^2 = \frac{\pi}{12} \cdot 2 = \frac{\pi}{6};$$

$$\text{б) } \int_1^3 dy \int_2^5 \frac{dx}{(x+2y)^2} = -\int_1^3 \left(\frac{1}{x+2y} \Bigg|_2^5 \right) dy = -\int_1^3 \left(\frac{1}{5+2y} - \frac{1}{2+2y} \right) dy =$$

$$= -\left(\frac{1}{2} \ln|5+2y| - \frac{1}{2} \ln|2+2y| \right) \Bigg|_1^3 = -\frac{1}{2} \left(\ln 11 - \ln 8 - \ln 7 + \ln 4 \right) = -\frac{1}{2} \ln \frac{44}{56} = \frac{1}{2} \ln \frac{14}{11}.$$

Приклад 5.2. Змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі.

$$\text{а) } \int_0^4 dx \int_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} f(x,y)\, dy; \quad \text{б) } \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int_{y^2-1}^{y^2/2} f(x,y)\, dx.$$

Розв'язання.

а) Судячи з заданого повторного інтеграла, область інтегрування спроектована на вісь Ox у відрізок $[1, 4]$ і обмежена знизу лінією $y = \sqrt{4x - x^2}$, а зверху – лінією $y = \sqrt{16 - x^2}$ (обидві ці лінії є частинами відповідних кіл). Область показана на рис. 5.1.

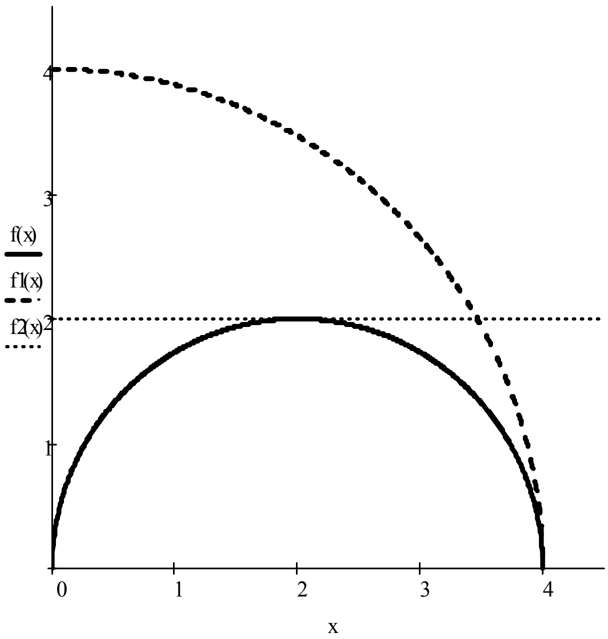

Рис. 5.1

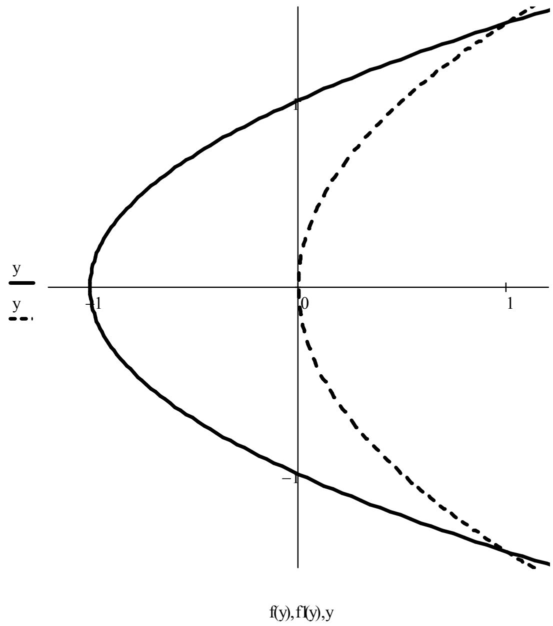

Рис. 5.2

Перепроектуємо область на вісь $\boldsymbol{Oy}$. Для цього розв'яжемо рівняння обмежуючих ліній відносно $\boldsymbol{x}$, враховуючи, що $\boldsymbol{x \geq 0}$:

$$y^2 = 4x - x^2 \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{4 - y^2}\,,\ y^2 = 16 - x^2 \Rightarrow x = \sqrt{16 - y^2}\ .$$

Область інтегрування розіб'ється на три простих області. Перша з них проектується у відрізок $[0, 2]$ осі $\boldsymbol{Oy}$ і обмежена зліва віссю $\boldsymbol{Oy}$, а справа – лінією $x = 2 - \sqrt{4 - y^2}$. Друга область проектується також у відрізок $[0, 2]$ осі $\boldsymbol{Oy}$ і обмежена зліва лінією $x = 2 + \sqrt{4 - y^2}$, а справа – лінією $x = \sqrt{16 - y^2}$. Третя область проектується у відрізок $[2, 4]$ осі $\boldsymbol{Oy}$ і обмежена зліва віссю $\boldsymbol{Oy}$, а справа – лінією $x = \sqrt{16 - y^2}$. Отже,

$$\int_0^4 dx \int_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} f(x,y)\,dy = \int_0^2 dy \int_0^{2-\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx + \int_0^2 dy \int_{2+\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{16-y^2}} f(x,y)\,dx + \int_2^4 dy \int_0^{\sqrt{16-y^2}} f(x,y)\,dx\,;$$

б) Судячи з заданого повторного інтеграла, область інтегрування спроектована на вісь $\boldsymbol{Oy}$ у відрізок $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ і обмежена зліва лінією $x = y^2 - 1$, а справа – лінією $x = y^2/2$ (обидві ці лінії є параболами). Область показана на рис. 5.2.

Перепроектуємо область на вісь $\boldsymbol{Ox}$. Для цього розв'яжемо рівняння обмежуючих ліній відносно $\boldsymbol{y}$:

$$x=y^2-1\Rightarrow y=\pm\sqrt{x^2+1},\ x=y^2/2\Rightarrow y=\pm\sqrt{2x}.$$

Область інтегрування розіб'ється на три простих області. Перша з них проектується у відрізок $[-1,0]$ осі Ox і обмежена знизу гілкою $y=-\sqrt{x+1}$ параболи $x=y^2-1$, а зверху – гілкою $y=\sqrt{x+1}$ тієї ж самої параболи. Друга область проектується у відрізок $[0,1]$ осі Ox і обмежена знизу гілкою $y=-\sqrt{x+1}$ параболи $x=y^2-1$, а зверху – гілкою $y=-\sqrt{2x}$ параболи $x=y^2/2$. Третя область проектується у той самий відрізок $[0,1]$ осі Ox і обмежена знизу гілкою $y=\sqrt{2x}$ параболи $x=y^2/2$, а зверху – гілкою $y=\sqrt{x+1}$ параболи $x=y^2-1$. Отже,

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}dy\int_{y^2-1}^{y^2/2}f(x,y)\,dx=\int_{-1}^{0}dx\int_{-\sqrt{x+1}}^{\sqrt{x+1}}f(x,y)\,dy+\int_{0}^{1}dx\int_{-\sqrt{x+1}}^{-\sqrt{2x}}f(x,y)\,dy+\int_{0}^{1}dx\int_{\sqrt{2x}}^{\sqrt{x+1}}f(x,y)\,dy.$$

<u>Приклад 5.3.</u> Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D(3x^2-2xy+y)\,dxdy$, де область D обмежена лініями $x=0$, $x=y^2$, $y=2$.

Розв'язання. Область D зображена на рис. 5.3 (обмежена гілкою параболи $x=y^2$, віссю Oy та прямою $y=2$). Спроектуємо її на вісь Oy.

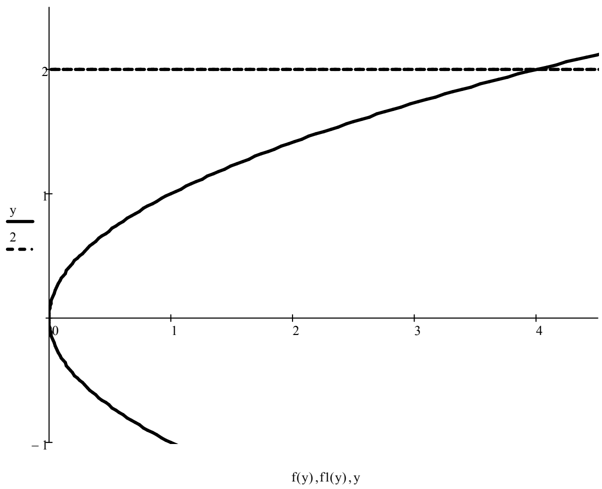

Рис. 5.3

Тоді $\iint\limits_D(3x^2-2xy+y)\,dxdy=\int_0^2dy\int_0^{y^2}(3x^2-2xy+y)\,dx=\int_0^2\left(x^3-x^2y+xy\right)\Big|_0^{y^2}dy=$

$$=\int_0^2 (y^6-y^5+y^3)\,dy=\left(\frac{y^7}{7}-\frac{y^6}{6}+\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^2=\frac{244}{21}\approx 11.62\,.$$

Зауваження. При проектуванні області на вісь Ox обираємо додатну вітку $y=\sqrt{x}$ параболи, область проектується у відрізок $[0, 4]$, отже,

$$\iint_D (3x^2-2xy+y)\,dxdy=\int_0^4 dx\int_{\sqrt{x}}^2 (3x^2-2xy+y)\,dy=\int_0^4\left(3x^2y-xy^2+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{\sqrt{x}}^2 dx=$$

$$=\int_0^4\left(6x^2-4x+2-3x^2\sqrt{x}+x^2-\frac{x}{2}\right)dx=\left(\frac{7x^3}{3}-\frac{9x^2}{4}+2x-\frac{6x^3\sqrt{x}}{7}\right)\Bigg|_0^4=\frac{244}{21}\,.$$

Приклад 5.4. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y^2=x+1$, $x=y^2-y^3$, $y=-1$.

Розв'язання. Фігура зображена на рис. 5.4 (обмежена параболою $y^2=x+1$, лінією $x=y^2-y^3$ та прямою $y=-1$). Спроектуємо її на вісь Oy.

Тоді $$S=\iint_D dxdy=\int_{-1}^1 dy\int_{y^2-1}^{y^2-y^3} dx=\int_{-1}^1 (y^2-y^3-y^2+1)dy=\left(y-\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_{-1}^1=2\ (од^2)\,.$$

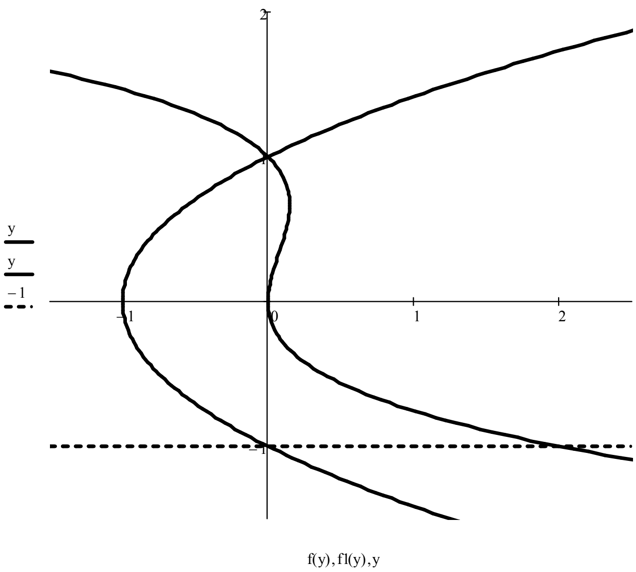

Рис. 5.4

Приклад 5.5. Обчислити криволінійні інтеграли.

а) $\int_L \frac{ydl}{\sqrt{x}}$, якщо L – дуга півкубічної параболи $y^2=\frac{4}{9}x^3$ між точками $A\left(3;\,2\sqrt{3}\right)$

й $B\left(8;\ \dfrac{32\sqrt{2}}{3}\right)$;

б) $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, де L – дуга кривої $x=\cos t+t\sin t$, $y=\sin t-t\cos t$ $(0\le t\le 2\pi)$;

в) $\int\limits_L (x+y)\,dl$, де L – права пелюстка лемніскати $\rho^2=4\cos 2\varphi$;

г) $\int\limits_{OA} 2xydx-x^2dy$, де OA – дуга параболи $x=2y^2$ від точки $O(0;0)$ до точки $A(2;1)$;

д) $\int\limits_L (6-y)\,dx+xdy$, де L – перша арка циклоїди $x=3(t-\sin t)$, $y=3(1-\cos t)$ $(0\le t\le 2\pi)$.

Розв'язання.

а) Маємо криволінійний інтеграл першого роду (по довжині дуги). Будемо вважати, що крива L задана рівнянням вигляду $y=y(x)$ у декартових координатах. Тоді $y=\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3}$ (обираємо знак «+», оскільки точки A й B належать першій чверті), $y'=\sqrt{x}$, отже, $dl=\sqrt{1+y'^2}dx=\sqrt{1+x}\,dx$.

Переходячи до звичайного інтеграла, будемо мати

$$\int\limits_L \frac{ydl}{\sqrt{x}}=\int\limits_3^8 \frac{\frac{2}{3}\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}}\sqrt{1+x}\,dx=\frac{2}{3}\int\limits_3^8 x\sqrt{1+x}\,dx=\left|\begin{matrix}1+x=t^2, & dx=2tdt, & & \\ x=t^2-1, & x & 3 & 8\\ & t & 2 & 3\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{2}{3}\int\limits_2^3 (t^2-1)\cdot t\cdot 2tdt=\frac{4}{3}\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_2^3=\frac{4}{3}\left(\frac{243}{5}-9-\frac{32}{5}+\frac{8}{3}\right)=\frac{2152}{45}\approx 47.82;$$

б) Маємо криволінійний інтеграл першого роду. Перш за все обчислимо

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\cos^2 t+2t\cos t\sin t+t^2\sin^2 t+\sin^2 t-2t\cos t\sin t+t^2\cos^2 t}=\sqrt{1+t^2}.$$

Оскільки крива L задана параметричними рівняннями, то $\dot{x}(t)=-\sin t+\sin t+t\cos t=t\cos t$, $\dot{y}(t)=\cos t-\cos t+t\sin t=t\sin t$, $dl=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}dt=\sqrt{t^2\cos^2 t+t^2\sin^2 t}=|t|=t$ $(t\ge 0)$. Перейдемо до звичайного інтеграла: $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl = \int\limits_0^{2\pi} t\sqrt{1+t^2}\,dt = \frac{1}{3}\left(1+t^2\right)^{3/2}\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{3}\left[\left(1+4\pi^2\right)^{3/2}-1\right]$;

в) Маємо криволінійний інтеграл першого роду. У звичайній полярній системі координат $\rho = 2\sqrt{\cos 2\varphi}$, отже, $\cos 2\varphi \ge 0$, $-\frac{\pi}{4}+k\pi \le \varphi \le \frac{\pi}{4}+k\pi$ $(k \in Z)$. Права пелюстка лемніскати розташована в секторі $-\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$ $(k=0)$ (рис. 5.5).

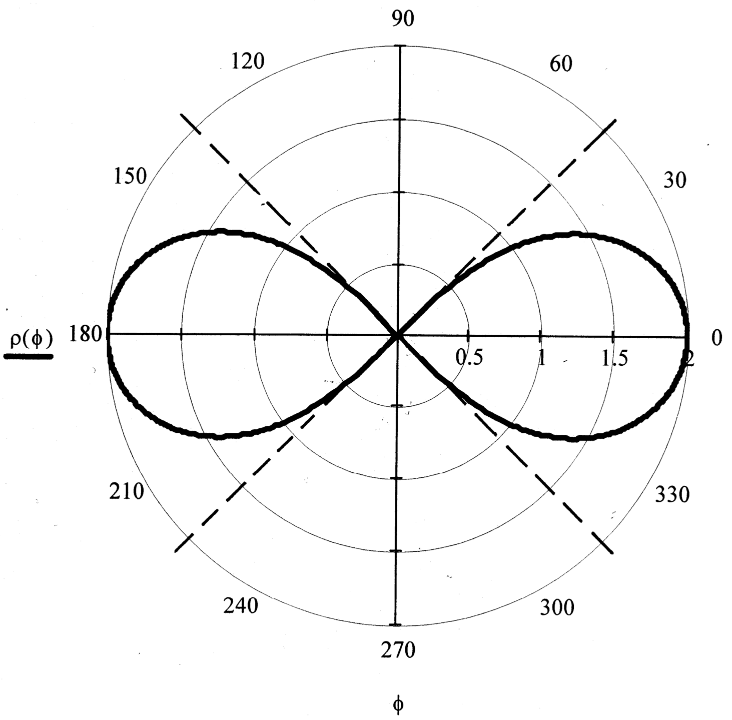

Рис. 5.5

Крива L задана рівнянням у полярних координатах, отже, $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, де $\rho = 2\sqrt{\cos 2\varphi}$. Оскільки $\rho' = -\frac{2\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$, то диференціал довжини дуги $dl = \sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi = \sqrt{4\cos 2\varphi + 4\frac{\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}}\,d\varphi = \frac{2}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\,d\varphi$. Перейдемо до звичайного інтеграла:

$$\int\limits_L (x+y)\,dl = \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} 2\sqrt{\cos 2\varphi}\cdot(\cos\varphi+\sin\varphi)\cdot\frac{2}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\,d\varphi = 4(\sin\varphi-\cos\varphi)\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} =$$

$= 4\sqrt{2}$;

г) Маємо криволінійний інтеграл другого роду (по координатах). Крива L

задана рівнянням у декартових координатах, отже, $dx = x'dy = 4ydy$. Перейдемо до звичайного інтеграла:

$$\int_{OA} 2xydx - x^2dy = \int_0^1 \left(2\cdot 2y^2 y\cdot 4y - 4y^4\right)dy = = 12\cdot\frac{y^5}{5}\Bigg|_0^1 = \frac{12}{5};$$

д) Маємо криволінійний інтеграл другого роду. Крива L задана параметричними рівняннями, отже, $dx = \dot{x}(t)dt = 3(1-\cos t)dt$, $dy = \dot{y}(t)dt = 3\sin tdt$. Перейдемо до звичайного інтеграла:

$$\int_L (6-y)\,dx + xdy = \int_0^{2\pi}\left\{\left[6-3(1-\cos t)\right]\cdot 3(1-\cos t) + 3(t-\sin t)\cdot 3\sin t\right\}dt =$$

$$= 9\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2 t + t\sin t - \sin^2 t\right)dt = 9\int_0^{2\pi} t\sin tdt = \begin{vmatrix} u = t, & dv = \sin tdt, \\ du = dt, & v = -\cos t \end{vmatrix} =$$

$$= 9\,(-t\cos t + \sin t)\Bigg|_0^{2\pi} = -18\pi.$$

<u>Приклад 5.6.</u> З'ясувати, чи буде функція $y = x\arcsin x$ розв'язком рівняння $xy' - y = xtg\dfrac{y}{x}$.

Розв'язання. Якщо функція є розв'язком рівняння, то її підстановка до цього рівняння повинна перетворити його на вірну тотожність. Перевіримо це.

Підставимо $y' = \arcsin x + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ разом із $y = x\arcsin x$ до рівняння:

$$x\arcsin x + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} - x\arcsin x = xtg\frac{x\arcsin x}{x}.$$

З урахуванням того, що $tgx = \dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$ й $\sin(\arcsin x) = x$, отримуємо вірну тотожність $\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = x\cdot\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. Отже, задана функція справді задовольняє рівнянню, тобто є його розв'язком.

<u>Приклад 5.7.</u> Скласти рівняння кривої, якщо відомо, що вона проходить через точку $M_0(0,1)$, а кутовий коефіцієнт дотичної до цієї кривої в кожній точці дорівнює $k(x,y) = x\sqrt[3]{y}$.

Розв'язання. Як відомо, кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $y = y(x)$ в довільній точці $M(x, y)$ є $k(x, y) = y'$. Отже, маємо рівняння $y' = x\sqrt[3]{y}$. Поділимо змінні і отримаємо $\dfrac{dy}{\sqrt[3]{y}} = xdx$, звідки $\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{y^2} = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{C}{2}$ або $y^2 = \left(\dfrac{x^2 + C}{3}\right)^3$. Отриманий загальний розв'язок є рівнянням сім'ї кривих. Шукана крива проходить через точку M_0, отже, її рівняння визначається значенням $C = C^*$, знайденим з умови $y(x_0) = y_0$, тобто, в даному випадку, з умови $y(0) = 1$. Отже, $1^2 = \left(\dfrac{0 + C^*}{3}\right)^3$, звідки $C^* = 3$. Таким чином, рівняння шуканої кривої є $y^2 = \left(\dfrac{x^2}{3} + 1\right)^3$. Графік додатної гілки кривої наведений на рис. 5.6.

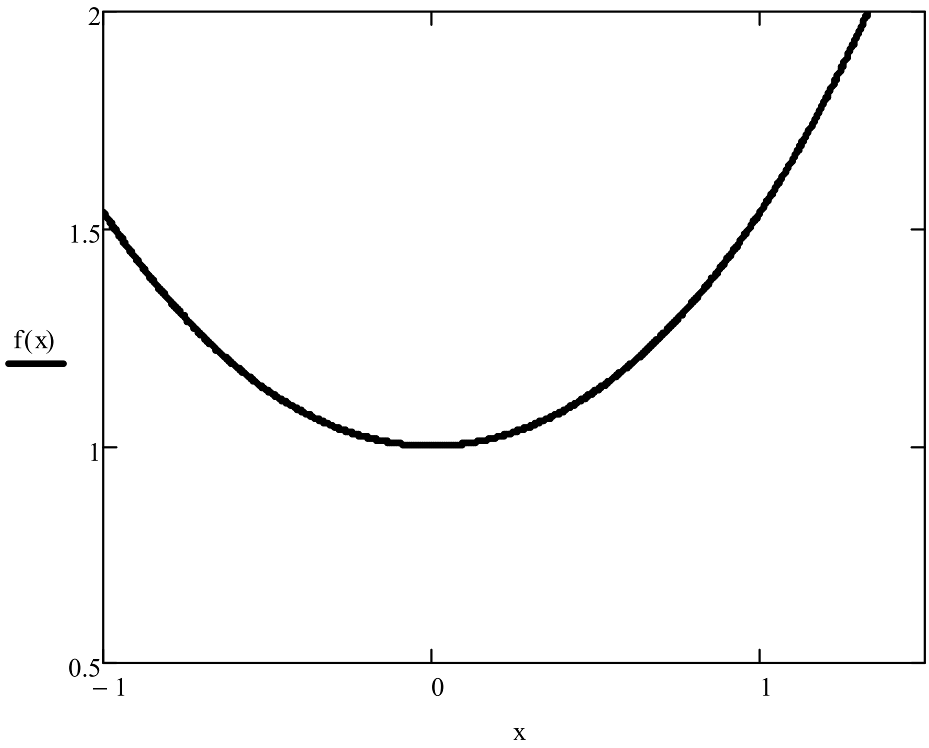

Рис. 5.6

Приклад 5.8. Розв'язати рівняння

а) $2xy^2dx - ydy = yx^2dy - 6xdx$; б) $\left(x - y\cos\frac{y}{x}\right)dx + x\cos\frac{y}{x}dy = 0$;

в) $y' = \frac{2x + y - 4}{x - y + 1}$; г) $y' + y\cos x = e^{-\sin x}$ (застосувати метод Бернуллі).

Розв'язання.

а) Перетворимо рівняння до вигляду $2x(y^2 + 3)dx = y(x^2 + 1)dy$. Отже, маємо *рівняння з відокремлюваними змінними* $X_1(x)Y_1(y)dx + X_2(x)Y_2(y)dy = 0$. Поділимо обидві частини рівняння на добуток $(y^2 + 3)(x^2 + 1)$. Оскільки обидва множники не дорівнюють нулю (а саме, додатні), то при цьому частинні (або особливі) розв'язки рівняння не загублюються. Таким чином, дістаємо рівняння з відокремленими змінними $\frac{2x}{x^2 + 1}dx = \frac{y}{y^2 + 3}dy$. Після інтегрування отримуємо загальний інтеграл заданого рівняння $\ln(x^2 + 1) = \frac{1}{2}\ln(y^2 + 3) + \ln|C|$, $C \neq 0$, який після потенціювання і використання властивостей логарифмів набуває вигляду $\frac{x^2 + 1}{\sqrt{y^2 + 3}} = C$;

б) Маємо *однорідне* диференціальне рівняння першого порядку $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, тому що функції $P(x, y) = x - y\cos\frac{y}{x}$ й $Q(x, y) = x\cos\frac{y}{x}dy$ є однорідними одного й того самого виміру. Справді, $P(\lambda x, \lambda y) = \lambda x - \lambda y\cos\frac{\lambda y}{\lambda x} = \lambda \cdot P(x, y)$, $Q(\lambda x, \lambda y) = \lambda x\cos\frac{\lambda y}{\lambda x} = \lambda \cdot Q(x, y)$.
Оскільки $x \neq 0$, то рівняння приводиться до вигляду

$\frac{dy}{dx} = -\frac{1 - \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}}{\cos\frac{y}{x}}$. Застосуємо підстановку $y = ux$. Тоді $y' = u'x + u$ і

$u'x + u = \frac{u\cos u - 1}{\cos u}$; $u'x = \frac{u\cos u - 1}{\cos u} - u$; $u'x = -\frac{1}{\cos u}$; $\frac{du}{dx}x = -\frac{1}{\cos u}$;

$\cos u du + \frac{dx}{x} = 0$. Інтегрування отриманого рівняння з відокремленими змінними дає загальний інтеграл $\sin u + \ln|x| = C$, який після повернення до вихідної змінної y набуває остаточного вигляду $\sin\frac{y}{x} + \ln|x| = C$;

в) Дане рівняння відноситься до типу $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$. Такі рівняння у випадку $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ зводяться до однорідних за допомогою підстановки $x = x_0 + u$, $y = y_0 + v$, де x_0, y_0 є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$. Розв'язком системи $\begin{cases} 2x + y - 4 = 0, \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$ є $x_0 = 1$, $y_0 = 2$.

Зробимо підстановку $x = 1 + u$, $y = 2 + v$. Тоді $dx = du$, $dy = dv$, $y' = \frac{dv}{du}$.

Отримуємо однорідне рівняння $\frac{dv}{du} = \frac{2u + v}{u - v}$. Розв'яжемо це рівняння за допомогою підстановки $v = zu$, $\frac{dv}{du} = u\frac{dz}{du} + z$. Маємо

$$u\frac{dz}{du} + z = \frac{2 + z}{1 - z}; \quad u\frac{dz}{du} = \frac{2 + z^2}{1 - z}; \quad \frac{1 - z}{2 + z^2}dz = \frac{du}{u}.$$

Після інтегрування дістаємо загальний інтеграл

$$\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{z}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\ln(2 + z^2) = \ln|u| + C.$$

Повертаючись до вихідних змінних за формулами $z = \frac{v}{u}$, $v = y - 2$, $u = x - 1$, остаточно отримуємо $\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{y - 2}{x - 1}\right) - \frac{1}{2}\ln\left[2 + \left(\frac{y - 2}{x - 1}\right)^2\right] = \ln|x - 1| + C$;

г) Маємо *лінійне* диференціальне рівняння першого порядку $y' + p(x)y = q(x)$. Розв'язок рівняння будемо шукати у вигляді добутку двох невідомих функцій $y = uv$, отже, $y' = u'v + uv'$. Підставимо y та y' у рівняння і отримаємо $u'v + uv' + uv\cos x = e^{-\sin x}$ або $u'v + u(v' + v\cos x) = e^{-\sin x}$ $(*)$. Невідому функцію $v = v(x)$ будемо шукати з умови $v' + v\cos x = 0$ $(**)$, отже, $\frac{dv}{dx} = -v\cos x$ або $\frac{dv}{v} = -\cos x dx$. Інтегруючи, знаходимо $\ln|v| = -\sin x$, звідки $v = e^{-\sin x}$ (для зручності беремо частинний розв'язок, якому відповідає нульове значення довільної сталої). Підставимо знайдену функцію v в рівняння (*) і з урахуванням (**) отримаємо $u' e^{-\sin x} = e^{-\sin x}$. Оскільки $e^{-\sin x} \neq 0 \quad \forall x$, то $u' = 1$ або $u = x + C$. Таким чином, загальний розв'язок має вигляд $y = (x + C)\, e^{-\sin x}$.

<u>Приклад 5.9.</u> Розв'язати задачу Коші $xy' + y = y^2 \ln x$, $y(1) = -\dfrac{1}{2}$.

Розв'язання. Оскільки $x > 0$, то без втрати розв'язку перетворимо рівняння до вигляду $y' + \dfrac{y}{x} = y^2 \dfrac{\ln x}{x}$. Отримали рівняння Бернуллі $y' + p(x) y = y^r q(x)$, де $r \neq 0$, $r \neq 1$. Розв'яжемо його однойменним методом: $y = uv$, $y' = u'v + uv'$,

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = u^2 v^2 \frac{\ln x}{x}; \quad u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = u^2 v^2 \frac{\ln x}{x} \quad (*); \quad v' + \frac{v}{x} = 0 \quad (**);$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}; \qquad \ln|v| = -\ln|x|; \qquad v = \frac{1}{x}; \qquad u' \frac{1}{x} = u^2 \frac{1}{x^2} \frac{\ln x}{x}; \qquad \frac{du}{u^2} = \frac{\ln x}{x^2} dx;$$

$-\dfrac{1}{u} = -\dfrac{\ln x + 1}{x} - C$; $\quad u = \dfrac{x}{\ln x + 1 + Cx}$. Загальний розв'язок $y = uv$, таким чином, має вигляд $y = \dfrac{1}{\ln x + 1 + Cx}$. Розв'язок поставленої задачі Коші $\tilde{y}$ визначається значенням довільної сталої C^*, знайденим з початкової умови: $-\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{1 + C^*}$, $\quad C^* = -3$. Отже, шуканий розв'язок має вигляд $\tilde{y} = \dfrac{1}{\ln x + 1 - 3x}$.

<u>Приклад 5.10.</u> Розв'язати задачу Коші

а) $y'' = \dfrac{1}{1 + x^2}$, $y(0) = -3$, $y'(0) = 2$; б) $x(y'' + 1) + y' = 0$, $y(1) = \dfrac{1}{4}$, $y'(1) = 0$;

в) $y'' tg y = 2y'^2$, $y(1) = \dfrac{\pi}{4}$, $y'(1) = -\dfrac{1}{2}$; г) $y'' = \sqrt{1 - y'^2}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$;

д) $2y'' = y' + y'^3$, $y(0) = \dfrac{\pi}{2}$, $y'(0) = 1$; е) $3y'y'' = e^y$, $y(-5) = 0$, $y'(-5) = 1$.

Розв'язання.

а) Рівняння має вигляд $y'' = f(x)$, тобто містить тільки старшу похідну і незалежну змінну. Знайдемо його загальний розв'язок шляхом послідовного двократного інтегрування:

$$\frac{d(y')}{dx} = \frac{1}{1+x^2} \quad \Rightarrow \quad d(y') = \frac{dx}{1+x^2} \quad \Rightarrow \quad \int d(y') = \int \frac{dx}{1+x^2} + C_1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y' = arctgx + C_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = arctgx + C_1 \quad \Rightarrow \quad dy = \left(arctgx + C_1\right)dx \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y = \int (arctgx + C_1)dx + C_2 \quad \Rightarrow \quad y = xarctgx - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C_1 x + C_2 .$$

Частинний розв'язок $\tilde{y} = y(x, C_1^*, C_2^*)$ знайдемо, визначивши з початкових умов значення $C_1 = C_1^*$ та $C_2 = C_2^*$ довільних сталих: $y(0) = -3 \quad \Rightarrow \quad -3 = C_2^*$, $y'(0) = 2 \quad \Rightarrow \quad 2 = C_1^*$. Отже, розв'язок поставленої задачі Коші має вигляд $\tilde{y} = xarctgx - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + 2x - 3$;

б) Рівняння має вигляд $F(x, y', y'') = 0$, тобто містить в явному вигляді незалежну змінну, але не містить невідому функцію. Порядок такого рівняння знижується на одиницю за допомогою підстановки $y' = p(x)$. Тоді $y'' = p'$ і рівняння набуває вигляду $x(p'+1) + p = 0$. Отримали рівняння першого порядку, яке може бути віднесено як до однорідного, так і до лінійного. Вважаючи його однорідним, тобто, $p' + 1 = -\frac{p}{x}$ зробимо підстановку $p = ux$.

Тоді $p' = u'x + u \Rightarrow u'x + u = -1 - u \Rightarrow u'x = -(1+2u) \quad \Rightarrow \frac{du}{1+2u} = -\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\ln|1+2u| = -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|C_1| \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1+2u} = \frac{\sqrt{C_1}}{x} \quad \Rightarrow \quad 1 + 2u = \frac{C_1}{x^2} \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad u = \frac{1}{2}\left(\frac{C_1}{x^2} - 1\right) \quad \Rightarrow \quad p = \frac{C_1}{2x} - \frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{C_1}{2x} - \frac{x}{2}$. Після відокремлення змінних і інтегрування отримуємо загальний розв'язок $y = \frac{C_1}{2}\ln|x| - \frac{x^2}{4} + C_2$.

Враховуючи, що довільні сталі незалежні одна від одної і перепозначивши $\frac{C_1}{2}$

на C_1, остаточно будемо мати $y = C_1 \ln|x| - \frac{x^2}{4} + C_2$. Значення $C_1 = C_1^*$ та $C_2 = C_2^*$ довільних сталих знайдемо з початкових умов:

$$y(1) = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} + C_2^* \Rightarrow C_2^* = \frac{1}{2},\ y'(1) = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{1}{2} + C_1^* \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1^* = \frac{1}{2}.$$ Отже, розв'язок задачі Коші має вигляд $\tilde{y} = \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}$;

в) Рівняння має вигляд $F(y, y', y'') = 0$, тобто містить в явному вигляді невідому функцію, але не містить незалежну змінну. Порядок такого рівняння знижується на одиницю за допомогою підстановки $y' = q(y)$. Тоді $y'' = q\frac{dq}{dy}$ і рівняння набуває вигляду $q\frac{dq}{dy}tgy = 2q^2$. Отримали рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Запишемо його у вигляді $q\left(\frac{dq}{dy}tgy - 2q\right) = 0$. Прирівнюючи до нуля кожен з множників, будемо мати $q = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow y = C;\ \frac{dq}{dy}tgy - 2q = 0 \Rightarrow \frac{dq}{q} = 2ctgydy \Rightarrow \ln|q| = 2\ln|\sin y| + \ln|C_1| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q = C_1 \sin^2 y \Rightarrow y' = C_1 \sin^2 y \Rightarrow \frac{dy}{\sin^2 y} = C_1 dx.$$ Отже, загальний інтеграл рівняння має вигляд $ctgy = C_1 x + C_2$ (знак « - » врахований). Бачимо, що розв'язок $y = C$ не є особливим, оскільки утворюється з загального при $C_1 = 0$. Значення $C_1 = C_1^*$ та $C_2 = C_2^*$ довільних сталих знайдемо з початкових умов:

$$y(1) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow ctg\frac{\pi}{4} = C_1^* + C_2^*,\quad y'(1) = -\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{4}}\left(-\frac{1}{2}\right) = C_1^* \Rightarrow C_1^* = 1,$$

$C_2^* = 0$. Отже, розв'язок задачі Коші має вигляд $ctgy = x$;

г) Рівняння має вигляд $F(y', y'') = 0$, тобто не містить в явному вигляді ані невідому функцію, ані незалежну змінну. Порядок такого рівняння може бути знижений на одиницю за допомогою будь-якої з підстановок $y' = p(x)$ або

$y' = q(y)$. Переважність однієї з них визначається конкретним рівнянням. В даному випадку застосуємо підстановку $y' = p(x)$: $y'' = p'$,

$$p' = \sqrt{1-p^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{\sqrt{1-p^2}} = dx \quad \Rightarrow \quad \arcsin p = x + C_1 \quad \Rightarrow \quad p = \sin(x+C_1) \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad y' = \sin(x+C_1) \quad \Rightarrow \quad y = C_2 - \cos(x+C_1)$. Значення $C_1 = C_1^*$ та $C_2 = C_2^*$ довільних сталих знайдемо з початкових умов:

$$y(0) = 2 \;\Rightarrow\; 2 = C_2^* - \cos C_1^*,\; y'(0) = 1 \;\Rightarrow\; 1 = \sin C_1^* \;\Rightarrow\; C_1^* = \frac{\pi}{2},\; C_2^* = 2.$$

Отже, розв'язок задачі Коші має вигляд $\tilde{y} = 2 - \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ або $\tilde{y} = 2 + \sin x$;

д) Тип даного рівняння той самий, що й в попередньому прикладі. В даному разі вигідніше застосувати підстановку $y' = q(y)$ (перевірте): $y'' = q\frac{dq}{dy}$,

$$2q\frac{dq}{dy} = q(1+q^2) \quad \Rightarrow \quad q = 0 \quad \Rightarrow \quad y = C,\quad 2\frac{dq}{dy} = 1 + q^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dq}{1+q^2} = \frac{dy}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad arctgq = \frac{y}{2} + C_1 \quad \Rightarrow \quad q = tg\left(\frac{y}{2} + C_1\right) \quad \Rightarrow \quad y' = tg\left(\frac{y}{2} + C_1\right) \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad ctg\left(\frac{y}{2} + C_1\right) dy = dx \quad \Rightarrow \quad 2\ln\left|\sin\left(\frac{y}{2} + C_1\right)\right| = x + C_2$ – загальний інтеграл.

Значення $C_1 = C_1^*$ та $C_2 = C_2^*$ довільних сталих знайдемо з початкових умов:

$$y(0) = \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; 2\ln\left|\sin\frac{\pi}{4}\right| = C_2^* \quad \Rightarrow \quad C_2^* = \ln\sin^2\frac{\pi}{4} = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2,$$

$y'(0) = 1 \;\Rightarrow\; 1 = tg\left(\frac{\pi}{4} + C_1^*\right) \quad \Rightarrow \quad C_1^* = 0$. Отже, розв'язок задачі Коші має вигляд $2\ln\left|\sin\frac{y}{2}\right| = x - \ln 2$, розв'язок $y = C$ є особливим;

е) При розв'язанні задач Коші значення кожної з довільних сталих рекомендується знаходити з початкових умов одразу, як тільки ця стала з'являється в процесі розв'язання. Це демонструє даний приклад.

Рівняння відноситься до типу $F(y, y', y'') = 0$, отже, застосуємо підстановку

$$y' = q(y),\; y'' = q\frac{dq}{dy}:\; 3q^2\frac{dq}{dy} = e^y \quad \Rightarrow \quad 3q^2 dq = e^y dy \quad \Rightarrow \quad q^3 = e^y + C_1 \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad y' = \sqrt[3]{e^y + C_1} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dy}{\sqrt[3]{e^y + C_1}} = dx$. Спроба інтегрування отриманого рівняння приводить до інтеграла, що “не береться”. Врахуємо обидві початкові умови: $1 = \sqrt[3]{e^0 + C_1^*} \quad \Rightarrow \quad C_1^* = 0$. Зауважимо, що з цього місця шукаємо вже не загальний, а частинний розв’язок. Тоді $\dfrac{dy}{\sqrt[3]{e^y}} = dx \quad \Rightarrow \quad e^{-\frac{y}{3}} dy = dx \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad -3e^{-\frac{y}{3}} = x + C_2$. Врахуємо тепер першу початкову умову і знайдемо значення C_2^*: $-3e^0 = -5 + C_2^* \quad \Rightarrow \quad C_2^* = 2$. Отже розв’язок задачі Коші має вигляд частинного інтеграла $-3e^{-\frac{y}{3}} = x + 2$.

Приклад 5.11. Розв’язати рівняння

а) $y'' + 3y' - 4y = 0$; б) $y'' - 16y' + 64y = 0$; в) $y'' - 6y' + 25y = 0$.

Розв’язання.

а) Маємо лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Складемо характеристичне рівняння $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$. Його корені $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -4$ дійсні і не дорівнюють один одному. Відповідно до цього фундаментальну систему розв’язків утворюють функції $y_1(x) = e^x$ й $y_2(x) = e^{-4x}$, а загальний розв’язок рівняння має вигляд $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-4x}$, де C_1 й C_2 – довільні сталі;

б) Складемо характеристичне рівняння $\lambda^2 - 16\lambda + 64 = 0$. Його корені $\lambda_1 = 8 = \lambda_2$ дійсні і дорівнюють один одному. Отже, фундаментальну систему розв’язків утворюють функції $y_1(x) = e^{8x}$ й $y_2(x) = xe^{8x}$, а загальний розв’язок рівняння має вигляд $y(x) = e^{8x}(C_1 + C_2 x)$;

в) Складемо характеристичне рівняння $\lambda^2 - 6\lambda + 25 = 0$. Його корені $\lambda_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 25} = 3 \pm 4i$ комплексні спряжені. Отже, фундаментальну систему розв’язків утворюють функції $y_1(x) = e^{3x}\cos 4x$ й $y_2(x) = e^{3x}\sin 4x$, а загальний розв’язок рівняння має вигляд $y(x) = e^{3x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)$.

Приклад 5.12. Розв'язати задачу Коші

$$y'' + 12y' + 45y = 0, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 3.$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння $\lambda^2 + 12\lambda + 45 = 0$. Його корені $\lambda_{1,2} = -6 \pm \sqrt{36 - 45} = -6 \pm 3i$ комплексні спряжені. Отже, фундаментальну систему розв'язків утворюють функції $y_1(x) = e^{-6x}\cos 3x$ й $y_2(x) = e^{-6x}\sin 3x$, а загальний розв'язок рівняння має вигляд $y(x) = e^{-6x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$. Тоді

$$y'(x) = -6e^{-6x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + e^{-6x}(-3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x).$$

Знайдемо розв'язок задачі Коші, для чого обчислимо значення C_1^* й C_2^* з початкових умов: $y(0) = 5 \quad \Rightarrow \quad e^0(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0) = 5$,

$y'(0) = 3 \quad \Rightarrow \quad -6e^0(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0) + 3e^0(-C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0) = 3$.

Отже, $C_1^* = 5$, $C_2^* = 11$ і розв'язок задачі Коші має вигляд

$$\tilde{y}(x) = e^{-6x}(5\cos 3x + 11\sin 3x).$$

Приклад 5.13. Розв'язати рівняння $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\ln x$.

Розв'язання. Маємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами і правою частиною $f(x) = e^{-2x}\ln x$, яка неперервна на $(0, +\infty)$. Як відомо, загальний розв'язок такого рівняння має вигляд $y(x) = y_{одн}(x) + y^*(x)$, де $y_{одн}(x)$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, а $y^*(x)$ – будь-який частинний розв'язок вихідного рівняння.

1) Знайдемо загальний розв'язок однорідного рівняння $y'' + 4y' + 4y = 0$: оскільки характеристичне рівняння $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ має корені $\lambda_{1,2} = -2$, то фундаментальну систему розв'язків утворюють функції $y_1(x) = e^{-2x}$ й $y_2(x) = xe^{-2x}$, а загальний розв'язок рівняння має вигляд $y_{одн}(x) = e^{-2x}(C_1 + C_2 x)$.

2) Частинний розв'язок знайдемо методом варіації довільних сталих (методом Лагранжа), згідно з яким $y^*(x)$ подається у вигляді

$y^*(x)=D_1(x)y_1(x)+D_2(x)y_2(x)$. Невідомі функції $D_1(x)$ й $D_2(x)$ повинні задовольняти системі рівнянь $\begin{cases} D_1'(x)y_1(x)+D_2'(x)y_2(x)=0 \\ D_1'(x)y_1'(x)+D_2'(x)y_2'(x)=f(x) \end{cases}$, лінійних відносно $D_1'(x)$ й $D_2'(x)$. Оскільки головний визначник цієї системи $W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$ являє собою визначник Вронського, який відмінний від нуля в даному випадку на $(0,+\infty)$, то система сумісна і має єдиний розв'язок, який знаходиться за правилом Крамера

$$D_1'(x)=-\frac{y_2(x)f(x)}{W(x)},\quad D_2'(x)=\frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}.$$

Після інтегрування отримуємо

$$D_1(x)=-\int\frac{y_2(x)f(x)}{W(x)}dx\ ,\qquad D_2(x)=\int\frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}dx\ .$$

Отже,

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^{-2x} & xe^{-2x} \\ -2e^{-2x} & e^{-2x}(1-2x) \end{vmatrix}=e^{-4x},$$

$$D_1(x)=-\int\frac{xe^{-2x}e^{-2x}\ln x}{e^{-4x}}dx=-\int x\ln x dx=-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{x^2}{4}\ ,$$

$$D_2(x)=\int\frac{e^{-2x}e^{-2x}\ln x}{e^{-4x}}dx=\int\ln x dx=x\ln x-x$$

(тут під символом інтеграла розуміємо первісну). Таким чином, частинний розв'язок має вигляд

$$y^*(x)=\left(-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{x^2}{4}\right)e^{-2x}+\left(x\ln x-x\right)xe^{-2x}=\left(\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{3}{4}x^2\right)e^{-2x},$$

а загальний розв'язок є $y(x)=\left(C_1+C_2x+\dfrac{x^2}{2}\ln x-\dfrac{3}{4}x^2\right)e^{-2x}$.

Приклад 5.14. Вказати вигляд (без відшукання коефіцієнтів) частинного розв'язку рівняння.

а) $y'' - y' = x^2 + 3x + 10$; б) $y'' + 6y' + 9y = (x^2 - x - 5)\, e^{-3x}$;

в) $y'' + 9y = (x^3 - 3)\cos 3x$; г) $y'' - 8y' + 15y = 3\cos x - 5\sin x$;

д) $y'' - 8y' + 16y = (2x+1)e^{4x}\sin 2x$; е) $y'' - 2y' + 2y = e^x(x^2\cos x + 2\sin x)$.

Розв'язання. В усіх випадках маємо лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами й правими частинами так званого "спеціального" вигляду $f(x) = e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x]$, де $P_m(x)$ і $Q_n(x)$ – многочлени степенів m й n відповідно. Тоді частинний розв'язок рівняння *підбирається* у вигляді $y^*(x) = x^k e^{\alpha x}[R_s(x)\cos\beta x + T_s(x)\sin\beta x]$, де k – кратність контрольного числа правої частини $\sigma = \alpha + \beta i$ серед коренів характеристичного рівняння, а $R_s(x)$ і $T_s(x)$ – многочлени *одного й того ж самого* степеня $s = \max\{m, n\}$ з *невизначеними* коефіцієнтами. У таблиці наведені вигляди частинного розв'язку в залежності від правої частини (число k залежить також від лівої частини рівняння, а саме, від коренів характеристичного рівняння, і тому визначається окремо).

№	$f(x)$	σ	s	y^*
1.	$P_m(x)$	0	m	$x^k R_m(x)$
2.	$e^{\alpha x}P_m(x)$	α	m	$x^k e^{\alpha x} R_m(x)$
3.	$P_m(x)\cos\beta x$	βi	m	$x^k[R_m(x)\cos\beta x +$ $+ T_m(x)\sin\beta x$
4.	$Q_n(x)\sin\beta x$	βi	n	$x^k[R_n(x)\cos\beta x +$ $+ T_n(x)\sin\beta x$
5.	$P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x$	βi	$\max\{m, n\}$	$x^k[R_s(x)\cos\beta x +$ $+ T_s(x)\sin\beta x$
6.	$e^{\alpha x}P_m(x)\cos\beta x$	$\alpha + \beta i$	m	$x^k e^{\alpha x}[R_m(x)\cos\beta x +$ $+ T_m(x)\sin\beta x$
7.	$e^{\alpha x}Q_n(x)\sin\beta x$	$\alpha + \beta i$	n	$x^k e^{\alpha x}[R_n(x)\cos\beta x +$ $+ T_n(x)\sin\beta x$
8.	$e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x +$ $+ Q_n(x)\sin\beta x]$	$\alpha + \beta i$	$\max\{m, n\}$	$x^k e^{\alpha x}[R_s(x)\cos\beta x +$ $+ T_s(x)\sin\beta x$

а) Корені характеристичного рівняння $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$. Судячи з правої частини, маємо випадок 1 (див. таблицю), де $f(x) = P_2(x) = x^2 + 3x + 10$, тобто $m = 2$. Оскільки $\sigma = 0$, то $k = 1$; $s = m = 2$. Отже, $y^* = x\,(Ax^2 + Bx + C)$;

б) Корені характеристичного рівняння $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$. Судячи з правої частини, маємо випадок 2 (див. таблицю), де $f(x) = (x^2 - x - 5)\,e^{-3x}$, тобто $m = 2$. Оскільки $\alpha = -3$, $\beta = 0$, то $\sigma = -3$, а $k = 2$; $s = m = 2$. Отже, $y^* = x^2\,e^{-3x}(Ax^2 + Bx + C)$;

в) Корені характеристичного рівняння $\lambda_{1,2} = \pm 3i$. Судячи з правої частини, маємо випадок 3 (див. таблицю), де $f(x) = (x^3 - 3)\cos 3x$, тобто $m = 3$. Оскільки $\alpha = 0$, $\beta = 3$, то $\sigma = 3i$, а $k = 1$; $s = m = 3$. Отже, $y^* = x\,[(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\cos 3x + (Ex^3 + Fx^2 + Gx + H)\sin 3x]$;

г) Корені характеристичного рівняння $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 5$. Судячи з правої частини, маємо випадок 5 (див. таблицю), де $f(x) = 3\cos x - 5\sin x$, тобто $m = n = 0$. Оскільки $\alpha = 0$, $\beta = 1$, то $\sigma = i$, а $k = 0$; $s = 0$. Отже, $y^* = A\cos x + B\sin x$;

д) Корені характеристичного рівняння $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$. Судячи з правої частини, маємо випадок 7 (див. таблицю), де $f(x) = (2x + 1)e^{4x}\sin 2x$, тобто $n = 1$. Оскільки $\alpha = 4$, $\beta = 2$, то $\sigma = 4 + 2i$, а $k = 0$; $s = n = 1$. Отже, $y^* = e^{4x}[(Ax + B)\cos 2x + (Cx + D)\sin 2x]$;

е) Корені характеристичного рівняння $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$. Судячи з правої частини, маємо випадок 8 (див. таблицю), де $f(x) = e^x(x^2\cos x + 2\sin x)$, тобто $m = 2$, $n = 0$. Оскільки $\alpha = 1$, $\beta = 1$, то $\sigma = 1 + i$, а $k = 1$; $s = \max\{2, 0\} = 2$. Отже, $y^* = xe^x\,[(Ax^2 + Bx + C)\cos x + (Dx^2 + Ex + F)\sin x]$.

<u>Приклад 5.15.</u> Розв'язати задачу Коші $y'' + 4y = \sin 2x$, $y(0) = y'(0) = 0$.

Розв'язання. Маємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами і правою частиною "спеціального" вигляду $f(x) = \sin 2x$. Загальний розв'язок рівняння має вигляд $y(x) = y_{одн}(x) + y^*(x)$, де $y_{одн}(x)$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, а $y^*(x)$ – будь-який частинний розв'язок вихідного рівняння.

1) Знайдемо загальний розв'язок однорідного рівняння $y''+4y=0$: оскільки характеристичне рівняння $\lambda^2+4=0$ має корені $\lambda_{1,2}=\pm 2i$, то загальний розв'язок рівняння має вигляд $y_{одн}(x)=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$.

2) Судячи з правої частини, маємо випадок 4 (див. таблицю), де $f(x)=\sin 2x$, тобто $m=n=0$. Оскільки $\alpha=0$, $\beta=2$, то $\sigma=2i$, а $k=1$; $s=0$. Отже, частинний розв'язок підбираємо у вигляді $y^*=x(A\cos 2x+B\sin 2x)$. Знайдемо коефіцієнти A й B, для чого підставимо $y^{*\prime}$ та $y^{*\prime\prime}$ у рівняння. Оскільки

$$y^{*\prime}=A\cos 2x+B\sin 2x+x(-2A\sin 2x+2B\cos 2x)=(A+2Bx)\cos 2x+ +(B-2Ax)\sin 2x,$$

$$y^{*\prime\prime}=2B\cos 2x-2(A+2Bx)\sin 2x-2A\sin 2x+ +2(B-2Ax)\cos 2x=4\,[(B-Ax)\cos 2x-(A+Bx)\sin 2x],$$

то отримуємо рівність

$$4\,[(B-Ax)\cos 2x-(A+Bx)\sin 2x]+4x(A\cos 2x+B\sin 2x)=\sin 2x$$

або $4B\cos 2x-4A\sin 2x=\sin 2x$. Прирівняємо коефіцієнти при $\cos 2x$ та $\sin 2x$ в обох частях рівності: $\begin{array}{r|l}\cos 2x & 4B=0\\ \sin 2x & -4A=1\end{array}$, звідки $A=-\frac{1}{4}$, $B=0$. Отже, частинний розв'язок має вигляд $y^*=-\frac{x}{4}\cos 2x$, а загальний розв'язок є $y(x)=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-\frac{x}{4}\cos 2x$.

3) Знайдемо розв'язок задачі Коші, для чого обчислимо значення C_1^* й C_2^* з початкових умов: $y(0)=0 \;\Rightarrow\; C_1=0$;

$y'(x)=-2C_1\sin 2x+2C_2\cos 2x-\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{x}{2}\sin 2x$, $y'(0)=0 \;\Rightarrow\; 2C_2-\frac{1}{4}=0$.

Отже, $C_1^*=0$, $C_2^*=\frac{1}{8}$ і шуканий розв'язок задачі Коші має вигляд

$$\tilde{y}(x)=\frac{1}{8}\sin 2x-\frac{x}{4}\cos 2x.$$

Приклад 5.16. Методом послідовного виключення невідомих розв'язати системи рівнянь а) $\begin{cases} \dot{x} = x + 3y \\ \dot{y} = -x + 5y \end{cases}$; б) $\begin{cases} y' = y - z \\ z' = y + z + e^x \end{cases}$.

Розв'язання.

а) Маємо лінійну однорідну систему двох диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. З першого рівняння системи знаходимо $y = \frac{1}{3}(\dot{x} - x)$ (*), отже, $\dot{y} = \frac{1}{3}(\ddot{x} - \dot{x})$ (**). Підставивши у друге рівняння системи замість x та $\dot{x}$ праві частини (*) та (**), отримаємо рівняння $\frac{1}{3}(\ddot{x} - \dot{x}) = -x + \frac{5}{3}(\dot{x} - x)$ або $\ddot{x} - 6\dot{x} + 8x = 0$. Його розв'язок має вигляд $x = C_1e^{2t} + C_2e^{4t}$. Знайдемо тепер $\dot{x} = 2C_1e^{2t} + 4C_2e^{4t}$ і підставимо цей вираз в (*) разом із виразом для x. Будемо мати $y = \frac{1}{3}C_1e^{2t} + C_2e^{4t}$. Отже, загальний розв'язок заданої системи складають функції $x = C_1e^{2t} + C_2e^{4t}$, $y = \frac{1}{3}C_1e^{2t} + C_2e^{4t}$. Після перепозначення довільної сталої $\frac{C_1}{3} \to C_1$ остаточно будемо мати $x = 3C_1e^{2t} + C_2e^{4t}$, $y = C_1e^{2t} + C_2e^{4t}$;

б) Маємо лінійну неоднорідну систему двох диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. З першого рівняння системи знаходимо $z = y - y'$ (*), отже, $z' = y' - y''$ (**). Підставивши у друге рівняння системи замість z та z' праві частини (*) та (**), отримаємо рівняння $y' - y'' = y + y - y' + e^x$ або $y'' - 2y' + 2y = -e^x$ – неоднорідне лінійне диференціальне рівняння другого порядку з правою частиною спеціального вигляду. Розв'язавши це рівняння (див. попередній приклад), отримаємо $y = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x - 1)$. Знайдемо тепер

$$y' = e^x[(C_1 + C_2)\cos x + (C_2 - C_1)\sin x - 1]$$

і підставимо цей вираз в (*) разом із виразом для y. Будемо мати $z = e^x(C_1 \sin x - C_2 \cos x)$. Отже, загальний розв'язок заданої системи складають функції $y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x - 1)$, $z = e^x(C_1 \sin x - C_2 \cos x)$.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Завдання 1. Обчислити подвійний інтеграл.

1. $\iint\limits_D xydxdy$, D: $y = x,\ y = 2,\ y = 0$.

2. $\iint\limits_D (x - y)dxdy$, D: $y = x,\ x + y = 2,\ y = 0$.

3. $\iint\limits_D (2x - y)dxdy$, D: $x = 1,\ x = 2,\ y = x,\ y = x^2$.

4. $\iint\limits_D (3x + y)dxdy$, D: $y = 2x,\ x + y = 3,\ x = 0$.

5. $\iint\limits_D x^2 ydxdy$, D: $y = x^2,\ x + y = 2$.

6. $\iint\limits_D ydxdy$, D: $y = x,\ y = 5x,\ x = 1$.

7. $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2} dxdy$, D: $x = 2,\ y = x,\ xy = 1$.

8. $\iint\limits_D (x - y)dxdy$, D: $y = 2 - x^2,\ y = 2x - 1$.

9. $\iint\limits_D xydxdy$, D: $y = x^2,\ y = 2x$.

10. $\iint\limits_D xydxdy$, $D:\ y=x,\ y=0,\ x=5$.

Завдання 2. Обчислити за допомогою подвійного інтеграла площу фігури, обмеженої лініями.

1. $y^2=4x,\ x+y=3,\ y\ge 0$.

2. $x=\sqrt{4-y^2},\ y=\sqrt{3x},\ x\ge 0$.

3. $y=6x^2,\ x+y=2,\ x\ge 0$.

4. $y=x^2+2,\ y=x,\ x=2,\ x\ge 0$.

5. $y=4x^2,\ 9y=x^2,\ y\le 2$.

6. $y=\dfrac{8}{x^2+4},\ x^2=4y$.

7. $x=y^2,\ x=\dfrac{3}{4}y^2+1$.

8. $y=x^2+1,\ x+y=3$.

9. $y=x^2+4x,\ y=x+4$.

10. $y=\sqrt{2-x^2},\ y=x^2$.

Завдання 3. Змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі.

1. $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{\frac{3x}{4}}^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)dy$.

2. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{2x^2}^{3-x} f(x,y)dy$.

3. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x}^{2-x^2} f(x,y)dy$.

4. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx$.

5. $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{\sqrt{4-y^2}}^{6-y} f(x,y)dx$.

6. $\int\limits_{-1}^0 dx \int\limits_{x+1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$.

7. $\int\limits_{-6}^2 dx \int\limits_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)dy$.

8. $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$.

9. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{2x}^{6-x} f(x,y)dy$.

10. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-1}^{1+x^2} f(x,y)dy$.

Завдання 4. Обчислити криволінійні інтеграли.

1. а) $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, де $L-$ відрізок прямої між точками $O(0;0)$ й $A(1;2)$;

б) $\int\limits_{AB} xdy - ydx$, де $AB-$ дуга параболи $y=4-x^2$ між точками $A(-2;0)$ й $B(0;4)$.

2. а) $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{8-x^2-y^2}}$, де $L-$ відрізок прямої між точками $O(0;0)$ й $B(2;2)$;

б) $\int\limits_{AB} \left(x^2-2xy\right)dx + \left(y^2-2xy\right)dy$, де $AB-$ дуга параболи $y=x^2$ між точками $A(-1;1)$ й $B(1;1)$.

3. а) $\int\limits_L \left(4\sqrt[3]{x}-3\sqrt{y}\right)dl$, де $L-$ відрізок прямої між точками $A(-1;0)$ й $B(0;1)$;

б) $\int\limits_{OA} \left(x^2+y^2\right)dx + 2xydy$, де $OA-$ дуга кубічної параболи $y=x^3$ між точками $O(0;0)$ й $A(1;1)$.

4. а) $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{5}(2x+y)}$, де $L-$ відрізок прямої між точками $A(0;4)$ й $B(4;0)$;

б) $\oint\limits_{L^-} (x+2y)dx + (x-y)dy$, де $L^- -$ коло $x=2\cos t$, $y=2\sin t$, що проходиться за ходом годинникової стрілки.

5. а) $\int\limits_L \frac{ydl}{\sqrt{x^2+y^2}}$, де $L-$ дуга кардіоїди $\rho=2(1+\cos\varphi)$ $(0\le\varphi\le\pi/2)$;

б) $\int\limits_{OBA} 2xydx - x^2dy$, де $OBA-$ ламана: $O(0;0)$, $A(2;1)$, $B(2;0)$.

6. а) $\int\limits_L ydl$, де $L-$ дуга астроїди $x=\cos^3 t,\ \ y=\sin^3 t$ між точками $A(1;0)$ й $B(0;1)$;

б) $\int\limits_{AB}\left(x^2+y^2\right)dx+xydy$, де $L-$ відрізок прямої між точками $A(1;1)$ й $B(3;4)$.

7. а) $\int\limits_L ydl$, де $L-$ дуга параболи $y^2=\frac{2}{3}x$ між точками $O(0;0)$ й $B\left(\frac{35}{6};\frac{\sqrt{35}}{3}\right)$;

б) $\int\limits_{AB}\cos ydx-\sin xdy$, де $AB-$ відрізок прямої між точками $A(2\pi;-2\pi)$ й $B(-2\pi;2\pi)$.

8. а) $\oint\limits_{OABCO} xydl$, де $OABCO-$ контур прямокутника з вершинами $O(0;0)$, $A(4;0)$, $B(4;2)$, $C(0;2)$;

б) $\int\limits_{AB}\frac{ydx+xdy}{x^2+y^2}$, де $AB-$ відрізок прямої між точками $A(1;2)$ й $B(3;6)$.

9. а) $\oint\limits_{ABOA}(x+y)dl$, де $ABOA-$ контур трикутника з вершинами $A(1;0)$, $B(0;1)$, $O(0;0)$;

б) $\int\limits_{ABC}\left(x^2+y^2\right)dx+\left(x+y^2\right)dy$, де $ABC-$ ламана: $A(1;2)$, $B(3;2)$, $C(3;5)$.

10. а) $\int\limits_L\sqrt{2y}dl$, де $L-$ перша арка циклоїди $x=2(t-\sin t)$, $y=2(1-\cos t)$ $(0\le t\le 2\pi)$;

б) $\int\limits_{AB}xydx+(y-x)dy$, де $AB-$ дуга кубічної параболи $y=x^3$ між точками $A(0;0)$ й $B(1;1)$.

Завдання 5. Розв'язати рівняння.

1. а) $e^{x+3y}dy = xdx$; б) $y - xy' = x\sec\dfrac{y}{x}$; в) $y' + y = x\sqrt{y}$.

2. а) $e^{-x^2}dy + x\sec^2 ydx = 0$; б) $\left(y^2 - 3x^2\right)dy + 2xydx = 0$;

в) $ydx + 2xdy = 2y\sqrt{x}\sec^2 ydy$.

3. а) $y' = (2x-1)\,ctgy$; б) $(x+2y)\,dx - xdy = 0$; в) $y' + 2y = y^2e^x$.

4. а) $\sec^2 xtgydy = -\sec^2 ytgxdx$; б) $(x-y)\,dx + (x+y)\,dy = 0$;

в) $y' = y^4\cos x + ytgx$.

5. а) $\left(1+e^x\right)ydy - e^ydx = 0$; б) $\left(y^2 - 2xy\right)dx + x^2dy = 0$;

в) $xydy = \left(y^2 + x\right)dx$.

6. а) $x\left(y^2+3\right)dx = e^xydy$; б) $y^2 + x^2y' = xyy'$; в) $xy' + 2y + x^5y^3e^x = 0$.

7. а) $y' = (2x+1)\,tgy$; б) $xy' - y = xtg\dfrac{y}{x}$; в) $y'x^3\sin y = xy' - 2y$.

8. а) $\sin y\cos xdy - \cos y\sin xdx = 0$; б) $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$; в) $\left(2x^2y\ln y - x\right)y' = y$.

9. а) $\left(1+e^x\right)ydy - e^ydx = 0$; б) $xy' + y(\ln y - \ln x - 1) = 0$;

в) $2y' = xy^{-1} + \dfrac{xy}{x^2-1}$.

10. а) $e^x\sin ydx + tgydy = 0$; б) $\left(2\sqrt{xy} - y\right)dx + xdy = 0$; в) $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$.

Завдання 6. Розв'язати задачу Коші.

1. $\left(x^2+1\right)y' + 4xy = 3,\ y(0) = 0$.

2. $y' + ytgx = \sec x,\ y(0) = 0$.

3. $(1-x)(y'+y) = e^{-x},\ y(0) = 0$.

4. $xy' - 2y = 2x^4,\ y(1) = 0$.

5. $y' = 2x\left(x^2+y\right),\ y(0) = 0$.

6. $y' - y = e^x,\ y(0) = 1$.

7. $xy' + y + xe^{-x^2} = 0,\ y(1) = 0{,}5e$.

8. $\cos ydx = (x + 2\cos y)\sin ydy,\ y(0) = 0{,}25\pi$.

9. $x^2y' + xy + 1 = 0,\ y(1) = 0$.

10. $\left(1-x^2\right)y' + xy = 1,\ y(0) = 1$.

Завдання 7. Розв'язати задачу Коші.

1. а) $y''' = \sin x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 0$;

б) $y'' = y'e^{y},\quad y(0) = 0, y'(0) = 1$.

2. а) $y''' = \frac{1}{x},\ y(1) = \frac{1}{4},\ y'(1) = 0,\ y''(1) = 0$;

б) $(y')^2 + 2yy'' = 0,\quad y(0) = 1, y'(0) = 1$.

3. а) $y'' = \frac{1}{\cos^2 x},\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0{,}6$;

б) $yy'' + (y')^2 = 0,\ y(0) = 1, y'(0) = 1$.

4. а) $y''' = \frac{6}{x^3},\ y(1) = 0,\ y'(1) = 5,\ y''(1) = 1$;

б) $y'' + 2y(y')^3 = 0,\quad y(0) = 2, y'(0) = \frac{1}{3}$.

5. а) $y'' = 4\cos 2x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3$; б) $y''tgy = 2(y')^2,\quad y(1) = \frac{\pi}{2}, y'(1) = 2$.

6. а) $y'' = \frac{1}{1+x^2},\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3$; б) $2yy'' = (y')^2,\quad y(0) = 1, y'(0) = 1$.

7. а) $xy''' = 2,\ y(1) = \frac{1}{2},\ y'(1) = 0,\ y''(1) = 0$;

б) $yy'' - (y')^2 = y^4,\quad y(0) = 1, y'(0) = 1$.

8. а) $y''' = e^{2x},\ y(0) = \frac{9}{8},\ y'(0) = \frac{1}{4},\ y''(0) = -\frac{1}{2}$;

б) $2y^3y'' = -1,\quad y(0) = 0{,}5, y'(0) = \sqrt{2}$.

9. а) $y''' = \cos^2 x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -\frac{1}{8},\ y''(0) = 0$;

б) $y'' = 1 - (y')^2,\quad y(0) = 0, y'(0) = 0$.

10. а) $y'' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ y(0) = 2,\ y'(0) = 3$; б) $(y'')^2 = y',\quad y(0) = \frac{2}{3}, y'(0) = 1$.

Завдання 8. Розв'язати рівняння.

1. $\left(1-x^2\right)y''-xy'=2$.
2. $2xy'y''=\left(y'\right)^2-1$.
3. $x^3y''+x^2y'=1$.
4. $y''+y'tgx=\sin 2x$.
5. $y''x\ln x=y'$.
6. $xy''-y'=x^2e^x$.
7. $y''x\ln x=2y'$.
8. $x^2y''+xy'=1$.
9. $x\left(y''+1\right)+y'=0$.
10. $xy''=y'$.

Завдання 9. Розв'язати рівняння.

1. а) $y''+3y'+2y=0$; б) $y''+4y'+4y=\dfrac{1}{e^{2x}x^3}$; в) $y''-8y'+17y=10e^{2x}$.

2. а) $y''+9y=0$; б) $y''-2y'+2y=\dfrac{e^x}{\sin^2 x}$; в) $y''-2y'+8y=12\sin 2x$.

3. а) $y''-4y'=0$; б) $y''+4y=\dfrac{1}{\cos 2x}$; в) $y''-3y'+2y=3\cos x$.

4. а) $y''-12y'+36y=0$; б) $y''+2y'+2y=e^{-x}ctgx$;
в) $y''+y'-6y=6xe^{3x}$.

5. а) $y''+9y=0$; б) $y''+y=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$; в) $y''+2y'-3y=\left(6x-4\right)e^x$.

6. а) $y''-4y=0$; б) $y''+2y'+y=\dfrac{3\sqrt{x+1}}{e^x}$; в) $y''+4y'+29y=26e^{-x}$.

7. а) $y''+y'-6y=0$; б) $y''-y'=e^{2x}\cos\left(e^x\right)$; в) $y''+2y'+y=22x-4$.

8. а) $y''+3y'=0$; б) $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x^2}$; в) $y''+6y'+10y=74e^{3x}$.

9. а) $y''-5y'+4y=0$; б) $y''+9y=\sec 3x$; в) $y''-2y'+y=4e^x$.

10. а) $y''-6y'+8y=0$; б) $y''+y=tgx$; в) $y''-8y'+20y=16\sin 2x$.

Завдання 10. Розв'язати задачу Коші.

1. $y''-2y'+y=-12\cos 2x-9\sin 2x,\ y(0)=-2,\ y'(0)=0$.
2. $y''-6y'+9y=9x^2-39x+65,\ y(0)=-1,\ y'(0)=0$.

3. $y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 8x + 6,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 4$.

4. $y'' - 6y' + 25y = 9\sin 4x - 24\cos 4x,\ y(0) = 2,\ y'(0) = -2$.

5. $y'' - 14y' + 53y = 53x^2 + 25x + 39,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 12$.

6. $y'' + 5y' + 6y = 52\sin 2x,\ y(0) = -2,\ y'(0) = -2$.

7. $y'' - 4y' + 20y = 16xe^{2x},\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$.

8. $y'' - 3y' + 2y = -7\cos x - \sin x,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 7$.

9. $y'' + 8y' = 18x + 60x^2 - 32x^3,\ y(0) = 5,\ y'(0) = 2$.

10. $y'' - y = (14 - 16x)\,e^{-x},\ y(0) = 0,\ y'(0) = -1$.

Завдання 11. Розв’язати систему рівнянь.

1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y \end{cases}$.

2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x + y \end{cases}$.

3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 8y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$.

4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 8y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 3y \end{cases}$.

5. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x + 4y \end{cases}$.

6. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 2y \end{cases}$.

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x + 2y \end{cases}$.

8. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -6x - 3y \end{cases}$.

9. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x + 4y \end{cases}$.

10. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y \end{cases}$.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 6

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ

Рекомендується (скориставшись одним або двома з наведених нижче джерел)

– вивчити теоретичні положення за **[2]**, гл. 9, §§ 1.1-1.5, 2.1-2.6; **[3]**, гл. XIII, XIV; **[4]**, гл. 14, §§ 1-5;
– розібрати розв'язання задач у **[1]**, гл. III, §§ 1, 3-6;
– самостійно розв'язати задачі: **[1]**, №№ 301, 302, 304, 305, 307, 308, 310, 311, 314, 368, 374, 377, 391, 392, 394, 416, 419, 423, 435; **[5]**, гл. 9, №№ 2, 4, 41, 43, 50, 52, 54, 56, 59, 64, 66, 68, 71, 75, 77, 80, 131, 136, 140, 143, 154, 211, 214, 216, 229, 233, 250, 293, 294, 302, 303, 307, 314, 316, 332, 338, 343, 348, 351, 353, 357, 359; **[6]**, №№ 1.1.12, 13, 20, 21, 24, 25, 29, 30, 37, 39, 40, 42, 44, 46-49, 51, 53, 1.2.7, 8, 12, 14, 16, 18, 1.3.7, 8, 10, 20, 34, 35; **[7]**, 9.2, 9.3, 9.11, 9.12, 9.18, 9.20, 9.26, 9.30, 10.22, 10.23, 10.46, 10.50, 10.67, 10.69, 10.87, 10.211, 10.216, 10.218, 10.321, 10.322, 10.342, 10.350, 10.357, 10.373, 10.431, 10.432, 10.441; **[8]**, 12.21, 12.22, 12.24, 12.29, 12.31, 12.35, 12.43, 12.45, 1.52, 12.91, 12.93, 12.95, 12.96, 12.165-12.167, 12.215, 12.218, 12.236, 12.265, 12.274, 12.289, 12.292, 12.327, 12.328.

Приклад 6.1. Встановити збіжність або довести розбіжність рядів

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^2}}$; в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\ln^2 n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{n^2}\,arctg\,\frac{1}{n^2}$.

Розв'язання.

а) Оскільки $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}} < \frac{1}{\sqrt{n\cdot n\cdot n}} = \frac{1}{n^{3/2}}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ збігається як ряд Діріхле при $\alpha = \frac{3}{2} > 1$, то за ознакою порівняння заданий ряд також збігається;

б) Для порівняння оберемо звичайний гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, який, як відомо, розбігається. Тоді за граничною ознакою порівняння із застосуванням правила Лопіталя будемо мати

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^2}}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{\ln n}\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{n^2}}}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{n}=\infty.$$

Отже, на підставі цієї ознаки, заданий ряд *розбігається*;

в) Для порівняння оберемо ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$, який *збігається*, оскільки $p=2>1$. Тоді за граничною ознакою порівняння із застосуванням правила Лопіталя будемо мати $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}\ln^2 n}}{\frac{1}{n\ln^2 n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}=\infty$. Оскільки границя нескінченна, то ознака незастосовна. Це означає, що ряд для порівняння обраний невдало. Порівняння ж з гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ показує, що даний ряд *розбігається* (виконайте самостійно);

г) Спроби порівняння даного ряду з розбіжним гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ або збіжним рядом Діріхле $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ виявляються невдалими (перевірте!). Тому для порівняння оберемо (збіжний) ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\beta}}$, де $1<\beta<2$. Візьмемо, наприклад, $\beta=3/2$. Тоді за ознакою порівняння із застосуванням правила Лопіталя будемо мати

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\ln n}{n^2}}{\frac{1}{n^{3/2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0.$$

Отже, за граничною ознакою порівняння заданий ряд *збігається*;

д) При дослідженні рядів дуже корисною може виявитися ***таблиця еквівалентних нескінченно малих***:

якщо $\alpha(n) \to 0$ при $n \to \infty$, то

$$\sin\alpha(n) \sim \alpha(n),$$

$$\arcsin\alpha(n) \sim \alpha(n),$$

$$tg\,\alpha(n) \sim \alpha(n),$$

$$arctg\,\alpha(n) \sim \alpha(n),$$

$$\ln[1+\alpha(n)] \sim \alpha(n),$$

$$b^{\alpha(n)} - 1 \sim \ln b \cdot \alpha(n),$$

$$e^{\alpha(n)} - 1 \sim \alpha(n).$$

Оскільки $\frac{1}{n^2} \to 0$ при $n \to \infty$, то на підставі наведеної таблиці, $arctg\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}$.

Тоді $\sqrt[3]{n^2}\,arctg\frac{1}{n^2} \sim \sqrt[3]{n^2}\,\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^{4/3}}$. Це означає, що якщо за ряд для порівняння обрати *збіжний* ряд Діріхле $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4/3}}$ $(\alpha = \frac{4}{3} > 1)$, то за граничною ознакою порівняння отримаємо $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\,arctg\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^{4/3}}} = 1$. Тоді за наслідком з цієї ознаки заданий ряд *збігається*.

<u>Приклад 6.2.</u> Встановити збіжність або довести розбіжність рядів

а) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{1\cdot 4\cdot 7\cdot ...\cdot(3n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!3^n}{n^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+5}{n^2+6}\right)^{n^3}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} arctg^n\frac{\sqrt{3n+2}}{\sqrt{n+1}}$; д) $\frac{1}{2^3}+\frac{2}{3^3}+\frac{3}{4^3}+\dots$.

Розв'язання.

а) Оскільки $a_n = \frac{(2n+1)!!}{1\cdot 4\cdot 7\cdot ...\cdot(3n+1)}$, то

$$a_{n+1} = \frac{[2(n+1)+1]!!}{1\cdot 4\cdot 7\cdot ...\cdot[(3(n+1)+1]} = \frac{(2n+3)!!}{1\cdot 4\cdot 7\cdot ...\cdot(3n+4)} = \frac{(2n+1)!!(2n+3)}{1\cdot 4\cdot 7\cdot ...\cdot(3n+1)\cdot(3n+4)}$$

і тоді $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+3}{3n+4}=\frac{2}{3}<1$. Отже, за ознакою Д'Аламбера заданий ряд *збігається*;

б) Оскільки $a_n=\frac{n!3^n}{n^n}$, то $a_{n+1}=\frac{(n+1)!3^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}=\frac{n!(n+1)3^n\cdot 3}{(n+1)^n(n+1)}$.

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=3\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=3\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}=\frac{3}{e}>1$. Таким чином, за ознакою Д'Аламбера заданий ряд *розбігається*;

в) Оскільки $a_n=\left(\frac{n^2+5}{n^2+6}\right)^{n^3}$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+5}{n^2+6}\right)^{n^2}\left\{1^\infty\right\}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}e^a$, де $a=\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\frac{n^2+5}{n^2+6}-1\right)=-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+6}=-1$. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=$

$=e^{-1}=\frac{1}{e}<1$ і за ознакою Коші заданий ряд *збігається*;

г) Оскільки $a_n=arctg^n\frac{\sqrt{3n+2}}{\sqrt{n+1}}$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}arctg\frac{\sqrt{3n+2}}{\sqrt{n+1}}=$

$=arctg\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{3n+2}{n+1}}=arctg\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}>1$. Отже, за ознакою Коші заданий ряд *розбігається*;

д) Загальний член ряду, як неважко бачити, $a_n=\frac{n}{(n+1)^3}$. За ознакою

Д'Аламбера маємо $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{(n+2)^3}}{\frac{n}{(n+1)^3}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4}{n(n+2)^3}=1$, отже, на підставі цієї ознаки ніякого висновку про збіжність ряду зробити не можна (ознака незастосовна). До того ж самого результату приводить спроба застосування радикальної ознаки Коші.

Будемо розглядати члени ряду як значення функції $f(x)=\frac{x}{(x+1)^3}$ при значеннях аргументу $x=1,2,3,\ldots$. Неважко перевірити, що при $x\geq 1$ функція $f(x)$ додатна, неперервна й монотонно спадна, тобто задовольняє умови інтегральної ознаки. Тому дослідимо на збіжність невласний інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x}{(x+1)^3} dx$. В даному випадку за означенням маємо:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{x}{(x+1)^3} dx = \lim_{B \to +\infty} \int\limits_1^{B} \frac{x}{(x+1)^3} dx = \lim_{B \to +\infty} \int\limits_1^{B} \left[\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^3} \right] dx =$$

$$= \lim_{B \to +\infty} \left[-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2} \right] \Bigg|_1^B = \lim_{B \to +\infty} \left[-\frac{1}{B+1} + \frac{1}{2(B+1)^2} \right] - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{8} \right) = \frac{3}{8}.$$

Отже, інтеграл набуває скінченного значення, тобто збігається. Тому за інтегральною ознакою одночасно з ним збігається і заданий ряд.

<u>Приклад 6.3.</u> Встановити характер збіжності або довести розбіжність рядів

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (3n)}{(n+1)!} arctg \frac{1}{2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\left(\sqrt{n+1}-1\right)}$; в) $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln \ln n}$.

Розв'язання.

а) Дослідимо заданий знакопочережний ряд на абсолютну збіжність, для чого розглянемо ряд з абсолютних величин членів заданого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (3n)}{(n+1)!} arctg \frac{1}{2^n}$ (*). За ознакою Д'Аламбера маємо

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{3 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (3n) \cdot (3n+3)}{(n+2)!} arctg \frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{3 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (3n)}{(n+1)!} arctg \frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2} \lim_{n \to \infty} \frac{3n+3}{n+2} = \frac{3}{2} > 1$$

(тут враховано, що $arctg \frac{1}{2^n} \sim \frac{1}{2^n}$ при $n \to \infty$). Отже, ряд (*) розбігається за ознакою Д'Аламбера. Тому заданий ряд *не збігається абсолютно*. А оскільки цей результат отриманий на підставі ознаки Д'Аламбера, то необхідна умова збіжності ряду $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$ (а з нею і друга умова ознаки Лейбніца) не виконується. Це означає, що заданий ряд *розбігається*;

б) Дослідимо заданий знакопочережний ряд на абсолютну збіжність, для чого розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\left(\sqrt{n+1}-1\right)}$ (*), складений з абсолютних величин членів заданого ряду. Порівняємо цей ряд зі *збіжним* рядом Діріхле $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$, застосувавши граничну ознаку порівняння:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{(n+1)\left(\sqrt{n+1}-1\right)}}{\dfrac{1}{n\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{n}}{(n+1)\left(\sqrt{n+1}-1\right)}=1.$$

Отже, за наслідком зі згаданої ознаки обидва ряди поводяться однаково, тобто ряд (*) збігається. А це означає, що заданий ряд *збігається абсолютно*;

в) Дослідимо заданий знакочережний ряд на абсолютну збіжність, для чого розглянемо ряд з абсолютних величин членів заданого ряду $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{\ln\ln n}$ (*).

Оскільки $\ln n<n$, а $\ln\ln n \ll n$, то $\frac{1}{\ln\ln n}\gg\frac{1}{n}$. Тому за ознакою порівняння ряд (*) розбігається, отже, заданий ряд *не збігається абсолютно* (тут ми врахували, що гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ розбігається). Оскільки цей результат отриманий не за ознакою Д'Аламбера або радикальною ознакою Коші, то ми повинні дослідити ряд також на умовну збіжність.

Перевіримо виконання умов ознаки Лейбніца:

1) нерівність $\frac{1}{\ln\ln(n+1)}<\frac{1}{\ln\ln n}$ виконується $\forall n\geq 4$; 2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln\ln n}=0$.

Обидві умови виконуються, отже, за ознакою Лейбніца заданий ряд збігається. А оскільки він не збігається абсолютно, то він *збігається умовно*.

<u>Приклад 6.4.</u> Знайти радіуси та інтервали збіжності степеневих рядів:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n (x+2)^n}{(2n+1)(n+2)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{2n^3}(x-1)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(2n)!}{(3n)!}x^n$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+5)^n}{n^n}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n}(x-1)^n$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)^n\frac{(2n)!(x+3)^{2n+3}}{(n!)^2}$.

Розв'язання.

а) Оскільки $|a_n| = \left|\frac{(-1)^n 3^n}{(2n+1)(n+2)}\right| = \frac{3^n}{(2n+1)(n+2)}$, то за формулою $\frac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ маємо $\frac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}(2n+1)(n+2)}{(2n+3)(n+3)3^n} = 3$, звідки $R = \frac{1}{3}$. Отже, інтервал збіжності даного ряду є $|x+2| < \frac{1}{3}$ або $-\frac{1}{3} < x+2 < \frac{1}{3}$, тобто $-\frac{7}{3} < x < -\frac{5}{3}$;

б) Оскільки $|a_n| = \left|\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right|^{2n^3} = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{2n^3}$, то за формулою $\frac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ маємо $\frac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{2n^3}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{2n^2} = e^2$, звідки $R = \frac{1}{e^2}$. Отже, інтервал збіжності даного ряду є $|x-1| < \frac{1}{e^2}$ або $1-\frac{1}{e^2} < x < 1+\frac{1}{e^2}$;

в) Оскільки $|a_n| = \frac{n!(2n)!}{(3n)!}$, то з формули $\frac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n!(2n)!}{(3n)!}}{\dfrac{(n+1)![2(n+1)]!}{[3(n+1)]!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}{(n+1)(2n+1)(2n+2)} = \frac{27}{4}.$$

Отже, інтервал збіжності даного ряду є $|x| < \frac{27}{4}$;

г) Оскільки $|a_n| = \frac{1}{n^n}$, то з формули $\frac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ маємо $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{n^n}}} = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$. Це означає, що ряд абсолютно *збігається на усій числовій осі*;

д) З формули $\frac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ маємо $R = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{n!}{3^n}}{\dfrac{(n+1)!}{3^{n+1}}} = 3\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(n+1)} = 0$. Це означає, що ряд *збігається в єдиній точці* $x=1$ (інтервал збіжності вироджується в точку);

е) Тут показник степеня є лінійною функцією $\varphi(n)=2n+3$. *Радіус* збіжності визначимо з формули $R=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[k]{\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|}$ для $\varphi(n)=kn+m$, де $(k\ge 2)\in\mathbb{N}$, а m – *ціле невід'ємне* число (може дорівнювати 0), поклавши $k=2$:

$$R=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\left(\dfrac{n+2}{n}\right)^n\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}}{\left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)^{n+1}\dfrac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2}}}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+2)(n+1)}{n(n+3)}\right]^n\frac{(n+1)^3}{(n+3)(2n+1)(2n+2)}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{e}}\cdot\sqrt{e}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Отже, ряд збігається в інтервалі $|x+3|<\dfrac{1}{2}$ або $-\dfrac{7}{2}<x<-\dfrac{5}{2}$.

Зауваження. Можна було б обчислити одразу *інтервал* збіжності безпосередньо за ознакою Д'Аламбера, тобто скориставшись нерівністю $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}x^{\varphi(n+1)}}{a_nx^{\varphi(n)}}\right|<1$:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{\varphi(n+1)}}{a_nx^{\varphi(n)}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)^{n+1}\dfrac{(2n+2)!\,(x+3)^{2n+5}}{[(n+1)!]^2}}{\left(\dfrac{n+2}{n}\right)^n\dfrac{(2n)!\,(x+3)^{2n+3}}{(n!)^2}}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\frac{(n+3)(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^3}|x+3|^2=e\cdot\frac{1}{e}\cdot 4\cdot|x+3|^2<1.$$

Отже, отримали той самий інтервал збіжності $|x+3|<\dfrac{1}{2}$.

<u>Приклад 6.5.</u> Знайти область збіжності степеневого ряду

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{3^{n+2}\sqrt{n}\ln n}.$$

Розв'язання. З формули $\frac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ маємо

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{3^{n+2}\sqrt{n}\ln n}}{\dfrac{1}{3^{n+3}\sqrt{n+1}\ln(n+1)}} = 3\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 3\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 3$$

(тут ми використали правило Лопіталя). Отже, ряд збігається в інтервалі $|x| < 3$. Дослідимо поведінку ряду в межових точках $x = \pm 3$ цього інтервалу.

В точці $x = -3$ маємо знакопочережний числовий ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{3^{n+2}\sqrt{n}\ln n} = \frac{1}{9}\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln n}$. Дослідимо його на абсолютну збіжність, для чого розглянемо знакододатний ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln n}\right| = \sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\ln n}$. Порівняємо цей ряд із розбіжним гармонічним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. За "граничною" ознакою порівняння $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}\ln n}}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\ln n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} = \infty$ (тут ми знов використали правило Лопіталя). Оскільки границя існує і нескінченна, то за згаданою ознакою в точці $x = -3$ ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\ln n}$ розбігається, отже, знакопочережний ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln n}$ не збігається абсолютно. В той же час цей ряд збігається за ознакою Лейбніца, оскільки, як неважко перевірити, обидві умови ознаки виконуються. Тому ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln n}$, а разом з ним і заданий степеневий ряд

$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{x^n}{3^{n+2}\sqrt{n}\ln n}$, збігаються умовно.

В точці $x=3$ маємо знакододатний ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{3^n}{3^{n+2}\sqrt{n}\ln n} = \dfrac{1}{9}\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}\ln n}$, який, як вже з'ясовано, розбігається. Отже, в точці $x=3$ заданий степеневий ряд розбігається.

Таким чином, областю збіжності заданого степеневого ряду є півінтервал $[-3, 3)$, всередині якого ряд збігається абсолютно, на лівому кінці – умовно.

<u>**Приклад 6.6.**</u> Розвинути функцію в ряд Маклорена та вказати область, в якій це розвинення справедливе.

а) $f(z) = x^4 \sin(3x^2)$; б) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^5}$; в) $f(x) = \dfrac{2x-5}{x^2-5x+6}$;

г) $f(x) = \dfrac{1}{(1-x^3)^2}$; д) $f(x) = \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Розв'язання.

а) Безпосереднє розвинення приведе до громіздких обчислень. В цьому випадку скористаємось способом, що передбачає використання так званих *найпростіших розвинень*.

Найпростішими розвиненнями називають відомі розвинення в ряд Маклорена основних елементарних функцій. Наведемо ***таблицю найпростіших розвинень*** (у дужках вказані області збіжності відповідних рядів):

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad (-\infty < x < +\infty),$$

$$a^x = e^{x\ln a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n a}{n!} x^n \qquad (-\infty < x < +\infty),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$(-\infty < x < +\infty),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$(-\infty < x < +\infty),$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$(-\infty < x < +\infty),$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$(-\infty < x < +\infty),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

$$(-1 < x \le 1),$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{k=1}^{n}(\alpha-k+1)}{n!}x^n$$

$$(-1 < x < 1 \text{ якщо } \alpha \le -1,\ -1 < x \le 1 \text{ якщо } -1 < \alpha < 0,\ -1 \le x \le 1 \text{ якщо } \alpha \ge 0),$$

зокрема,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (-1 < x < 1),$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad (-1 < x < 1),$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \ldots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n$$

$$(-1 < x \le 1),$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \ldots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n$$

$$(-1 < x \le 1),$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \ldots = 1 + \frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}x^{n+1}$$

$$(-1 \le x \le 1),$$

$$\sqrt{1-x}=1-\frac{x}{2}-\frac{1}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-...=1-\frac{x}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}x^{n+1}$$
$$(-1\le x\le 1),$$

$$\arcsin x=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7}+...=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$
$$(-1\le x\le 1),$$

$$\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$
$$(-1\le x\le 1).$$

Тому скористаємось відомим розвиненням в ряд Маклорена функції $\sin x$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\quad(-\infty<x<+\infty),$$

в якому замінимо x на $3x^2$, і отриманий ряд почленно помножимо на x^4:

$$\sin(3x^2)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(3x^2)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{2n+1}x^{4n+2}}{(2n+1)!},$$

$$f(z)=x^4\sin(3x^2)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{2n+1}x^{4n+6}}{(2n+1)!}=3x^6-\frac{9}{2}x^{10}+\frac{81}{40}x^{14}-....$$

Отримане розвинення справедливе на усій числовій осі $(-\infty<x<+\infty)$;

б) Замінимо у відомому розвиненні

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+...+(-1)^n x^n+...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\quad(-1<x<1),$$

x на x^5. Маємо

$$\frac{1}{1+x^5}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x^5)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{5n}=1-x^5+x^{10}-x^{15}+...+(-1)^n x^{5n}+....$$

Цей ряд подає задану функцію для усіх x таких, що $\left|x^5\right|<1$, тобто $-1<x<1$;

в) В деяких випадках розвинення функції в степеневий ряд можна отримати, просумувавши табличні розвинення або раніше знайдені. При цьому іноді треба тотожно перетворити функцію таким чином, щоб подати її у вигляді зручної комбінації функцій, розвинення яких відомі.

Задана функція є правильним раціональним дробом. У відповідності із розкладанням знаменника на множники $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$ подамо її у вигляді суми найпростіших дробів:

$$\frac{2x-5}{x^2-5x+6}=\frac{2x-5}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3},\ \text{ звідки } \ 2x-5=A(x-3)+B(x-2).$$

Невідомі коефіцієнти A і B знайдемо з системи рівнянь $\begin{array}{l|l} x=2 & -1=-A, \\ x=3 & \ \ 1=B. \end{array}$

Отже, $A=B=1$ й $f(x)=\dfrac{2x-5}{x^2-5x+6}=\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-3}$. Кожен з отриманих найпростіших дробів після нескладного тотожного перетворення розвинемо в ряд Маклорена за допомогою відомого розвинення

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+...+x^n+...=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \qquad (-1<x<1).$$

Будемо мати

$$\frac{1}{x-2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n \quad \left(\left|\frac{x}{2}\right|<1\Rightarrow|x|<2\right),$$

$$\frac{1}{x-3}=-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n \quad \left(\left|\frac{x}{3}\right|<1\Rightarrow|x|<3\right).$$

Отже,

$$\frac{2x-5}{x^2-5x+6}=-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{3^{n+1}}\right)x^n=-\frac{5}{6}-\frac{13}{36}x-\frac{35}{216}x^2-....$$

За відповідною властивістю степеневих рядів отримане розвинення справедливе в інтервалі $(-2,2)$, який є спільним інтервалом збіжності обох рядів;

г) При розвиненні деяких функцій в степеневі ряди дуже корисним виявляється спосіб, що заснований на використанні такої властивості степеневих рядів, як можливість їх почленного диференціювання. Суть цього способу полягає в наступному. Нехай треба знайти розвинення деякої функції $f(x)$ в степеневий ряд. Якщо вдається знайти таку функцію $g(x)$, що $f(x)=a\cdot x^k\cdot g'(x)$, де $k\in\mathbb{Z}$, то, розвинувши функцію $g(x)$ в степеневий ряд і продиференціювавши його почленно, отримаємо розвинення в ряд функції $f(x)$. При цьому отримане розвинення справедливе всюди, де відповідне розвинення було вірним для функції $g(x)$.

Оскільки в даному випадку $\dfrac{1}{(1-x^3)^2}=\dfrac{1}{3x^2}\left(\dfrac{1}{1-x^3}\right)'$, то, замінивши у табличному розвиненні

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+...+x^n+...=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \quad (-1<x<1)$$

x на x^3, отримаємо

$$\frac{1}{(1-x^3)^2}=\frac{1}{3x^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(x^3)^n\right)'=\frac{1}{3x^2}\sum_{n=1}^{\infty}3n\,x^{3n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}n\,x^{3n-3}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,x^{3n}=$$

$$=1+2x^3+3x^6+....$$

Оскільки при диференціюванні інтервал збіжності степеневого ряду не змінюється, то знайдене розвинення справедливе при усіх x з інтервалу $-1<x<1$;

д) В деяких випадках значно простіше розвинути в степеневий ряд не саму функцію $f(x)$, а її похідну $f'(x)$, і отриманий ряд почленно проінтегрувати.

Знайдемо похідну $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{1+x^2}}}\cdot\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\dfrac{x\cdot 2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}=\dfrac{1}{1+x^2}$.

У табличному розвиненні

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+...+(-1)^n x^n+...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \quad (-1<x<1)$$

замінимо x на x^2 і отримаємо розвинення $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$, вірне при $-1<x<1$. Проінтегрувавши цей ряд почленно від 0 до x, будемо мати шукане розвинення $f(x)=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Оскільки при почленному інтегруванні ряду інтервал його збіжності не змінюється, то знайдене розвинення справедливе при усіх x з інтервалу $-1<x<1$.

Приклад 6.7. Розвинути в ряд Тейлора в околі точки $x_0 = 4$ (за степенями різниці $x-4$) функцію $f(x) = \ln(x^2+4x-5)$ та вказати область, в якій це розвинення справедливе.

Розв'язання. Перетворимо тотожно задану функцію, виділяючи різницю $x-4$:

$$f(x) = \ln(x^2+4x-5) = \ln[(x-1)(x+5)] = \ln\{[3+(x-4)][9+(x-4)]\} =$$

$$= \ln\left[27\left(1+\frac{x-4}{3}\right)\left(1+\frac{x-4}{9}\right)\right] = \ln 27 + \ln\left(1+\frac{x-4}{3}\right) + \ln\left(1+\frac{x-4}{9}\right).$$

Скористаємось табличним розвиненням

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \quad (-1 < x \le 1),$$

в якому замінимо x на $\frac{x-4}{3}$ й на $\frac{x-4}{9}$. Отримаємо

$$\ln\left(1+\frac{x-4}{3}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-4)^n}{n3^n} \quad \left(\left|\frac{x-4}{3}\right| < 1 \Rightarrow |x-4| < 3\right),$$

$$\ln\left(1+\frac{x-4}{9}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-4)^n}{n9^n} \quad \left(\left|\frac{x-4}{9}\right| < 1 \Rightarrow |x-4| < 9\right).$$

Отже,

$$f(x) = \ln(x^2+4x-5) = \ln 27 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1+3^n}{n9^n}(x-4)^n =$$

$$= \ln 27 + \frac{4}{9}(x-4) - \frac{5}{9^2}(x-4)^2 + \frac{28}{3\cdot 9^3}(x-4)^3 - \ldots .$$

Отримане розвинення справедливе в інтервалі $|x-4| < 3$, який є спільним інтервалом збіжності рядів $\ln\left(1+\frac{x-4}{3}\right)$ та $\ln\left(1+\frac{x-4}{9}\right)$.

Приклад 6.8. Розвинути в ряд Маклорена функцію $f(x) = \int_0^x \frac{arctg\, t}{t}\,dt$.

Розв'язання. При наближеному обчисленні визначених інтегралів, коли знайти первісну в скінченному вигляді не представляється можливим, широко застосовується почленне інтегрування степеневого ряду. При цьому підінтегральну функцію розвивають в ряд, який потім інтегрують почленно. Скориставшись табличним розвиненням

$$\mathrm{arctg}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (-1 \le x \le 1),$$

будемо мати

$$f(x) = \int_0^x \frac{arctg\, t}{t}\, dt = \int_0^x \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} \int_0^x t^{2n} dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}.$$

Оскільки $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{arctgx}{x} = 1$, то розвинення справедливе в інтервалі $-1 < x < 1$.

Приклад 6.9. Обчислити $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^3} dx$ з точністю $\delta = 10^{-4}$.

Розв'язання. Приймемо залишкову похибку $\varepsilon = \frac{\delta}{4} = \frac{1}{4} \cdot 10^{-4} = 2.5 \cdot 10^{-5}$ і розвинемо підінтегральну функцію в ряд Маклорена, для чого у табличному розвиненні

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

замінимо x на $-x^3$:

$$e^{-x^3} = 1 - x^3 + \frac{x^6}{2!} - \frac{x^9}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{3n}}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{3n}}{n!}.$$

Отриманий ряд збігається на всій числовій осі, отже, його можна почленно інтегрувати на будь-якому відрізку, зокрема, на відрізку $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Після інтегрування і застосування формули Ньютона-Лейбніца приходимо до знакопочережного числового ряду, який збігається, тобто є рядом Лейбніца:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^3}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{3n}}{n!}dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!}\int_0^{\frac{1}{2}}x^{3n}dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!(3n+1)}x^{3n+1}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!(3n+1)8^n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{8\cdot 8}+\frac{1}{2!\cdot 14\cdot 8^2}-\frac{1}{3!\cdot 20\cdot 8^3}+\ldots.$$

Для забезпечення необхідної точності обчислення суми цього ряду, яка і є значенням заданого визначеного інтеграла, потрібно утримати таке число членів ряду, щоб виконалася умова $|u_{n+1}|\le \varepsilon$, де u_{n+1} – перший з відкинутих членів, а ε – задана залишкова похибка.

Оскільки $u_0=0.5$, $u_1=-0.015625$, $u_2=0.0005580$, $u_3=-0.0000163$, ... й $|u_3|<\varepsilon=0.000025$, то треба утримати 3 перших члени ряду:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^3}dx\approx 0.5-0.015625+0.0005580=0.4849330\approx 0.4849.$$

Значення цього інтеграла, обчислене на комп'ютері за допомогою **Mathcad**, дорівнює **0.48491714311364 ...** , тобто в отриманому результаті всі знаки вірні.

__**Приклад 6.10.**__ Знайти чотири перших, відмінних від нуля, члени розвинення в степеневий ряд розв'язку рівняння $y''=x\sin y'$, який задовольняє початкові умови $y(1)=0$, $y'(1)=\frac{\pi}{2}$.

Розв'язання. Будемо шукати частинний розв'язок рівняння у вигляді ряду Тейлора

$$\tilde{y}=y(1)+y'(1)(x-1)+\frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2+\ldots.$$

За умовою задачі, $y(1)=0$, $y'(1)=\frac{\pi}{2}$. З рівняння $y''=x\sin y'$ знаходимо, що $y''(1)=1\cdot\sin y'(1)=1\cdot 1=1$. Диференціюючи вихідне рівняння, маємо

$$y'''=\sin y'+xy''\cos y',$$

звідки отримуємо $y'''(1)=\sin y'(1)+1\cdot y''(1)\cdot\cos y'(1)=1+1\cdot 1\cdot 0=1$.

Диференціюючи рівність $y'''=\sin y'+xy''\cos y'$, маємо

$$y^{(4)}=y''\cos y'+y''\cos y'+xy'''\cos y'-xy''y'''\sin y',$$

звідки отримуємо $y^{(4)}(1)=2\cdot1\cdot0+1\cdot1\cdot0-1\cdot1\cdot1\cdot1=-1$.

Отже, шуканий частинний розв'язок має вигляд

$$\tilde{y}=\frac{\pi}{2}(x-1)+\frac{1}{2!}(x-1)^2+\frac{1}{3!}(x-1)^3-\frac{1}{4!}(x-1)^4+\ldots .$$

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Завдання 1. Встановити збіжність або довести розбіжність рядів.

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n+2)!}{n^5}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}10^n\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{2n^2+1}\right)^2$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+2}}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^4}$.

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^n-1}{5^n(n+1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-1}{5n}\right)^{n^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+2)\ln(3n+2)}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^5}}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{8}\right)^n\left(\frac{1}{n}\right)^7$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(arctg\,\frac{1}{2n+1}\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\ln^2(2n+1)}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5n+2}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2n^2+1}$.

4. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n+1)\cdot tg\,\frac{\pi}{3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln(n+2))^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{(4n+5)^3}}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+3n}}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{3^n}$.

5. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^n}}{3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{1}{2^n}\right)^{3n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+4)\ln^3(3n+4)}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{1+2^{2n}}$.

6. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot5\cdot6\cdot...(n+3)}{5\cdot7\cdot9\cdot...\cdot(2n+3)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+5n+8}{3n^2-2}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{(7n-5)^5}}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+2)}$; д) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^7 n}$.

7. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^n n^7$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(arctg\,\frac{1}{5^n}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+7}{n^2+49}\right)^2$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}+3}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(n+1)!}$.

8. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot7\cdot13\cdot...\cdot(6n-5)}{2\cdot3\cdot4\cdot...\cdot(n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)\ln(3n-1)}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n+2}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3+n^2}$.

9. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)!}{n^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(tg\,\frac{\pi}{5^n}\right)^{3n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-2)\ln(5n-2)}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n(n+1)}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-1)(6n+3)}$.

10. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n(n+1)}{5^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln(n+1))^{2n}}$; в) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n-1}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}tg\,\frac{\pi}{3^n}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{7^{2n}}$.

Завдання 2. Встановити характер збіжності або довести розбіжність рядів.

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{(n+1)\,3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{(2n-1)^3}$.

2. а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{(2n+1)!}$.

3. а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{\ln n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n^2+1}$.

4. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n}{6n+5}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{3^n}{(n+1)!}$.

5. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{1}{\sqrt[4]{n^5}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n2^n}$.

6. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2^n}{n^4}$.

7. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2n-1}{3^n}$.

8. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n(2n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{n^2+1}{n^3}$.

9. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt[3]{n+1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{(\ln(n+1))^n}$.

10. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{1}{n^3+1}$.

Завдання 3. Знайти область збіжності степеневого ряду.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^{2n+1}}{2n-1}$. 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{2^{n-1}3^n}$. 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n^2+1}$. 4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{8^n\left(n^2+1\right)}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{(2n+1)^2\sqrt{3^n}}$. 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{6^n\sqrt[3]{n+1}}$. 7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n(n+3)}$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-2)(x-3)^n}{2^{n+1}(n+1)^2}$. 9. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^{2n}}{\sqrt{n+3}}$. 10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{\sqrt{2n+1}}$.

Завдання 4. Розвинути функцію $f(x)$ в ряд Маклорена і вказати область збіжності отриманого ряду.

1. $f(x)=x^3 arctgx$. 2. $f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$. 3. $f(x)=\frac{1}{4+x^2}$.

4. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{3+x}}$. 5. $f(x)=\frac{3}{\sqrt[3]{8-x}}$. 6. $f(x)=\cos 5x^2$.

7. $f(x)=\frac{3}{2x+1}$. 8. $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{1-2x}}$. 9. $f(x)=\frac{1}{1+4x^2}$.

10. $f(x)=arctg 2x^3$.

Завдання 5. Розвинути функцію $f(x)$ в ряд Тейлора в околі точки x_0 і вказати область збіжності отриманого ряду.

1. $f(x)=\cos 5x$, $x_0=\frac{\pi}{10}$. 2. $f(x)=\sin 5x$, $x_0=\frac{\pi}{10}$.

3. $f(x)=e^{3x}$, $x_0=\frac{1}{3}$. 4. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{3+x}}$, $x_0=1$.

5. $f(x)=3^{-x}$, $x_0=2$. 6. $f(x)=\sqrt{2+x}$, $x_0=2$.

7. $f(x)=\frac{3}{2x+1}$, $x_0=-2$. 8. $f(x)=\ln(2+x)$, $x_0=3$.

9. $f(x)=\sin 5x$, $x_0=\frac{\pi}{15}$.

10. $f(x)=\ln(1+3x)$, $x_0=1$.

Завдання 6. Обчислити визначений інтеграл з точністю **0,001**, використовуючи розвинення підінтегральної функції в степеневий ряд.

1. $\int\limits_0^{0.25}\ln\left(1+\sqrt{x}\right)\,dx$.

2. $\int\limits_0^{1} arctg\left(\frac{x^2}{2}\right)dx$.

3. $\int\limits_0^{0.2}\sqrt{x}\cdot\sin\sqrt{x}\,dx$.

4. $\int\limits_0^{0.5}\frac{arctgx}{x}dx$.

5. $\int\limits_0^{0.25}\sqrt{x}\cdot\cos xdx$.

6. $\int\limits_0^{0.5}\ln\left(1+x^3\right)dx$.

7. $\int\limits_0^{1}x^2\cdot\sin xdx$.

8. $\int\limits_0^{1}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$.

9. $\int\limits_0^{0.5}\sqrt{x^3+1}\cdot xdx$.

10. $\int\limits_0^{0.5}\frac{1}{x^5+1}dx$.

Завдання 7. Знайти три перші ненульові члени розвинення в степеневий ряд розв'язку задачі Коші.

1. $y'=xy+e^y$, $y(0)=0$.

2. $y'=x^2y^2+1$, $y(0)=1$.

3. $y'=x^2-y^2$, $y(0)=0{,}5$.

4. $y'=x^3+y^2$, $y(0)=0{,}5$.

5. $y'=x+y^2$, $y(0)=-1$.

6. $y'=x+x^2+y^2$, $y(0)=1$.

7. $y'=2\cos x-xy^2$, $y(0)=1$.

8. $y'=e^x-y^2$, $y(0)=0$.

9. $y'=x+y+y^2$, $y(0)=1$.

10. $y'=x^2+y^2$, $y(0)=1$.

Р О Б О Ч А   П Р О Г Р А М А

навчальної дисципліни
«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

IV семестр

Розподіл навчальних годин

Кількість годин					Кількість контр. робіт	Форма звітності
УСЬОГО	Аудиторних занять			Самостійної роботи		
	Усього	Лекцій	Практичних занять			
189	**36**	**20**	**16**	**153**	**1**	**екзамен**

Зміст програми

16. Ряди та інтеграл Фур'є

59. Періодичні процеси. Гармонічні коливання. Тригонометричний ряд та його властивості. Гармонічний аналіз.

60. Тригонометричний ряд Фур'є. Теорема збіжності ряду Фур'є. Умови Діріхле.

61. Розвинення в ряд Фур'є періодичних функцій на основному і довільному проміжках. Ефект Гіббса. Особливості рядів Фур'є парних і непарних функцій.

62. Розвинення в ряд Фур'є неперіодичних функцій.

63. Ряд Фур'є в комплексній формі. Поняття інтеграла Фур'є. Інтеграл Фур'є для парних і непарних функцій. Комплексна форма інтеграла Фур'є.

64. Перетворення Фур'є. Бета- і гамма-функціїї та їх застосування у перетвореннях Фур'є.

17. Елементи операційного числення

65. Перетворення Лапласа: основні поняття і означення. Властивості перетворення Лапласа та їх застосування. Таблиця зображень деяких основних функцій.

66. Способи відновлення оригінала за зображенням. Розв’язання задач Коші для лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами і систем таких рівнянь операційним методом.

18. Основи теорії ймовірностей випадкових подій

67. Елементи комбінаторики: переставлення, розміщення, сполучення, загальні правила.

68. Основні поняття теорії ймовірностей: випадкові події, їх види та дії над ними, ймовірність випадкової події. Класична ймовірність. Статистична та геометрична ймовірності.

69. Умовна ймовірність. Теореми додавання і множення ймовірностей. Формула повної ймовірності. Ймовірності гіпотез. Формули Байєса.

70. Повторення незалежних випробувань: біноміальна формула Бернуллі, локальна формула Муавра-Лапласа, формула Пуассона, інтегральна формула Муавра-Лапласа.

19. Основи теорії ймовірностей випадкових величин

71. Одновимірні випадкові величини, їх типи. Закони розподілу дискретних і неперервних випадкових величин: ряд та многокутник розподілу, інтегральна та диференціальна функції розподілу.

72. Числові характеристики випадкових величин: математичне сподівання, дисперсія, середнє квадратичне відхилення.

73. Деякі найважливіші закони розподілу дискретних і неперервних випадкових величин: геометричний, біномний, Пуассона, рівномірний, показниковий. Нормальний розподіл (закон Гаусса) і пов’язані з ним розподіли Пірсона, Стьюдента, Фішера – Снедекора.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Підручники і навчальні посібники

1. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения: Учеб. пособие для втузов. – М.: Высш. шк., 2000. – 480 с.

2. Волков И.К., Канатников А.Н. Интегральные преобразования и операционное исчисление: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. – 228 с.

3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 2002. – 479 с.

4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. 2: Учеб. пособие для втузов. – М.: Высш. шк., 2000. – 416 с.

5. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: А.С.К., 2006. – 648 с.

6. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Операционное исчисление. Теория устойчивости: Задачи и примеры с подробными решениями: Учеб. пособие. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 176 с.

7. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч.2: Диференціальні рівняння. Операційне числення. Ряди та їх застосування. Стійкість за Ляпуновим. Рівняння математичної фізики. Оптимізація і керування. Теорія ймовірностей. Числові методи. – К.: Техніка, 2000. – 792 с.

8. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. – М.: Айрис-пресс, 2009. – 608 с.

9. Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам. – М.: Айрис-пресс, 2008. – 288 с.

10. Решебник. Высшая математика. Специальные разделы / В.И. Афанасьев и др.; под ред. А.И. Кириллова. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 400 с.

11. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеєва Г.М. та ін. Вища математика у прикладах та задачах. Ч. 3. Диференціальні рівняння. Ряди. Функції комплексної змінної. Операційне числення. – Харків: ХНУРЕ, 2002. – 596 с.

12. Шипачев В.С. Высшая математика: Учебник для вузов. – М.: Юрайт, Высшее образование, 2009. – 480 с.

13. Эйдерман В.Я. Основы теории функций комплексного переменного и операционного исчисления. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 256 с.

Збірники задач

14. Вища математика: Збірник задач: Навч. посібник / В.П. Дубовик, І.І. Юрик, І.П. Вовкодав та ін.; За ред. В.П. Дубовика, І.І. Юрика. – К.: А.С.К., 2004. – 480 с.

15. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. пособие для студентов вузов. – М.: Высш. шк., 2002. – 405 с.

16. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике: Учеб. пособие для втузов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 336 с.

17. Сборник задач по высшей математике. 2 курс / К.Н. Лунгу и др.; под ред. С.Н. Федина. – М.: Айрис-пресс, 2007. – 592 с.

18. Сборник задач по математике для втузов. В 4 частях. Ч. 3: Учеб. пособие для втузов / Под общ. ред. А.В. Ефимова и А.С. Поспелова. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 576 с.

19. Сборник задач по математике для втузов. В 4 частях. Ч. 4: Учеб. пособие для втузов / Под общ. ред. А.В. Ефимова и А.С. Поспелова. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 432 с.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА

Виконання контрольної роботи треба починати з вивчення теоретичних положень за наведеними посиланнями, причому це необхідно поєднувати з самостійним розв’язанням рекомендованих задач. До виконання контрольних завдань доцільно приступати тільки після вироблення достатніх практичних навичок. Типові приклади наведені з метою допомогти в цьому. Вони перенумеровані наступним чином: перша цифра означає порядковий номер контрольної роботи, друга цифра – порядковий номер прикладу. Перша цифра номеру рисунка означає порядковий номер контрольної роботи, друга цифра – його порядковий номер.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 7

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ

Рекомендується (скориставшись одним або двома з наведених нижче джерел)

– вивчити теоретичні положення за **[1]**, гл. 1, 2, 3 (§§ 3.1-3.4), 4, 5, 6 (§§ 6.1-6.3); **[2]**, гл. 6; **[3]**, гл. 1-7, 8 (§§ 1-7), 11, 12 (§§ 1-7), 13; **[5]**, гл. 9, §§ 3-4; **[7]**, гл. 3, §§ 3.1-3.11, 5.1-5.4, 6.1, 6.3; **[8]**, гл. XV, XVIII; **[9]**, гл. 1, гл. 2, §§ 2.1-2.5 ; **[12]**, гл. 14, § 7; **[13]**, гл. VIII;

– розібрати розв'язання задач у **[4]**, гл. III, §§ 8-9, гл. V, §§ 1-6, 8-11, 14, гл. VIII, §§ 1-4; **[6]**, гл. 1, § 1, пр. 1-24, § 2, пр. 1-3, § 4; **[10]**, гл. 2, 6 (§§ 6.1-6.15); **[11]**, гл. 2, § 3; **[13]**, гл. IX, § 33, №№ 33.36-33.41;

– самостійно розв'язати задачі: **[4]**, №№ 489, 492, 497, 500, 505, 506, 812-814, 832, 834, 837, 843, 846, 859, 866, 870, 871, 874, 883, 886, 898, 906, 912, 932, 1112, 1118, 1125, 1126, 1143, 1146, 1148, 1149; **[14]**, гл. 9, №№ 382, 384, 391, 403, 438, 442, 450, 451; **[15]**, №№ 5, 21, 28, 45, 51, 57, 82, 85, 93, 94, 99, 101, 112, 121, 126, 133, 146, 171, 173, 180, 193, 211, 220, 257, 260, 269, 272, 276, 296, 309, 329, 351; **[16]**, №№ 2552, 2560, 2563, 2570; **[17]**, №№ <u>1.4.</u>10, 12, 18, 21-б, 23-б, 25, 29, <u>6.1.</u>4, 6, 12, 18, 23, 24, <u>6.3.</u>4, 5, 6, 18, <u>6.4.</u>4, 14, 16, 24, 35, <u>6.5.</u>3, 5, 10, <u>6.6.</u>5, <u>6.7.</u>4, 10, 16, <u>6.8.</u>4, 9, <u>6.9.</u>4, 8, <u>6.10.</u>3, 4, <u>6.11.</u>2, 3, 4, 8, 59, <u>8.1.</u>2, 3, 6, 8, 10, 13, 23-31, 43, 54, 61, 62, 64, 67, <u>8.2.</u>2-7, 10, 12-а,б, 13, 14, <u>8.3.</u>4, 5, 9, 17, 38, 48, 49; **[18]**, гл. 14, №№ 1-9, 17, 18, 19, 25, 32, 34, 40, 44, 45, 47, 48, 74 -76, 79, 86,87, 93, 94, 111, 113, 114, 131; **[19]**, гл. 18, №№ 66, 68, 78, 84, 87, 164, 191, 196, 226, 244, 258-260, 271, 312, 352, 361, 364.

<u>Приклад 7.1.</u> Розвинути в ряд Фур'є періодичну функцію $f(x)=\begin{cases} x/3, & -3 \le x \le 0, \\ 3-x, & 0 < x \le 3 \end{cases}$, задану на проміжку, довжина якого дорівнює періоду.

Розв'язання. Графік функції наведений на рис. 7.1. Судячи з умови, період функції $T = 2l = 6$, тобто напівперіод $l = 3$. Функція $f(x)$ не є ані парною, ані непарною, і на проміжку $[-3, 3]$, де вона задана, неперервна, за винятком однієї точки розриву першого роду $x = 0$. Отже, $f(x)$ задовольняє умови теореми Діріхле. Тому відповідний ряд Фур'є

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l},$$

де $\quad a_0=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx,\qquad a_n=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\quad b_n=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,$

збігається в кожній точці $x\in(-l,l)$, причому сума ряду $S(x)=f(x)$ у точках неперервності функції $f(x)$, $S(x)=\frac{1}{2}\left[\lim\limits_{t\to x+0} f(t)+\lim\limits_{t\to x-0} f(t)\right]$ у точках розриву, $S(\pm l)=\frac{1}{2}\left[\lim\limits_{t\to -l+0} f(t)+\lim\limits_{t\to l-0} f(t)\right]$ на кінцях інтервалу $(-l,l)$.

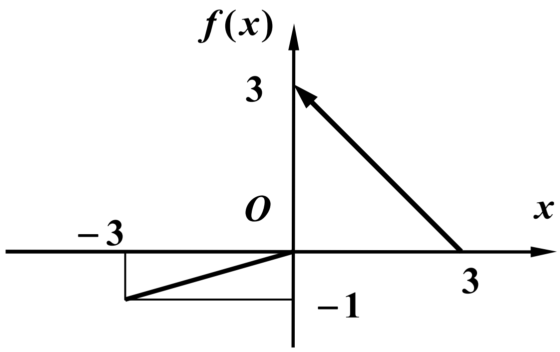

Рис. 7.1

Обчислимо коефіцієнти ряду:

$$a_0=\frac{1}{3}\int\limits_{-3}^{3} f(x)dx=\frac{1}{3}\left[\int\limits_{-3}^{0}\frac{x}{3}dx+\int\limits_{0}^{3}(3-x)\,dx\right]=1,$$

$$a_n=\frac{1}{3}\int\limits_{-3}^{3} f(x)\cos\frac{n\pi x}{3}dx=\frac{1}{3}\left[\int\limits_{-3}^{0}\frac{x}{3}\cos\frac{n\pi x}{3}dx+\int\limits_{0}^{3}(3-x)\cos\frac{n\pi x}{3}dx\right]=$$

$$=\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{3x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}+\frac{9}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{3}\right)\Bigg|_{-3}^{0}+\left[\frac{3}{n\pi}(3-x)\sin\frac{n\pi x}{3}-\frac{9}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{3}\right]\Bigg|_{0}^{3}\right\}=$$

$$=\frac{4}{n^2\pi^2}\left[1-(-1)^n\right]=\begin{cases}0, & n=2k,\\ \dfrac{8}{(2k-1)^2\pi^2}, & n=2k-1,\end{cases}\quad (k=1,2,\ldots),$$

$$b_n=\frac{1}{3}\int\limits_{-3}^{3}f(x)\sin\frac{n\pi x}{3}dx=\frac{1}{3}\left[\int\limits_{-3}^{0}\frac{x}{3}\sin\frac{n\pi x}{3}dx+\int\limits_{0}^{3}(3-x)\sin\frac{n\pi x}{3}dx\right]=$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\left(-\frac{3x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}+\frac{9}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{3}\right)\Bigg|_{-3}^{0}+\left(-\frac{3}{n\pi}(3-x)\cos\frac{n\pi x}{3}-\frac{9}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{3}\right)\Bigg|_{0}^{3}\right]=$$

$$=\frac{1}{n\pi}\left[3-(-1)^n\right]=\begin{cases}\dfrac{1}{k\pi}, & n=2k,\\ \dfrac{4}{(2k-1)\pi}, & n=2k-1,\end{cases}\qquad (k=1,2,\ldots).$$

Отже, враховуючи *тільки ненульові* члени ряду, одержуємо, що задана функція в точках її неперервності подається у вигляді

$$f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{8}{(2k-1)^2\pi^2}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{3}+\frac{4}{(2k-1)\pi}\sin\frac{(2k-1)\pi x}{3}+\frac{1}{k\pi}\sin\frac{2k\pi x}{3}.$$

В точці розриву $x=0$ значення суми ряду

$$S(0)=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to 0-0}f(x)+\lim_{x\to 0+0}f(x)\right]=\frac{1}{2}[0+3]=\frac{3}{2},$$

а в межових точках $x=\pm 3$ воно є

$$S(\pm 3)=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to -3+0}f(x)+\lim_{x\to 3-0}f(x)\right]=\frac{1}{2}[-1+0]=-\frac{1}{2}.$$

Приклад 7.2. Подати у вигляді інтеграла Фур'є функцію

$$f(x)=\begin{cases}2x+3, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$$

Розв'язання. Кусково-гладка і абсолютно інтегровна на $(-\infty,+\infty)$ функція $f(x)$ може бути подана у вигляді *інтеграла Фур'є*

$$f(x)=\int\limits_{0}^{+\infty}\left[A(\alpha)\cos\alpha x+B(\alpha)\sin\alpha x\right]d\alpha,$$

де $A(\alpha)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha t\,dt$, $B(\alpha)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\alpha t\,dt$.

Ескіз графіка заданої функції наведений на рис. 7.2. Функція ані парна, ані непарна (загального типу).

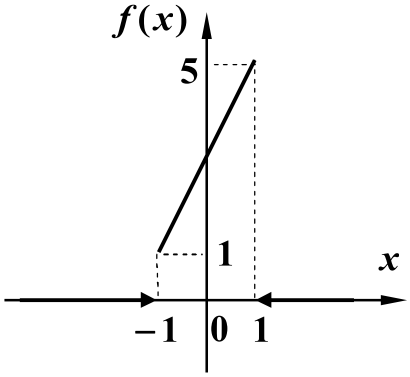

Рис. 7.2

Переконаємось, що $f(x)$ абсолютно інтегровна на $(-\infty,+\infty)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx=\int_{-\infty}^{-1}0\cdot dx+\int_{-1}^{1}(2x+3)dx+\int_{1}^{+\infty}0\cdot dx=0+(x^2+3x)\Big|_{-1}^{1}+0=6<\infty.$$

Задана функція кусково-гладка на $(-\infty,+\infty)$. Це випливає з того, що $f'(x)=\begin{cases}2, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1\end{cases}$ скінченна на кожному з проміжків. Отже, задану функцію справді можна зобразити інтегралом Фур'є. Знайдемо $A(\alpha)$ та $B(\alpha)$.

$$A(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha t\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}(2t+3)\cos\alpha t\,dt=\left|\begin{array}{ll}u=2t+3, & dv=\cos\alpha t dt,\\ du=2dt, & v=\dfrac{1}{\alpha}\sin\alpha t\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{2t+3}{\alpha}\sin\alpha t\Big|_{-1}^{1}-\frac{2}{\alpha}\int_{-1}^{1}\sin\alpha t\,dt\right)=\frac{1}{\pi}\left(6\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}+\frac{2}{\alpha^2}\cos\alpha t\Big|_{-1}^{1}\right)=6\,\frac{\sin\alpha}{\pi\alpha},$$

$$B(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\alpha t\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}(2t+3)\sin\alpha t\,dt=\left|\begin{array}{ll}u=2t+3, & dv=\sin\alpha t dt,\\ du=2dt, & v=-\dfrac{1}{\alpha}\cos\alpha t\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{2t+3}{\alpha}\cos\alpha t\Big|_{-1}^{1}+\frac{2}{\alpha}\int_{-1}^{1}\cos\alpha t\,dt\right)=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{4}{\alpha}\cos\alpha+\frac{2}{\alpha^2}\sin\alpha t\Big|_{-1}^{1}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{4}{\alpha^2}\sin\alpha-\frac{4}{\alpha}\cos\alpha\right)=\frac{4}{\pi\alpha}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}-\cos\alpha\right).$$

Отже, інтеграл Фур’є заданої функції має вигляд

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\left[6\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cos\alpha x+\frac{4}{\alpha}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}-\cos\alpha\right)\sin\alpha x\right]d\alpha\,.$$

У точках розриву $x^{*}=\pm 1$ інтеграл Фур'є дорівнює

$$\frac{1}{2}\left[f(x^{*}-0)+f(x^{*}+0)\right].$$

<u>Приклад 7.3.</u> Подати у вигляді інтеграла Фур'є функцію

$$f(x)=\begin{cases} e^{x}, & -2\le x<0,\\ e^{-x}, & 0<x\le 2,\\ 0, & |x|>2.\end{cases}$$

Розв'язання. Ескіз графіка заданої функції наведений на рис. 7.3.

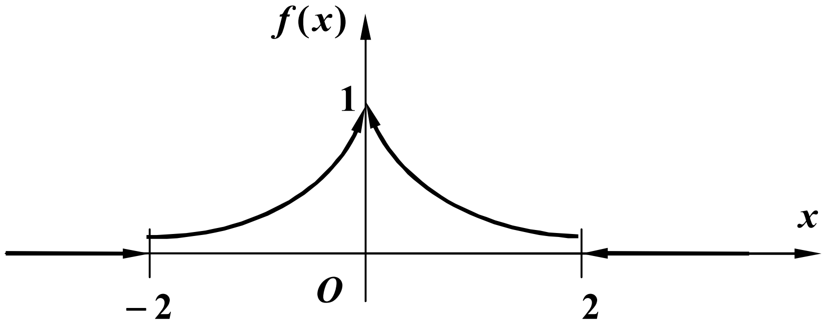

Рис. 7.3

Задана функція кусково-гладка і абсолютно інтегровна на $(-\infty,+\infty)$, оскільки

похідна $f'(x)=\begin{cases} e^{x}, & -2\le x<0,\\ -e^{-x}, & 0<x\le 2,\\ 0, & |x|>2\end{cases}$ скінченна на кожному з проміжків і

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx=\int\limits_{-\infty}^{-2}0\cdot dx+\int\limits_{-2}^{0}e^{x}dx+\int\limits_{0}^{2}e^{-x}dx+\int\limits_{2}^{+\infty}0\cdot dx=\ 0+e^{x}\Big|_{-2}^{0}-e^{-x}\Big|_{0}^{2}+0=$$

$$=2\left(1-\frac{1}{e^{2}}\right)<\infty\,.$$

Задана функція *парна*, отже, її можна подати інтегралом Фур'є у вигляді

$$f(x)=\int\limits_{0}^{+\infty}A(\alpha)\cos\alpha x\,d\alpha\,,$$

де $A(\alpha)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} f(t)\cos\alpha t\,dt$. Отже,

$$A(\alpha)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} f(t)\cos\alpha t\,dt=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{2} e^{-t}\cos\alpha t dt=\frac{2}{\pi}\left[\frac{e^{-t}}{1+\alpha^2}\left(-\cos\alpha t+\alpha\sin\alpha t\right)\right]\Bigg|_0^2=$$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{1+\alpha^2}\left(\frac{-\cos 2\alpha+\alpha\sin 2\alpha}{e^2}+1\right).$$

Зауваження. Інтеграл $\int e^{-t}\cos\alpha t\,dt$ відноситься до так званих “циклічних” інтегралів, що беруться по частинах. Тут ми використали формулу первісної $\int e^{ax}\cos bx dx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx+b\sin bx)$.

Таким чином, інтеграл Фур'є має вигляд

$$f(x)=\frac{2}{\pi e^2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\alpha\sin 2\alpha-\cos 2\alpha+e^2}{1+\alpha^2}\cos\alpha x\,d\alpha.$$

Приклад 7.4. Подати у вигляді інтеграла Фур'є функцію

$$f(x)=\begin{cases} e^x, & -2\le x<0,\\ -e^{-x}, & 0<x\le 2,\\ 0, & |x|>2.\end{cases}$$

Розв’язання. Ескіз графіка заданої функції наведений на рис. 7.4.

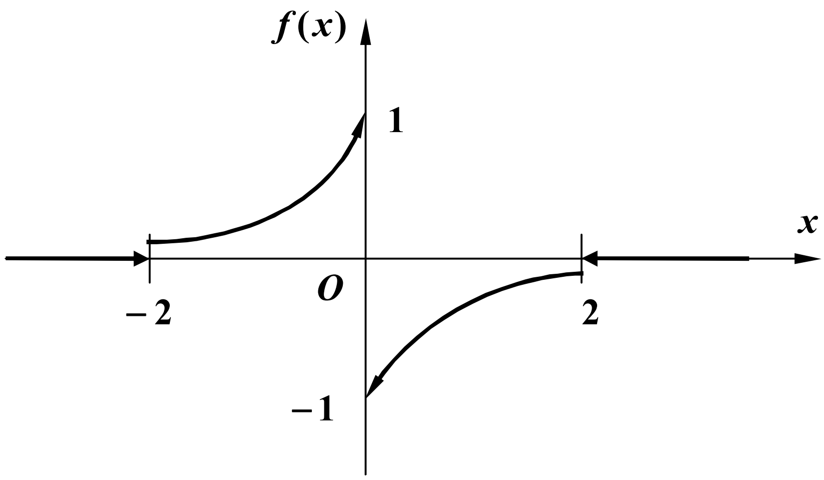

Рис. 7.4

Задана функція кусково-гладка і абсолютно інтегровна на $(-\infty,+\infty)$, оскільки

похідна $f'(x)=\begin{cases} e^{x}, & -2\le x<0,\\ e^{-x}, & 0<x\le 2,\\ 0, & |x|>2 \end{cases}$ скінченна на кожному з проміжків і

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx=\int_{-\infty}^{-2}0\cdot dx+\int_{-2}^{0}e^{x}dx+\int_{0}^{2}e^{-x}dx+\int_{2}^{+\infty}0\cdot dx=\ 0+e^{x}\Big|_{-2}^{0}-e^{-x}\Big|_{0}^{2}+0=$$

$$=2\left(1-\frac{1}{e^{2}}\right)<\infty.$$

Задана функція *непарна*, отже, її можна подати інтегралом Фур'є у вигляді

$$f(x)=\int_{0}^{+\infty}B(\alpha)\sin\alpha x\,d\alpha,$$

де $B(\alpha)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{+\infty}f(t)\sin\alpha t\,dt$. Отже,

$$B(\alpha)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}f(t)\sin\alpha t\,dt=-\frac{2}{\pi}\int_{0}^{2}e^{-t}\sin\alpha t\,dt=-\frac{2}{\pi}\left[\frac{e^{-t}}{1+\alpha^{2}}\big(-\sin\alpha t-\alpha\cos\alpha t\big)\right]\Bigg|_{0}^{2}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{1+\alpha^{2}}\left(\frac{\sin 2\alpha+\alpha\cos 2\alpha}{e^{2}}-\alpha\right).$$

Зауваження. Використана формула первісної “циклічного” інтеграла

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{e^{ax}}{a^{2}+b^{2}}(a\sin bx-b\cos bx).$$

Таким чином, інтеграл Фур'є має вигляд

$$f(x)=\frac{2}{\pi e^{2}}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin 2\alpha+\alpha\cos 2\alpha-\alpha e^{2}}{1+\alpha^{2}}\sin\alpha x\,d\alpha.$$

Зауваження. Якщо функція $f(x)$ задана лише на півосі $(0,+\infty)$, то її можна продовжити на всю вісь $(-\infty,+\infty)$ парним або непарним способом за наведеними вище формулами.

<u>Приклад 7.5.</u> Знайти перетворення Фур'є функції $f(x)=\begin{cases} x, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1 \end{cases}$.

Розв'язання. Якщо функція $f(x)$ така, що подається інтегралом Фур'є , то в кожній точці, де $f(x)$ диференційовна, існує функція

$$F(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\alpha x}dx,$$

яка називається *перетворенням Фур'є функції* $f(x)$.

Задана функція кусково-гладка на $(-\infty,+\infty)$, оскільки $f'(x)=\begin{cases}1, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1\end{cases}$ скінченна на кожному скінченному відрізку $[-l,l]$ числової осі. Переконаємось далі, що $f(x)$ абсолютно інтегровна на $(-\infty,+\infty)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx=\int_{-1}^{1}|x|dx=\int_{-1}^{0}(-x)dx+\int_{0}^{1}xdx=-\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-1}^{0}+\frac{x^2}{2}\Bigg|_{0}^{1}=1<\infty.$$

Отже, перетворення Фур'є існує і за наведеною формулою

$$F(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-\int_{-1}^{0}xe^{-i\alpha x}dx+\int_{0}^{1}xe^{-i\alpha x}dx\right).$$

Інтегруючи частинами, одержимо

$$-\int_{-1}^{0}xe^{-i\alpha x}dx=e^{-i\alpha x}\left(\frac{x}{i\alpha}-\frac{1}{\alpha^2}\right)\Bigg|_{-1}^{0}=-\frac{1}{\alpha^2}+e^{-i\alpha}\left(\frac{1}{i\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}\right),$$

$$\int_{0}^{1}xe^{-i\alpha x}dx=-e^{-i\alpha x}\left(\frac{x}{i\alpha}-\frac{1}{\alpha^2}\right)\Bigg|_{0}^{1}=-e^{-i\alpha}\left(\frac{1}{i\alpha}-\frac{1}{\alpha^2}\right)-\frac{1}{\alpha^2}.$$

Підсумовуючи значення обох інтегралів, отримуємо $F(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{e^{-i\alpha}-1}{\alpha^2}$.

<u>Приклад 7.6.</u> Знайти косинус- та синус-перетворення Фур'є функції

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\le x\le\pi,\\ 0, & x>\pi\end{cases}.$$

Розв'язання. Якщо функція $f(x)$ кусково-гладка і абсолютно інтегровна на півосі $(0,+\infty)$, то існують функції

$$F_c(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty}f(x)\cos\alpha x\,dx \quad \text{та} \quad F_s(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty}f(x)\sin\alpha x\,dx,$$

які називаються відповідно *косинус-перетворенням* та *синус-перетворенням Фур'є* функції $f(x)$.

Задана функція задовольняє вказані умови. Отже,

$$F_c(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\pi}\sin x\cos\alpha x\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\pi}[\sin(1-\alpha)x+\sin(1+\alpha)x]\,dx=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\cos(1-\alpha)x}{1-\alpha}+\frac{\cos(1+\alpha)x}{1+\alpha}\right]\Bigg|_0^{\pi}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\cos(1-\alpha)\pi}{1-\alpha}+\frac{\cos(1+\alpha)\pi}{1+\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}-\frac{1}{1+\alpha}\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\cos\pi\alpha}{1-\alpha}+\frac{\cos\pi\alpha}{1+\alpha}+\frac{1}{1-\alpha}+\frac{1}{1+\alpha}\right]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\cos\pi\alpha+1}{1-\alpha^2}\ ,$$

$$F_s(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\pi}\sin x\sin\alpha x\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\pi}[\cos(1-\alpha)x-\cos(1+\alpha)x]\,dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\sin(1-\alpha)x}{1-\alpha}-\frac{\sin(1+\alpha)x}{1+\alpha}\right]\Bigg|_0^{\pi}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\sin(1-\alpha)\pi}{1-\alpha}-\frac{\sin(1+\alpha)\pi}{1+\alpha}\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sin\pi\alpha\left(\frac{1}{1-\alpha}+\frac{1}{1+\alpha}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\sin\pi\alpha}{1-\alpha^2}.$$

Приклад 7.7. Знайти зображення функції $f(t)=te^{3t}\eta(t-2)$.

Розв'язання. Розглянемо два способи.

Перший спосіб. Перетворимо тотожно задану функцію:

$$f(t)=te^{3t}\eta(t-2)=te^{3(t-2+2)}\eta(t-2)=e^6te^{3(t-2)}\eta(t-2).$$

Оскільки $e^{3t}\to\dfrac{1}{p-3}$, то за теоремою запізнювання $e^{3(t-2)}\eta(t-2)\to\dfrac{1}{p-3}e^{-2p}$,

а за теоремою про диференціювання зображення

$$te^{3(t-2)}\eta(t-2)\to-\left(\frac{1}{p-3}e^{-2p}\right)'=-\left[-\frac{1}{(p-3)^2}e^{-2p}-2\frac{1}{p-3}e^{-2p}\right]=$$

$$= e^{-2p}\left[\frac{1}{(p-3)^2}+\frac{2}{p-3}\right].$$ З урахуванням лінійності перетворення Лапласа

остаточно маємо $F(p)=e^{-2p+6}\left[\frac{1}{(p-3)^2}+\frac{2}{p-3}\right]$.

Другий спосіб. Перетворимо тотожно задану функцію дещо по іншому:

$$f(t)=te^{3t}\eta(t-2)=(t-2+2)e^{3t}\eta(t-2)=e^{3t}(t-2)\eta(t-2)+2e^{3t}\eta(t-2)=$$

$$=e^{3t}\left[(t-2)\eta(t-2)+2\eta(t-2)\right].$$

Оскільки $t\to\frac{1}{p^2}$, $1\to\frac{1}{p}$, то за теоремою запізнювання $(t-2)\eta(t-2)\to\frac{1}{p^2}e^{-2p}$, $\eta(t-2)\to\frac{1}{p}e^{-2p}$. Тоді за теоремою зміщення з урахуванням лінійності перетворення Лапласа одержуємо

$$F(p)=\frac{1}{(p-3)^2}e^{-2(p-3)}+\frac{2}{p-3}e^{-2(p-3)}.$$

<u>Приклад 7.8.</u> Знайти зображення функції $f(t)=\frac{e^{-2t}\sin^2 3t}{t}$.

Розв'язання. Оскільки $\sin^2 3t=\frac{1-\cos 6t}{2}$, то за теоремою зміщення та властивістю лінійності перетворення Лапласа маємо

$$e^{-2t}\sin^2 3t\to\frac{1}{2}\left[\frac{1}{p+2}-\frac{p+2}{(p+2)^2+36}\right].$$

Тоді за теоремою про інтегрування зображення

$$f(t)=\frac{e^{-2t}\sin^2 3t}{t}\to\int_p^{+\infty}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{q+2}-\frac{q+2}{(q+2)^2+36}\right]dq=\frac{1}{2}\lim_{B\to+\infty}\Big[\ln|q+2|-$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left[(q+2)^2+36\right]\Big]\Big|_p^B=\frac{1}{2}\lim_{B\to+\infty}\ln\frac{B+2}{\sqrt{(B+2)^2+36}}-\frac{1}{2}\ln\frac{p+2}{\sqrt{(p+2)^2+36}}=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{(p+2)^2+36}{(p+2)^2}$$ (тут враховано, що $\lim\limits_{B\to+\infty}\ln\frac{B+2}{\sqrt{(B+2)^2+36}}=$

$$= \ln \lim_{B \to +\infty} \frac{B+2}{\sqrt{(B+2)^2+36}} = \ln 1 = 0).$$

<u>Приклад 7.9.</u> Знайти зображення функції $f(t) = \int\limits_0^t \tau^3 e^{\tau} d\tau$.

Розв'язання.

Оскільки $t^3 \to \frac{3!}{p^4}$, то за теоремою зміщення $t^3 e^t \to \frac{3!}{(p-1)^4}$ (інакше: оскільки $e^t \to \frac{1}{p-1}$, то за теоремою про диференціювання зображення $t^3 e^t \to (-1)^3 \left(\frac{1}{p-1} \right)''' = \frac{6}{(p-1)^4}$). Тоді за теоремою про інтегрування оригіналу

$$f(t) = \int\limits_0^t \tau^3 e^{\tau} d\tau \to \frac{6}{p(p-1)^4}.$$

<u>Приклад 7.10.</u> Знайти зображення імпульсної функції

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 3, \\ h, & 3 \le t < 5, \\ 0, & t \ge 5. \end{cases}$$

Розв'язання. Графік функції наведений на рис. 7.5.

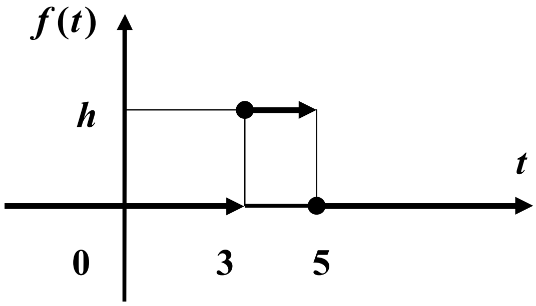

Рис. 7.5

Кусково-неперервна функція $f(t) = \begin{cases} 0, & t < a, \quad t > b, \\ \varphi(t) \ne 0 & \forall t \in (a, b) \end{cases}$ (рис. 7.6)

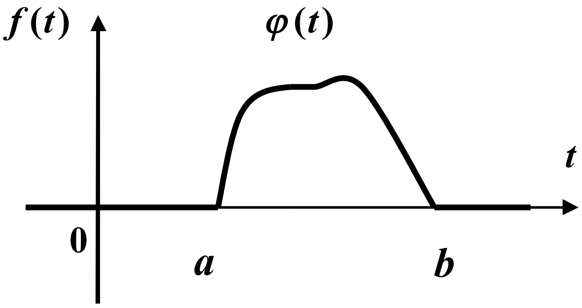

Рис. 7.6

подається формулою

$$f(t) = \quad (t)\cdot\left[\,\eta(t-a)-\eta(t-b)\right],$$

отже, задана функція може бути зображена у вигляді

$$f(t) = h\cdot\eta(t-3) - h\cdot\eta(t-5) = h\left[\eta(t-3)-\eta(t-5)\right].$$

Тоді за властивістю лінійності і теоремою запізнювання маємо

$$f(t) \to h\left(e^{-3t}\frac{1}{p} - e^{-5t}\frac{1}{p}\right) = h\frac{e^{-3t}}{p}\left(1-e^{-2t}\right).$$

<u>Приклад 7.11.</u> Знайти оригінал, що відповідає зображенню

$$F(p) = \frac{p+1}{(p-1)(p+3)}.$$

*Розв'язання***.** Розкладемо дріб $\dfrac{p+1}{(p-1)(p+3)}$ у суму найпростіших дробів:

$$F(p) = \frac{p+1}{(p-1)(p+3)} = \frac{1}{2(p-1)} + \frac{1}{2(p+3)}.$$

За таблицею оригіналів і зображень з урахуванням лінійності знаходимо:

$$f(t) = \frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{2}e^{-3t}.$$

<u>Приклад 7.12.</u> Відновити оригінал за зображенням

$$F(p) = \frac{1}{(p-1)(p+1)^3}.$$

*Розв'язання***.** Розкладемо дріб $\dfrac{1}{(p-1)(p+1)^3}$ у суму найпростіших дробів:

$$F(p)=\frac{1}{(p-1)(p+1)^3}=-\frac{1}{2(p+1)^3}-\frac{1}{4(p+1)^2}-\frac{1}{8(p+1)}+\frac{1}{8(p-1)}.$$

За таблицею оригіналів і зображень з урахуванням лінійності знаходимо:

$$f(t)=-\frac{1}{4}t^2e^{-t}-\frac{1}{4}te^{-t}-\frac{1}{8}e^{-t}+\frac{1}{8}e^{t}=\frac{1}{8}\left[e^t-e^{-t}\left(2t^2+2t+1\right)\right].$$

Приклад 7.13. Знайти оригінал, що відповідає зображенню

$$F(p)=\frac{pe^{-3p}}{(p^2-4)(p^2+4p+8)}.$$

Розв'язання. Розкладемо дріб $\frac{p}{(p^2-4)(p^2+4p+8)}$ у суму найпростіших дробів:

$$\frac{p}{(p^2-4)(p^2+4p+8)}=\frac{1}{40}\cdot\frac{1}{p-2}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{p+2}-\frac{3}{20}\cdot\frac{p+\frac{8}{3}}{p^2+4p+8}.$$

За таблицею основних зображень (додаток 1) і за теоремою зміщення з урахуванням лінійності маємо

$$\frac{1}{40}\cdot\frac{1}{p-2}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{p+2}\leftarrow\frac{1}{40}e^{2t}+\frac{1}{8}e^{-2t},$$

$$-\frac{3}{20}\cdot\frac{p+\frac{8}{3}}{p^2+4p+8}=-\frac{3}{20}\cdot\frac{p+2+\frac{2}{3}}{p^2+4p+8}\leftarrow-\frac{3}{20}\cdot e^{-2t}\cos 2t-\frac{1}{20}\cdot e^{-2t}\sin 2t,$$

отже,

$$\frac{p}{(p^2-4)(p^2+4p+8)}\leftarrow\frac{1}{40}e^{2t}+\frac{1}{8}e^{-2t}-\frac{3}{20}\cdot e^{-2t}\cos 2t-\frac{1}{20}\cdot e^{-2t}\sin 2t.$$

Тоді за теоремою запізнювання остаточно маємо

$$f(t)=\left[\frac{1}{40}e^{2t-6}+\frac{1}{8}e^{-2t+6}-\frac{1}{20}\cdot e^{-2t+6}[3\cos(2t-6)+\sin(2t-6)]\right]\cdot\eta(t-3).$$

Приклад 7.14. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$x''+4x'+4x=e^{-2t}(\cos t+2\sin t),$$

що задовольняє початковим умовам $x(0) = -1,\ x'(0) = 1.$

Розв'язання. Нехай $x(t) \to X(p)$. Тоді за теоремою про диференціювання оригіналу з урахуванням початкових умов маємо

$$x'(t) \to pX(p)+1,\ x''(t) \to p^2X(p)+p-1.$$

За таблицею оригіналів і зображень (додаток 1) з урахуванням лінійності знаходимо

$$\cos t + 2\sin t \to \frac{p}{p^2+1} + 2\cdot\frac{1}{p^2+1} = \frac{p+2}{p^2+1}.$$

Тоді за теоремою зміщення

$$e^{-2t}(\cos t + 2\sin t) \to \frac{p+4}{(p+2)^2+1}.$$

Підставивши усі отримані вирази до заданого рівняння, отримаємо операторне рівняння у вигляді

$$p^2X(p)+p-1+4pX(p)+4+4X(p) = \frac{p+4}{(p+2)^2+1}$$

або, після перетворень,

$$(p^2+4p+4)X(p)+p+3 = \frac{p+4}{(p+2)^2+1}.$$

Знайдемо звідси зображення розв'язку:

$$X(p) = -\frac{p^3+7p^2+16p+11}{[(p+2)^2+1]\,(p+2)^2}.$$

Розклавши дріб у суму найпростіших дробів, отримаємо:

$$X(p) = -\frac{p+4}{(p+2)^2+1} + \frac{1}{(p+2)^2} = -\frac{p+2}{(p+2)^2+1} - 2\cdot\frac{1}{(p+2)^2+1} + \frac{1}{(p+2)^2}.$$

Оскільки $\dfrac{p}{p^2+1} \leftarrow \cos t,\ \dfrac{1}{p^2+1} \leftarrow \sin t,\ \dfrac{1}{p^2} \leftarrow t$, то за теоремою зміщення і властивістю лінійності остаточно маємо розв'язок задачі Коші у вигляді

$$\tilde{x}(t) = e^{-2t}(t - \cos t - 2\sin t).$$

<u>Приклад 7.15.</u> Знайти розв'язок задачі Коші $x'' - 2x' + x = f(t)$,

$x(0) = 0, x'(0) = 0$, де $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ -1, & 1 < t < 3, \\ 2, & t > 3. \end{cases}$

Розв'язання. Права частина рівняння є кусково-неперервною функцією. За формулою $f(t) = \ (t) \cdot [\,\eta(t-a) - \eta(t-b)]$ зобразимо її у вигляді

$$f(t) = -[\eta(t-1) - \eta(t-3)] + 2\,\eta(t-3)$$

або

$$f(t) = -\ \eta(t-1) + 3\eta(t-3).$$

Нехай $x(t) \to X(p)$. Тоді за теоремою про диференціювання оригіналу маємо $x'(t) \to pX(p)$, $x''(t) \to p^2 X(p)$. За таблицею оригіналів і зображень і теоремою лінійності

$$f(t) = -\ \eta(t-1) + 3\eta(t-3) \to -\frac{e^{-p}}{p} + 3 \cdot \frac{e^{-3p}}{p}.$$

Підставивши усі отримані вирази до заданого рівняння, отримаємо операторне рівняння у вигляді

$$(p^2 - 2p + 1)X(p) = \frac{3e^{-3p} - e^{-p}}{p},$$

звідки зображення розв'язку

$$X(p) = \frac{3e^{-3p} - e^{-p}}{p(p-1)^2}.$$

Розклавши дріб $\dfrac{1}{p(p-1)^2}$ у суму найпростіших дробів, отримаємо:

$$\frac{1}{p(p-1)^2} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p-1} + \frac{1}{(p-1)^2}.$$

Оскільки $\dfrac{1}{p} \leftarrow 1$, $\dfrac{1}{p^2} \leftarrow t$, то за теоремою зміщення з урахуванням лінійності

$$\frac{1}{p(p-1)^2} \leftarrow 1-e^t+te^t.$$

Тоді за теоремою запізнювання з урахуванням лінійності остаточно маємо розв’язок задачі Коші у вигляді

$$\tilde{x}(t)=3\Big(1-e^{t-3}+(t-3)e^{t-3}\Big)\eta(t-3)-\Big(1-e^{t-1}+(t-1)e^{t-1}\Big)\eta(t-1).$$

<u>Приклад 7.16.</u> Знайти розв’язок задачі Коші

$$\begin{cases} \dot{x}-x-2y+9t=0 \\ \dot{y}-2x-y=4e^t \end{cases},\quad x(0)=1,\ y(0)=2.$$

Розв’язання. Позначимо $x(t)\to X(p)$, $y(t)\to Y(p)$. Оскільки $t\to\frac{1}{p^2}$, $e^t\to\frac{1}{p-1}$, то за теоремою про диференціювання оригіналу і властивістю лінійності отримуємо наступну систему операторних рівнянь відносно зображень $X(p)$ й $Y(p)$:

$$\begin{cases} (p-1)X(p)-2Y(p)=1-\dfrac{9}{p^2}, \\ -2X(p)+(p-1)Y(p)=2+\dfrac{4}{p-1}. \end{cases}$$

Знайдемо $X(p)$ й $Y(p)$ за формулами Крамера: $X(p)=\frac{\Delta_X}{\Delta}$, $Y(p)=\frac{\Delta_Y}{\Delta}$,

де $\Delta=\begin{vmatrix} p-1 & -2 \\ -2 & p-1 \end{vmatrix}=p^2-2p-3=(p-3)(p+1)$,

$$\Delta_X=\begin{vmatrix} \dfrac{p^2-9}{p^2} & -2 \\ \dfrac{2p+2}{p-1} & p-1 \end{vmatrix}=\frac{p^4+2p^3-4p^2+18p-9}{p^2(p-1)},$$

$$\Delta_Y=\begin{vmatrix} p-1 & \dfrac{p^2-9}{p^2} \\ -2 & \dfrac{2p+2}{p-1} \end{vmatrix}=\frac{2p^3+4p^2-18}{p^2}.$$

Отже, $X(p)=\dfrac{p^4+2p^3-4p^2+18p-9}{p^2(p-1)(p-3)(p+1)}$, $Y(p)=\dfrac{2p^3+4p^2-18}{p^2(p-3)(p+1)}$.

Розкладемо зображення у суму найпростіших дробів:

$$X(p)=\frac{5}{p}-\frac{3}{p^2}-\frac{2}{p-1}+\frac{2}{p-3}-\frac{4}{p+1},\quad Y(p)=-\frac{4}{p}+\frac{6}{p^2}+\frac{2}{p-3}+\frac{4}{p+1}.$$

Відновимо оригінали, застосувавши таблицю і властивість лінійності. Отже, розв'язок задачі має вигляд:

$$\tilde{x}(t)=5-3t-2e^t+2e^{3t}-4e^{-t},\quad \tilde{y}(t)=-4+6t+2e^{3t}+4e^{-t}.$$

Приклад 7.17. Куб, усі грані якого пофарбовані, розпилили на **1000** кубиків однакового розміру і ретельно їх перемішали. Знайти ймовірність того, що навмання витягнутий кубик має рівно одну пофарбовану грань.

Розв'язання. При розпилюванні вихідного куба, який має 6 граней, на $n=1000$ кубічних частин (загальне число можливих наслідків) утворюється $m=6\times8\times8=384$ кубика з однією пофарбованою гранню (число сприятливих наслідків). Тому за класичною формулою $P(A)=\dfrac{m}{n}$ маємо

$$P(A)=\frac{384}{1000}=\frac{96}{250}=0{,}384.$$

Приклад 7.18. Колоду з **36** гральних карт ретельно перемішують і навмання витягують одразу **3** карти. Знайти ймовірність того, що серед них буде хоча б одна "дама".

Розв'язання. Знайдемо ймовірність *протилежної* події, а саме: серед узятих карт немає жодної "дами". За класичною формулою маємо

$$q=\frac{C_4^0\cdot C_{32}^3}{C_{36}^3}.$$

Тоді шукана ймовірність $p=1-q=1-\dfrac{C_{32}^3}{C_{36}^3}=0{,}3053$.

Приклад 7.19. Та ж сама задача, але карти витягують *по черзі*, одну за одною.

Розв'язання. У даному випадку, на відміну від попереднього, маємо не одну, а три *залежні* події. Тому за теоремою множення ймовірностей залежних подій

$$P(A\cdot B\cdot C)=P(A)\cdot P_A(B)\cdot P_{AB}(C)$$

маємо $q=\frac{32}{36}\cdot\frac{31}{35}\cdot\frac{30}{34}=\frac{248}{357}$. Тоді $p=1-q=\frac{114}{357}=0,3053$.

Приклад 7.20. У крузі радіуса R розміщений малий круг радіуса $r<R$. Знайти ймовірність того, що точка, навмання кинута у великий круг, влучить також і в малий круг.

Розв'язання. За «геометричним» означенням ймовірності $P(A)=\frac{\Omega_A}{\Omega}$ маємо

$$p=\frac{S_r}{S_R}=\frac{\pi r^2}{\pi R^2}=\frac{r^2}{R^2}.$$

Приклад 7.21. Розрив електричної мережі може відбутися внаслідок відмови елемента E_1 або одночасно двох елементів E_2 й E_3, які відмовляють незалежно один від одного відповідно з ймовірностями $p_1=0,3$, $p_2=p_3=0,2$. Визначити ймовірність розриву електричної мережі.

Розв'язання. Мережа буде працювати (подія A), якщо жоден з елементів не відмовить. Тому за теоремою множення ймовірностей незалежних подій $P(A)=(1-p_1)\cdot(1-p_2p_3)=0,672$. Отже, ймовірність розриву мережі (подія $\overline{A}$)

$$P(\overline{A})=1-P(A)=0,328.$$

Приклад 7.22. Стрілець робить один постріл по мішені, яка складається з круга й двох концентричних кілець. Ймовірності попадання в круг і кільця відповідно дорівнюють $p_1=0,3$, $p_2=0,2$, $p_3=0,1$. Визначити ймовірність промаху.

Розв'язання. Мішень буде уражена (подія A), якщо відбудеться влучання або в круг, або в одне з кілець. Оскільки стрілець робить тільки один постріл, то ці події несумісні. За теоремою додавання ймовірностей несумісних подій $P(A_1+A_2+....+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)$ маємо

$$P(A) = p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}6.$$

Отже, ймовірність промаху (подія $\overline{A}$) є $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0{,}4$.

<u>Приклад 7.23.</u> Технічний пристрій містить три блоки, надійності яких відповідно дорівнюють $p_1 = 0{,}6$, $p_2 = 0{,}5$, $p_3 = 0{,}3$. При відмові за проміжок часу t усіх трьох блоків пристрій напевно виходить з ладу, при відмові лише одного блока ймовірність виходу з ладу $0{,}2$, а при відмові двох блоків вона складає $0{,}6$. Знайти ймовірність того, що за проміжок часу t пристрій вийде з ладу.

Розв'язання. Нехай подія A – вихід пристрою з ладу за проміжок часу t – відбувається за умови появи однієї з несумісних подій: B_1 – усі три блоки за час t працювали безвідмовно, B_2 – за час t відмовив тільки один блок, B_3 – за час t відмовили два блоки, B_4 – за час t відмовили усі три блоки.

Ймовірності відмов кожного з блоків: $q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$, $q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$, $q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$. За теоремами додавання і множення ймовірностей знайдемо ймовірності появ подій B_i $(i = \overline{1,4})$:

$$P(B_1) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 = 0{,}09,$$

$$P(B_2) = q_1 \cdot p_2 \cdot p_3 + p_1 \cdot q_2 \cdot p_3 + p_1 \cdot p_2 \cdot q_3 = 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 + {}$$
$$+ 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}36,$$

$$P(B_3) = q_1 \cdot q_2 \cdot p_3 + p_1 \cdot q_2 \cdot q_3 + q_1 \cdot p_2 \cdot q_3 = 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 + {}$$
$$+ 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}41,$$

$$P(B_4) = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 = 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}14.$$

Оскільки $\sum_{i=1}^{4} P(B_i) = 0{,}09 + 0{,}36 + 0{,}41 + 0{,}14 = 1$, то події B_i $(i = \overline{1,4})$ утворюють повну групу. Відповідні умовні ймовірності події A дорівнюють: $P_{B_1}(A) = 0$, $P_{B_2}(A) = 0{,}2$, $P_{B_3}(A) = 0{,}6$, $P_{B_4}(A) = 1$. За формулою повної ймовірності $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)$ маємо

$$P(A) = 0{,}09 \cdot 0 + 0{,}36 \cdot 0{,}2 + 0{,}41 \cdot 0{,}6 + 0{,}14 \cdot 1 = 0{,}458.$$

<u>Приклад 7.24.</u> По каналу зв'язку передається один з двох можливих сигналів x_1 або x_2, причому сигнал x_2 передається вдвічі частіше, ніж сигнал x_1. Через перешкоди можливі викривлення: замість одного сигналу може бути прийнятий інший і навпаки. Властивості каналу зв'язку такі, що сигнал x_1 зазнає викривлень приблизно у **10 %** випадків, а сигнал x_2 - у **20 %**. Нехай був отриманий сигнал x_1. Яка ймовірність того, що був переданий саме цей сигнал?

Розв'язання. Нехай подія A - був отриманий сигнал x_1.
Висунемо гіпотези: H_1 - був переданий сигнал x_1; H_2 - був переданий сигнал x_2. Тоді $P(H_1)=\frac{1}{3}$, $P(H_2)=\frac{2}{3}$, $P_{H_1}(A)=\frac{9}{10}$, $P_{H_2}(A)=\frac{4}{5}$. Ймовірність отримати за даних умов сигнал x_1 за формулою повної ймовірності є
$P(A)=\sum_{i=1}^{2}P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{10}+\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{25}{30}=\frac{5}{6}$. За відповідною формулою Байєса $P_A(H_1)=\frac{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)}{P(A)}$ ймовірність того, що був переданий саме сигнал x_1 (апостеріорна ймовірність гіпотези H_1) є

$$P_A(H_1)=\frac{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{10}}{\frac{5}{6}}=\frac{9}{25}=0{,}36.$$

Таким чином, отримання сигналу x_1 дещо збільшує ймовірність гіпотези H_1 у порівнянні з її апріорним значенням $\frac{1}{3}\approx 0{,}33$.

<u>Приклад 7.25.</u> Ймовірність того, що витрата електроенергії протягом однієї доби не перевищить установленої норми, дорівнює $p=0{,}75$. Знайти ймовірність того, що у найближчі 6 діб витрата електроенергії протягом **4** діб не перевищить норми.

Розв'язання. Ймовірність перевитрати електроенергії протягом кожної доби стала і дорівнює $q=1-0{,}75=0{,}25$. Оскільки число спроб $n=6$ невелике, а ймовірність $p=0{,}75$ не мала, то шукану ймовірність обчислимо за формулою Бернуллі $P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$, де $k=4$:

$$P_6(4) = C_6^4 p^4 q^2 = \frac{6!}{4!\,2!} \cdot 0{,}75^4 \cdot 0{,}25^2 = 0{,}297\,.$$

<u>Приклад 7.26.</u> Знайти ймовірність того, що подія A настане рівно **70** разів у **243** спробах, якщо ймовірність появи цієї події у кожній спробі стала і дорівнює **0,25**.

Розв'язання. Оскільки число спроб $n = 243$ велике, а ймовірність $p = 0{,}25$ не мала, то шукану ймовірність обчислимо за локальною формулою Лапласа $P_n(k) \sim \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)$: $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 243 \cdot 0{,}25}{\sqrt{243 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75}} = 1{,}37$, значення $\varphi(x) = \varphi(1{,}37) = 0{,}1561$ обчислюємо на калькуляторі за формулою $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ або знаходимо за таблицею у додатку 4,

$$P_{243}(70) = \frac{1}{\sqrt{243 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75}} \cdot 0{,}1561 = 0{,}0231.$$

<u>Приклад 7.27.</u> Ймовірність виходу з ладу за час T одного конденсатора дорівнює $p = 0{,}2$. Визначити ймовірність того, що зі **100** конденсаторів за час T вийдуть з ладу від **14** до **26** конденсаторів.

Розв'язання. Скористаємось інтегральною формулою Лапласа $P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, у якій покладемо $n = 100,\quad k_1 = 14,\quad k_2 = 26,$ $p = 0{,}2,\quad q = 1 - p = 0{,}8$. Обчисливши $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{14 - 100 \cdot 0{,}2}{\sqrt{100 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = -1{,}5$, $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{26 - 100 \cdot 0{,}2}{\sqrt{100 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = 1{,}5$, за таблицею у додатку 5 знаходимо $\Phi(1{,}5) = 0{,}4332$. Оскільки функція $\Phi(x)$ непарна, то $\Phi(-1{,}5) = -\,0{,}4332$. Тоді $P_{100}(14{,}26) = \Phi(1{,}5) - \Phi(-1{,}5) = 2 \cdot 0{,}4332 = 0{,}8664$.

<u>Приклад 7.28.</u> Знайти ймовірність того, що серед **30** навмання відібраних людей знайдеться хоча б одна людина, що народилася 1 січня. Якою повинна бути мінімальна чисельність групи людей, щоб з імовірністю не менше **50%** можна було стверджувати, що серед них знайдеться хоча б одна людина, що народилася 1 серпня? Прийняти, що дні народження *розподілені рівномірно*, тобто немає високосних років, близнюків, народжуваність не залежить від дня тижня, місяця, пори року, країни проживання та інших факторів.

Розв'язання. Ймовірність окремої особи народитися у певний день року складає $p = \frac{1}{365}$ і є доволі малою. Тому шукану ймовірність обчислимо за допомогою формули Пуассона $P_n(k) \sim \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ при $\lambda = np = 30 \cdot \frac{1}{365} = 0{,}08219$:

$P(A) = 1 - P_{30}(0) = 1 - \frac{e^{-0{,}08219}}{0!} \approx 1 - 0{,}9211 = 0{,}0789$. З іншого боку маємо $P(A) = 1 - (1-p)^n = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^{300} \approx 0{,}0790$. Отже, як бачимо, результати практично співпадають. При $n = 400$ ймовірність зростає до **0,6658**, а при $n = 600$ вона складає вже **0,807**, тобто приблизно **81**%. Мінімальну чисельність людей, при якій ймовірність збігу з певною датою принаймні одного дня народження складає **50**%, знайдемо з нерівності $1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n \geq 0{,}5$:

$$\left(\frac{364}{365}\right)^n \leq 0{,}5 \Rightarrow n \ln\left(\frac{364}{365}\right) \geq \ln 0{,}5 \Rightarrow n \geq \left[\frac{-0{,}6931}{-0{,}002743}\right] = 253.$$

Отже, $n = 253$. Це число помітно більше, ніж половина днів у році (**365/2 = 182.5**); так відбувається через те, що у решти членів групи дні народження можуть збігатися між собою, і це зменшує ймовірність збігу одного з них із заданим днем народження.

<u>Приклад 7.29.</u> Ймовірність прийому радіосигналу за певних умов дорівнює **0,75**. Скільки сигналів повинно бути передано, щоб ймовірність відхилення частоти прийнятих сигналів від ймовірності прийому не більш, ніж на **0,035**, дорівнювала **0,95**?

Розв'язання. Ймовірність того, що модуль відхилення відносної частоти $\frac{m}{n}$ від сталої ймовірності p не перевищує *заданого* числа $\varepsilon > 0$, є

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\cong 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Покладемо $p = 0,75,\quad q = 1 - p = 0,25,\quad \varepsilon = 0,035,\quad P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right) = 0,95$.

Отримаємо рівняння $0,95 = 2\Phi\left(0,035\cdot\sqrt{\frac{n}{0,75\cdot 0,25}}\right)$ або, після невеликого перетворення, $\Phi\left(0,035\cdot\sqrt{\frac{n}{0,1875}}\right) = 0,475$. За таблицею у додатку 5 знаходимо $0,475 = \Phi(1,96)$, звідки маємо $0,035\cdot\sqrt{\frac{n}{0,1875}} = 1,96$.

Отже, $n = 0,1875\cdot\left(\frac{1,96}{0,035}\right)^2 = 588$.

<u>Приклад 7.30.</u> Дискретна випадкова величина задана рядом розподілу

x_i	13	18	19	x_4	25
p_i	0,18	p_2	0,22	0,20	0,15

Знайти x_4, p_2, $D(X)$, $\sigma(X)$, якщо $M(X) = 18,77$.

Розв'язання. Для відшукання p_2 використаємо умову $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, тобто $0,18 + p_2 + 0,22 + 0,2 + 0,15 = 1$, звідки знаходимо $p_2 = 0,25$.

Тоді маємо рівняння

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i\cdot p_i = 13\cdot 0,18 + 18\cdot 0,25 + 19\cdot 0,22 + x_4\cdot 0,2 + 25\cdot 0,15 = 18,77$$

або $14,77 + 0,2\cdot x_4 = 18,77$, звідки знаходимо $x_4 = \frac{4}{0,2} = 20$.

Отже, закон розподілу дискретної величини має вигляд

x_i	13	18	19	20	25
p_i	0,18	0,25	0,22	0,2	0,15

Тоді

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2\cdot p_i-[M(X)]^2==13^2\cdot 0{,}18+18^2\cdot 0{,}25+19^2\cdot 0{,}22+20^2\cdot 0{,}2+$$

$$+25^2\cdot 0{,}15-(18{,}77)^2=364{,}59-352{,}3129=12{,}28,$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=3{,}50.$$

Приклад 7.31. Неперервна випадкова величина задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 8;\\ (x-8)^3, & 8<x\le 9;\\ 1\ , & x>9.\end{cases}$$

Знайти: а) щільність розподілу $f(x)$; б) математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$ й середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$; в) ймовірність попадання випадкової величини на відрізок $[8{,}25;\ 8{,}75]$.

Розв'язання.

а) Щільність розподілу $f(x)$:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0\ , & x\le 8,\\ 3(x-8)^2, & 8<x\le 9,\\ 0\ , & x>9;\end{cases}$$

б) Оскільки $f(x)$ ненульова лише на проміжку $[8,9)$, то користуємось формулами $M(X)=\int\limits_a^b x\ f(x)dx$, $D(X)=\int\limits_a^b x^2 f(x)dx-[M(X)]^2$. Отже, маємо

$$M(X)=\int\limits_8^9 x\cdot 3(x-8)^2dx=3\int\limits_8^9 x(x-8)^2dx=\begin{vmatrix}x-8=t & & \\ x=t+8 & & \\ x & 8 & 9\\ t & 0 & 1\end{vmatrix}=$$

$$=3\int\limits_0^1(t+8)\,t^2dt=3\int\limits_0^1\left(t^3+8t^2\right)dt=3\left(\frac{t^4}{4}+8\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=3\left(\frac{1}{4}+\frac{8}{3}\right)=8{,}75,$$

$$D(X)=\int\limits_8^9 x^2\cdot 3(x-8)^2dx-[M(X)]^2=3\int\limits_8^9\left(x^4-16x^3+64x^2\right)dx-8{,}75^2=$$

$$= 3\left(\frac{x^5}{5} - 4x^4 + \frac{64}{3}x^3\right)\Bigg|_8^9 - 76{,}56 = \frac{383}{5} - 76{,}56 = 0{,}04,$$

$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 0{,}2$;

в) ймовірність попадання неперервної випадкової величини X в заданий інтервал $(a; b)$ обчислюється за формулою $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$. Отже, в даному випадку

$$P(8{,}25 < X < 8{,}75) = F(8{,}75) - F(8{,}25) = 0{,}75^3 - 0{,}25^3 = 0{,}406.$$

<u>Приклад 7.32.</u> Гармата робить **4** постріли по мішені з однієї і тієї ж позиції. Ймовірність влучення при одному пострілі дорівнює **0,8**. Скласти закон розподілу кількості влучень, знайти середнє значення, дисперсію та середнє квадратичне відхилення кількості влучень.

Розв'язання. Дискретна випадкова величина X – кількість влучень у мішень. Її можливі значення: $x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \; x_3 = 2, \quad x_4 = 3, \quad x_5 = 4$.

Результати пострілів не залежать один від одного, ймовірність влучення при одному пострілі є сталою величиною. Це означає, що випадкова величина X розподілена за біноміальним законом.

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

де $\quad n = 4, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4; \quad p = 0{,}8; \quad q = 1 - p = 0{,}2.$

Обчислимо

$$P(0) = C_4^0 p^0 q^4 = (0{,}2)^4 = 0{,}0016;$$

$$P(1) = C_4^1 p q^3 = 4 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2^3 = 0{,}0256;$$

$$P(2) = C_4^2 p^2 q^2 = 6 \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}1536;$$

$$P(3) = C_4^3 \cdot p^3 \cdot q = 4 \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2 = 0{,}4096;$$

$$P(4) = C_4^4 p^4 q^0 = 0{,}8^4 = 0{,}4096.$$

Перевіримо вірність обчислень:

$$P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = 0{,}0016 + 0{,}0256 + 0{,}1536 + 0{,}4096 + 0{,}4096 = 1.$$

Шуканий закон розподілу має вигляд:

x	0	1	2	3	4
p	0,0016	0,0256	0,1536	0,4096	0,4096

Математичне сподівання (середнє значення) кількості влучень $M(X) = np = 4 \cdot 0,8 = 3,2$, дисперсія $D(X) = npq = 4 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 0,64$, середнє квадратичне відхилення $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,64} = 0,8$.

<u>Приклад 7.33.</u> Електронний пристрій складається з **1000** елементів, які працюють незалежно один від одного. Імовірність відмови будь-якого елемента протягом одного року дорівнює **0,002**. Знайти імовірність того, що за рік відмовлять не менше трьох елементів.

Розв'язання. Нехай випадкова величина X - число елементів, які відмовили. За законом Пуассона $P_n(k) = \dfrac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$.

Вважаючи $n = 1000,\ p = 0,002$, одержимо $\lambda = np = 1000 \cdot 0,002 = 2$.

Ймовірність відмови не менш трьох елементів

$$P(X \geq 3) = \sum_{k=3}^{\infty} P(X = k) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2).$$

$$P(X = 0) = P_{1000}(0) = \frac{2^0 \cdot e^{-2}}{0!} = 0,13534,\ P(X = 1) = P_{1000}(1) = \frac{2^1 \cdot e^{-2}}{1!} = 0,27068,$$

$$P(X = 2) = P_{1000}(2) = \frac{2^2 \cdot e^{-2}}{2!} = 0,27068.$$

Тоді $P(X \geq 3) = 1 - 0,13534 - 2 \cdot 0,27068 = 0,3233$.

<u>Приклад 7.34.</u> Автобуси деякого маршруту рухаються точно за розкладом. Проміжок руху **15** хвилин. Знайти ймовірність того, що пасажир, який підійшов до зупинки, чекатиме черговий автобус менше **10** хвилин.

Розв'язання. Пасажир може підійти до зупинки у будь-який момент. Тому час очікування можна вважати випадковою величиною ***X***, яка рівномірно розподілена у інтервалі руху автобусів.

Щільність розподілу $f(x) = \dfrac{1}{b - a}$, де $(b - a)$ - довжина інтервалу, у якому знаходяться ймовірні значення ***X.*** У даному випадку $b - a = 15$, тому $f(x) = \dfrac{1}{15}$. Оскільки автобуси йдуть точно за розкладом (тобто наступний прийде не раніше означеного часу), то пасажир чекатиме його менше 10 хвилин, якщо $5 < X < 15$.

Ймовірність попадання випадкової величини в деякий інтервал обчислюється за формулою $P(\alpha < X < \beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$, отже,

$$P(5 < X < 15) = \int\limits_{5}^{15} \frac{1}{15} dx = \frac{x}{15}\Bigg|_{5}^{15} = \frac{2}{3}.$$

<u>Приклад 7.35.</u> Середній час безвідмовної роботи радіоелектронного обладнання літака за статистичними даними складає **200** годин. Знайти ймовірність відмови обладнання протягом **10** годин польоту.

Розв'язання. Час T безвідмовної роботи обладнання є випадковою величиною, розподіленою за показниковим законом $F(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0, \\ 1 - e^{-\lambda t}, & t > 0, \end{cases}$ де $\lambda -$інтенсивність відмов (кількість відмов за одиницю часу). У даному випадку $t = 10,\ \lambda = \frac{1}{200}$ і ймовірність відмови за час t буде складати $P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-\frac{10}{200}} = 0{,}049$.

<u>Приклад 7.36.</u> Найбільший поперечний діаметр заготовок деталей, що поступають в обробку, є випадковою величиною, розподіленою за нормальним законом з середнім значенням **5** см і середнім квадратичним відхиленням **0,3** см. Написати диференціальну функцію розподілу, побудувати її схематичний графік, вказавши його характерні точки, і знайти ймовірність того, що: а) діаметр взятої навмання заготовки буде знаходитись в межах від **4,7** до **6,2** см; б) відхилення діаметра заготовки від середнього не перевищить за абсолютною величиною **0,6** см.

Розв'язання. Випадкова величина X – найбільший поперечний діаметр заготовки. Оскільки вона розподілена нормально, то диференціальна функція розподілу виражається формулою $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, де a – математичне сподівання (середнє значення), σ – середнє квадратичне відхилення. Функція

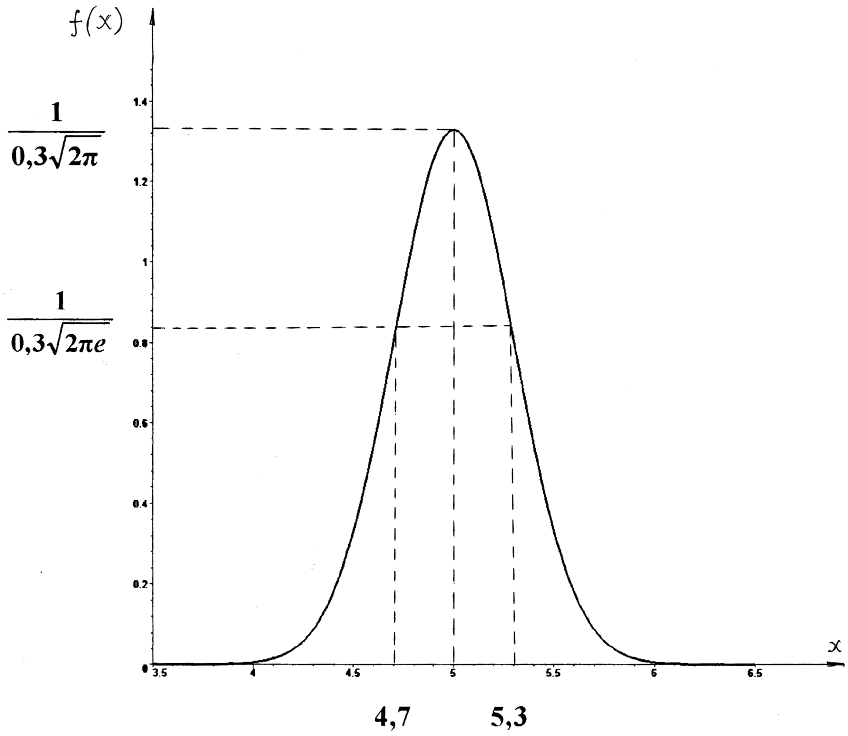

Рис. 7.7

досягає максимуму $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ в точці $x = a$, її графік має дві точки перегину $\left(a \pm \sigma; \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right)$. В даному випадку $a = 5$, $\sigma = 0,3$. Тому $f(x) = \dfrac{1}{0,3\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-5)^2}{0,18}}$, максимум $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \approx 1,33$ в точці $x = 5$, точки перегину $(4,7;\, 0,81)$ й $(5,3;\, 0,81)$. Графік функції показаний на рис. 7.7.

а) Ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал (α, β)

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

де $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ – інтегральна функція Лапласа (її значення наведені у додатку 5).

Оскільки $\alpha = 4,7$, $\beta = 6,2$, то маємо

$$P(4,7 < X < 6,2) = \Phi\left(\frac{6,2-5}{0,3}\right) - \Phi\left(\frac{4,7-5}{0,3}\right) = \Phi(4) + \Phi(1) = 0,3413 + 0,5 = 0,8413;$$

б) ймовірність того, що модуль відхилення X від її математичного сподівання a не перевищить заданого числа $\delta > 0$, $P\left(\mid X - a \mid < \delta \right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma} \right)$.

У даному випадку $\delta = 0{,}6$, отже

$$P\left(|X - 5| < 0{,}6 \right) = 2\Phi\left(\frac{0{,}6}{0{,}3} \right) = 2\Phi(2) = 2 \cdot 0{,}4772 = 0{,}9544.$$

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Завдання 1. Розвинути в ряд Фур'є періодичну функцію, задану на проміжку, довжина якого дорівнює періоду.

1. $f(x) = \begin{cases} 5, & -\pi \le x \le 0 \\ x - 1, & 0 < x \le \pi \end{cases}$.

2. $f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \le x \le 0 \\ x, & 0 < x \le 1 \end{cases}$.

3. $f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi \le x \le 0 \\ x + 2, & 0 < x \le \pi \end{cases}$.

4. $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & -2 \le x \le 0 \\ -3, & 0 < x \le 2 \end{cases}$.

5. $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & -\pi \le x \le 0 \\ 1, & 0 < x \le \pi \end{cases}$.

6. $f(x) = \begin{cases} 2x, & -3 \le x \le 0 \\ -1, & 0 < x \le 3 \end{cases}$.

7. $f(x) = \begin{cases} 3x + 1, & -\pi \le x \le 0 \\ 1, & 0 < x \le \pi \end{cases}$.

8. $f(x) = \begin{cases} 3x + 1, & -2 \le x \le 0 \\ 2, & 0 < x \le 2 \end{cases}$.

9. $f(x) = \begin{cases} -3, & -\pi \le x \le 0 \\ 2x + 5, & 0 < x \le \pi \end{cases}$.

10. $f(x) = \begin{cases} x + 2, & -4 \le x \le 0 \\ -5, & 0 < x \le 4 \end{cases}$.

Завдання 2. Подати у вигляді інтеграла Фур'є функцію $f(x)$, продовживши її для від'ємних значень вказаним чином.

1. $f(x) = \begin{cases} 1 - 2x, 0 \le x \le 3 \\ 0, \quad x > 3 \end{cases}$, непарне продовження.

2. $f(x)=\begin{cases} 4+3x, 0\le x\le 2 \\ 0, \quad x>2 \end{cases}$, парне продовження.

3. $f(x)=\begin{cases} 2+\dfrac{x}{3}, 0\le x\le 3 \\ 0, \quad x>3 \end{cases}$, непарне продовження.

4. $f(x)=\begin{cases} \sin 2x, 0\le x\le \dfrac{\pi}{2} \\ 0, \quad x>\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$, парне продовження.

5. $f(x)=\begin{cases} e^{3x}, 0\le x\le 2 \\ 0, \quad x>2 \end{cases}$, непарне продовження .

6. $f(x)=\begin{cases} 4x-3, 0\le x\le 2 \\ 0, \quad x>2 \end{cases}$, парне продовження.

7. $f(x)=\begin{cases} 0, \quad 0\le x<1 \\ x+2, 1<x\le 3 \\ 0, \quad x>3 \end{cases}$, непарне продовження.

8. $f(x)=\begin{cases} 5, \quad 0\le x<1 \\ 2x+3, \ 1\le x\le 4 \\ 0, \quad x>4 \end{cases}$, парне продовження.

9. $f(x)=\begin{cases} \sin\dfrac{x}{3}, 0\le x\le \pi \\ 0, \quad x>\pi \end{cases}$, непарне продовження.

10. $f(x)=\begin{cases} e^{3x}, 0\le x\le 1 \\ 0, \quad x>1 \end{cases}$, парне продовження.

Завдання 3. Для функції $f(x)$ знайти перетворення Фур'є вказаного типу.

1. $f(x)=\begin{cases} e^{2x}, \quad 0\le x\le 1 \\ 0 \ , \quad x>1 \end{cases}$, косинус-перетворення.

2. $f(x)=\begin{cases} 1, & 0\le x<1 \\ x, & 1\le x\le 2 \\ 0, & x>2 \end{cases}$, синус-перетворення.

3. $f(x)=\begin{cases} xe^{4x}, & 0\le x\le 1 \\ 0\ , & x>1 \end{cases}$, косинус-перетворення.

4. $f(x)=\begin{cases} 2, & 0\le x<1 \\ 1+x, & 1<x\le 3 \\ 0, & x>3 \end{cases}$, синус-перетворення.

5. $f(x)=\begin{cases} 0, & 0\le x<1 \\ x+2, & 1\le x\le 3 \\ 0, & x>3 \end{cases}$, косинус-перетворення.

6. $f(x)=\begin{cases} 3, & 0\le x<2 \\ 2x+5, & 2\le x\le 4 \\ 0, & x>4 \end{cases}$, синус-перетворення.

7. $f(x)=\begin{cases} e^{3x}, & 0\le x\le 2 \\ 0, & x>2 \end{cases}$, косинус-перетворення.

8. $f(x)=\begin{cases} \cos 2x, & 0\le x\le \dfrac{\pi}{2} \\ 0\ , & x>\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$, синус-перетворення.

9. $f(x)=\begin{cases} 2x+5, & 0\le x\le 4 \\ 0, & x>4 \end{cases}$, косинус-перетворення.

10. $f(x)=\begin{cases} 0, & 0\le x\le 2 \\ 3x-2, & 2<x\le 5 \\ 0, & x>5 \end{cases}$, синус-перетворення.

Завдання 4. Знайти зображення оригіналу.

1. а) $f(t)=t^2e^{t-3}\eta(t-3)$; **б)** $f(t)=\dfrac{\sin^3 t}{t}e^{-2t}$.

2. а) $f(t)=(t-3)e^{5t-5}\eta(t-1)$; **б)** $f(t)=\int\limits_0^t \dfrac{e^{\tau}-1}{\tau}\,d\tau$.

3. а) $f(t)=te^{2t}\cos 3t$; **б)** $f(t)=\dfrac{\sin 7t\cdot\sin 3t}{te^{3t}}$.

4. а) $f(t)=e^{4t}\cos^2 t$; **б)** $f(t)=\int\limits_0^t \dfrac{\sin 3\tau-\sin\tau}{\tau}\,d\tau$.

5. а) $f(t)=t\sin^2(t-4)\eta(t-4)$; **б)** $f(t)=\dfrac{\cos t-\cos 2t}{t}e^{2t}$.

6. а) $f(t)=e^{-t}(t-2)^3$; **б)** $f(t)=\int\limits_0^t \dfrac{\sin 5\tau\sin 3\tau}{\tau}\,d\tau$.

7. а) $f(t)=e^{-t}\cos(4t-8)\eta(t-2)$; **б)** $f(t)=\int\limits_0^t \dfrac{e^{3\tau}-e^{2\tau}}{\tau}\,d\tau$.

8. а) $f(t)=t^2\cos\dfrac{t}{2}$; **б)** $f(t)=e^{-2t}\dfrac{1-\cos t}{t}$.

9. а) $f(t)=e^{t}\sin 2t\cos 4t$; **б)** $f(t)=\int\limits_0^t \dfrac{\cos 3\tau-\cos\tau}{\tau}\,d\tau$.

10. а) $f(t)=e^{-2t+10}\sin^2(t-5)\eta(t-5)$; **б)** $f(t)=\dfrac{\sin^2 t}{t}$.

Завдання 5. Відновити оригінал за зображенням.

1. а) $F(p)=\dfrac{1}{p(p-1)(p^2+4)}$; **б)** $F(p)=\dfrac{2p+1}{p^2-2p+5}e^{-p}$.

2. а) $F(p)=\dfrac{1}{(p+1)(p+3)^3}$; **б)** $F(p)=\dfrac{2-3p}{p^2+4p+8}e^{-3p}$.

3. а) $F(p)=\dfrac{p^2+2p-1}{p^3+3p^2+3p+1}$; **б)** $F(p)=\dfrac{2p-1}{p^2+2p+7}e^{-p/2}$.

4. а) $F(p)=\dfrac{5p+3}{(p-1)(p^2+2p+5)}$; **б)** $F(p)=\dfrac{3p-2}{p^2+4p+6}e^{-p}$.

5. а) $F(p)=\dfrac{p^2}{(p^2+4)(p^2+9)}$; б) $F(p)=\dfrac{2-p}{p^2+6p+10}e^{-p/3}$.

6. а) $F(p)=\dfrac{p+4}{(p-2)(p^2+2p+2)}$; б) $F(p)=\dfrac{2+p}{p^2+4p+5}e^{-5p}$.

7. а) $F(p)=\dfrac{1}{p^2(p^2+1)}$; б) $F(p)=\dfrac{2p+3}{p^2-2p+3}e^{-p}$.

8. а) $F(p)=\dfrac{p+10}{p^3-6p^2+10p}$; б) $F(p)=\dfrac{4-p}{p^2+6p+11}e^{-p}$.

9. а) $F(p)=\dfrac{2p+1}{(p+2)(p-1)^2}$; б) $F(p)=\dfrac{p+3}{p^2+8p+17}e^{-4p}$.

10. а) $F(p)=\dfrac{2p+3}{(p-1)(p^2+4)}$; б) $F(p)=\dfrac{3p-2}{p^2-4p+10}e^{-3p}$.

Завдання 6. За допомогою перетворення Лапласа розв'язати задачу Коші.

1. а) $\ddot{x}+x=2\cos t,\quad x(0)=-1,\quad \dot{x}(0)=1$;

   б) $\ddot{x}-4x=f(t),\quad x(0)=0,\quad \dot{x}(0)=0,\quad f(t)=\begin{cases}2, & t>3,\\ 1, & 1<t<3,\\ 0, & t<1;\end{cases}$

   в) $\begin{cases}\dot{x}-4x+3y=\sin t,\\ \dot{y}-2x+y=-2\cos t,\end{cases}\quad x(0)=1,\quad y(0)=1$.

2. а) $\ddot{x}+4x=2\sin 2t,\quad x(0)=-1,\quad \dot{x}(0)=0$;

   б) $\ddot{x}+x=f(t),\quad x(0)=0,\quad \dot{x}(0)=2,\quad f(t)=\begin{cases}0, & t<1,\\ -2, & 1<t<2,\\ 1, & t>2;\end{cases}$

   в) $\begin{cases}\dot{x}-x-2y=t,\\ \dot{y}-2x-y=t,\end{cases}\quad x(0)=2,\quad y(0)=4$.

3. а) $\ddot{x}+2\dot{x}+10x=\sin 3t+6\cos 3t,\quad x(0)=1,\quad \dot{x}(0)=1$;

б) $\ddot{x}-2\dot{x}+x=f(t),\quad x(0)=0,\quad \dot{x}(0)=0,\quad f(t)=\begin{cases}1, & t>4,\\ 2, & 2<t<4,\\ 0, & t<2;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\dot{x}+5x-2y=e^{t},\\ \dot{y}-x+6y=0,\end{cases}\quad x(0)=1,\quad y(0)=0.$

4. а) $\ddot{x}+2\dot{x}+x=te^{t},\quad x(0)=0,\quad \dot{x}(0)=1;$

б) $\ddot{x}+49x=f(t),\quad x(0)=0,\quad \dot{x}(0)=0,\quad f(t)=\begin{cases}3, & t>4,\\ -1, & 2<t<4,\\ 0, & t<2;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\dot{x}-3x-4y=6e^{2t},\\ \dot{y}+2x+3y=3e^{2t},\end{cases}\quad x(0)=2,\quad y(0)=0.$

5. а) $\ddot{x}+x=6e^{-t},\quad x(0)=3,\quad \dot{x}(0)=1;$

б) $\ddot{x}+\dot{x}-2x=f(t),\quad x(0)=0,\quad \dot{x}(0)=1,\quad f(t)=\begin{cases}3, & 0<t<4,\\ 2, & 4<t<7,\\ 0, & t<0,\quad t>7;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\dot{x}-x-4y=0,\\ \dot{y}-2x+y=9,\end{cases}\quad x(0)=1,\quad y(0)=0.$

6. а) $\ddot{x}-2\dot{x}-3x=2t,\quad x(0)=1,\quad \dot{x}(0)=1;$

б) $\ddot{x}+x=f(t),\quad x(0)=0,\quad \dot{x}(0)=0,\quad f(t)=\begin{cases}2, & 0<t<1,\\ 4, & t>1,\\ 0, & t<0;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\dot{x}-2x-5y=0,\\ \dot{y}-x+2y=2,\end{cases}\quad x(0)=1,\quad y(0)=1.$

7. а) $\ddot{x}-9x=\sin t-\cos t,\quad x(0)=-3,\quad \dot{x}(0)=2;$

б) $\ddot{x}-2\dot{x}-3x=f(t),\quad x(0)=0,\quad \dot{x}(0)=0,\quad f(t)=\begin{cases}1, & t>4,\\ 2, & 2<t<4,\\ 0, & t<2;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\dot{x}+2x-5y=1,\\ \dot{y}-x-2y=1,\end{cases}\quad x(0)=0,\quad y(0)=2.$

8. а) $\ddot{x}+\dot{x}+x=t^{2}+2t,\quad x(0)=4,\quad \dot{x}(0)=-2;$

б) $\ddot{x} - 4x = f(t), \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 1, \quad f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1, \\ -1, & 1 < t < 2, \\ 0, & t < 0, \quad t > 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dot{x} - 3x - y = 0, \\ \dot{y} + 5x + 3y = 2, \end{cases} \quad x(0) = 2, \quad y(0) = 0.$

9. а) $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 2e^t \cos\frac{t}{2}, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0;$

б) $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = f(t), \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad f(t) = \begin{cases} 2, & t > 3, \\ -1, & 1 < t < 3, \\ 0, & t < 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dot{x} - x - y = 0, \\ \dot{y} - 4x - y = 1, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$

10. а) $\ddot{x} + 4x = 4e^{2t} + 4t^2, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 2;$

б) $\ddot{x} - x = f(t), \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad f(t) = \begin{cases} -1, & t > 2, \\ 2, & 0 < t < 2, \\ 0, & t < 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dot{x} - x + y = 0, \\ \dot{y} - x - y = e^t, \end{cases} \quad x(0) = 3, \quad y(0) = 2.$

Завдання 7. Розв’язати задачу.

1. При дослідженні **12** зразків деякого сплаву було виявлено, що **3** зразка містять 0,3% сторонньої домішки, **4** зразка – 0,2% і 5 зразків – 0,1%. Навмання вибрали **2** зразка. Знайти ймовірність того, що вони будуть містити один і той самий відсоток домішки.

2. У першій урні **5** білих і **3** чорних кулі, у другій – **6** білих і **9** чорних. З другої урни випадковим чином перекладають у першу дві кулі, після чого з першої урни беруть одну кулю. Яка ймовірність того, що ця куля – біла?

3. Абонент забув останню цифру номера телефону і набирає її навмання. Яка ймовірність того, що він додзвониться не більше, ніж за три спроби?

4. Випадковим чином відібрані **30** людей. Яка ймовірність того, що хоча б у двох будь-яких з них дні народження співпадають? Прийняти, що дні народження розподілені рівномірно. *Вказівка:* при обчисленні факторіалів застосувати формулу Стірлінга $\ln n! \approx n(\ln n - 1) + \frac{1}{2}\ln(2\pi n)$.

5. Є три однакових за видом ящика. У першому ящику **23** білих кулі, у другому – **9** білих і **14** чорних куль, у третьому – **23** чорних кулі. З вибраного навмання ящика вийняли білу кулю. Знайдіть ймовірність того, що куля вийнята з другого ящика.

6. Ймовірність влучення в мішень для першого стрільця дорівнює **0,7**, а для другого - **0,8**. Кожен зі стрільців робить по одному пострілу і у випадку промаху стріляє ще раз. Знайти ймовірність того, що в результаті в мішені буде дві пробоїни.

7. У урну, яка містить **3** кулі, кинули білу кулю, після чого навмання витягли одну кулю. Знайти ймовірність того, що ця куля – біла, якщо всі припущення про початковий склад куль (за кольором) рівноможливі.

8. Пасажир підходить до зупинки автобусів двох маршрутів. Інтервал руху автобусів 1-го маршруту складає **19** хвилин, а 2-го маршруту – **21** хвилину. Вважаючи, що пасажира влаштує автобус будь-якого з маршрутів, знайдіть ймовірність того, що він виїде з зупинки не пізніше, ніж через **6** хвилин.

9. Є **13** монет, з яких **3** штуки браковані: внаслідок заводського браку на цих монетах з обох сторін викарбуваний герб. Навмання обрану монету кидають **9** разів, причому при всіх киданнях вона лягає гербом вгору. Знайдіть ймовірність того, що була обрана монета з двома гербами.

10. Причиною розриву електричного ланцюга служить вихід з ладу елемента R_1 або одночасний вихід з ладу елементів R_2 і R_3. Елементи можуть вийти з ладу незалежно один від одного з вірогідностями відповідно **0,1**, **0,2** і **0,3**. Знайти ймовірність розриву електричного ланцюга.

Завдання 8. Розв’язати задачу.

1. Змішали лимони з трьох контейнерів. У першому містилося **25%** всіх лимонів, у другому – **30%**, в третьому – **45%**. Знайти ймовірність того, що серед **200** навмання взятих лимонів не менше **90** стиглих, якщо в першому контейнері таких лимонів було **60%**, у другому – **65%**, в третьому – **40%**.

2. По каналу зв'язку передається **6** повідомлень. Кожне повідомлення може бути спотворено завадами з імовірністю **0.2** незалежно від інших. Знайти ймовірність того, що не менше **3** з **6** повідомлень передані спотвореними.

3. Число дзвінків із замовленнями, які надходять до фірми протягом однієї години, розподілено за законом Пуассона з параметром $\boldsymbol{\lambda = 2}$. Знайти ймовірність того, що за першу годину роботи фірми замовлень буде менше двох, а за другу – не менше двох.

4. Імовірність того, що хоча б один з **4** комп'ютерів в інтернет-кафе зайнятий, становить **0,9984**. Яка ймовірність того, що в даний момент буде зайнято **82** комп'ютера зі **100**?

5. Тест складається з **10** запитань, на кожне з яких пропонується **4** варіанта відповіді. Яка ймовірність того, що студенту вдасться вгадати правильні відповіді щонайменше на **6** запитань?

6. Імовірність того, що частинка, яка вилетіла з радіоактивного джерела, буде зареєстрована лічильником, дорівнює **0,0001**. За час спостереження з джерела вилетіло **30 000** частинок. Знайти ймовірність того, що лічильник зареєстрував не менше **4** частинок.

7. Імовірність настання події $\boldsymbol{A}$ в кожному з незалежних випробувань постійна і дорівнює **0,3**. Відомо, що ймовірність настання події $\boldsymbol{A}$ не менше **600** й не більше $\boldsymbol{m}$ разів, при **2 100** випробуваннях дорівнює **0,8469**. Знайти $\boldsymbol{m}$.

8. Ймовірність промаху при одному пострілі становить **0,2**. При якому мінімальному числі пострілів ймовірність того, що буде зроблено не менше **2** промахів, становитиме не менше **0,9**?

9. Знайти ймовірність того, що з **600** мешканців села хоча б троє народилися 20 травня. Прийняти, що дні народження розподілені рівномірно.

10. Імовірність прихованого дефекту виробу, не виявленого технічним контролем, дорівнює **0,02**. Вироби укладаються в коробки по **100** штук. Яка ймовірність того, що в окремо взятій коробці буде не більше двох дефектних виробів?

Завдання 9. Скласти ряд розподілу вказаної випадкової величини $\boldsymbol{X}$ і знайти її функцію розподілу $\boldsymbol{F(x)}$, обчислити математичне сподівання $\boldsymbol{M(X)}$, дисперсію $\boldsymbol{D(X)}$ та середнє квадратичне відхилення $\boldsymbol{\sigma(X)}$.

1. На шляху вершника **4** перешкоди, які він може подолати з імовірностями відповідно $\boldsymbol{p_1 = 0{,}2}$, $\boldsymbol{p_2 = 0{,}3}$, $\boldsymbol{p_3 = 0{,}4}$, $\boldsymbol{p_4 = 0{,}5}$. Випадкова величина $\boldsymbol{X}$ – число подоланих перешкод.

2. Імовірність безвідмовної роботи впродовж гарантійного терміну для приладів першого типу дорівнює **0,9**, для приладів другого типу – **0,7**, для приладів третього типу – **0,8**. Випадкова величина $\boldsymbol{X}$ – число приладів, які безвідмовно пропрацювали гарантійний термін, серед трьох приладів різних типів.

3. В урні міститься **6** куль, **4** з яких – білі. Навмання взято одразу **3** кулі. Випадкова величина $\boldsymbol{X}$ – число білих куль серед узятих.

4. При усталеному технологічному процесі підприємство випускає **2/3** виробів вищого гатунку і **1/3** першого гатунку. Випадкова величина $\boldsymbol{X}$ – число виробів вищого гатунку з чотирьох, взятих навмання.

5. З **20** деталей, серед яких **5** нестандартних, для перевірки якості навмання відібрані **4** деталі. Випадкова величина $\boldsymbol{X}$ – число нестандартних деталей серед відібраних.

6. За статистичними даними хоча б одна пожежа, яка потребує виїзду пожежної команди, за даний період часу може виникнути у трьох районах міста відповідно з імовірностями $p_1 = 0.1$, $p_2 = 0.2$, $p_3 = 0.3$. Випадкова величина X – число районів, у які за даний період пожежна команда виїжджала хоча б один раз (хибні виклики не враховуються).

7. Гра полягає в накиданні кілець на кілочок. Два гравці отримують по **4** кільця і одночасно кидають по одному з цих кілець до першого влучення на кілочок. Ймовірність влучення при одному кидку для першого гравця складає **0,2**, а для другого – **0,3**. Випадкова величина X – кількість зроблених кидків.

8. Прилад комплектується з двох вузлів, імовірності браку яких становлять відповідно **0,1** та **0,05**. Прилад вважається бракованим, якщо бракований хоча б один з його вузлів. Навмання відібрані **4** прилади. Випадкова величина X – число бракованих приладів серед відібраних.

9. Гральну кістку кидають **3** рази. Випадкова величина X – число випадінь шістки.

10. На спортивних змаганнях за жеребом з **10** юнаків та **5** дівчат відбирають **3** членів суддівської бригади. Випадкова величина X – число дівчат серед відібраних.

Завдання 10. Дана щільність розподілу $f(x)$ неперервної випадкової величини X. Знайти C, функцію розподілу $F(x)$, математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$, середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$ та ймовірність попадання випадкової величини X у відрізок $[M(X)-\sigma(X), M(X)+\sigma(X)]$.

1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{C}{1+x^2}, & x\in\left[0,\sqrt{3}\right];\\ 0, & x\notin\left[0,\sqrt{3}\right].\end{cases}$ 2. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{C}{\sqrt{1-x^2}}, & x\in\left[0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right];\\ 0, & x\notin\left[0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right].\end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{C}{x}, & x\in\left[\dfrac{1}{e},e\right];\\ 0, & x\notin\left[\dfrac{1}{e},e\right].\end{cases}$ 4. $f(x)=\begin{cases}C(2x-x^2), & x\in[0,1];\\ 0, & x\notin[0,1].\end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases}Cx(1-x), & x\in[0,1];\\ 0, & x\notin[0,1].\end{cases}$ 6. $f(x)=\begin{cases}C\sqrt[3]{1-x}, & x\in[0,1];\\ 0, & x\notin[0,1].\end{cases}$

7. $f(x)=\begin{cases}C\ln x, & x\in[1,e];\\ 0, & x\notin[1,e].\end{cases}$ 8. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{C}{(1+x)^2}, & x\in[0,1];\\ 0, & x\notin[0,1].\end{cases}$

9. $f(x)=\begin{cases}C\sqrt{1-x}, & x\in[0,1];\\ 0, & x\notin[0,1].\end{cases}$ 10. $f(x)=\begin{cases}C\left(1-\dfrac{x}{3}\right), & x\in[0,3];\\ 0, & x\notin[0,3].\end{cases}$

Завдання 11. Розв’язати задачу.

1. Математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини X дорівнюють відповідно **30** і **4**. Знайти ймовірність того, що X у п’яти випробуваннях три рази прийме значення з інтервалу $(29, 31)$.

2. Встановлено, що тривалість безвідмовної роботи двох верстатів, що працюють незалежно один від одного, є випадковими величинами, розподіленими за показниковим законом з параметрами $\lambda_1 = 0{,}001$, $\lambda_2 = 0{,}002$. Відомо також, що ймовірність безвідмовної роботи обох верстатів протягом не менше t годин складає **0,1225**. Знайти час t.

3. Світлофор, встановлений на деякому перехресті, дозволяє рух транспорту (зелене світло) протягом 1 хвилини і забороняє (червоне світло) протягом 45 секунд. Знайти ймовірність того, що автомобіль, який під'їхав до перехрестя у випадковий момент часу, проїде на зелене світло.

4. Вимірювання дальності до об'єкта супроводжується систематичними і випадковими помилками. Систематична помилка складає **50** м у бік заниження дальності, випадкові ж помилки підпорядковуються нормальному закону з середнім квадратичним відхиленням $\boldsymbol{\sigma = 100}$ м. Знайти ймовірність вимірювання дальності з помилкою, що за абсолютною величиною не перевищує **150** м.

5. Три робота на автоматичній лінії по зваріванню кузовів автомобілів працюють незалежно один від одного. Тривалості їх безвідмовної роботи є випадковими величинами, розподіленими за показниковим законом з параметрами $\boldsymbol{\lambda_1 = 0{,}01}$, $\boldsymbol{\lambda_2 = 0{,}02}$, $\boldsymbol{\lambda_3 = 0{,}03}$. Знайти ймовірність того, що протягом **8** годин з моменту увімкнення лінія зупиниться через одночасну відмову двох роботів.

6. Час виготовлення деталі – випадкова величина, що рівномірно розподілена на відрізку **[4, 6]** хв. Виготовлено **4** деталі. Знайти ймовірність того, що час виготовлення кожної з деталей відхиляється від середнього не більше ніж на **40** сек.

7. Кулька, яку виготовляє автомат, вважається стандартною, якщо відхилення її диаметра від проектного не перевищує **2** мм. Випадкові відхилення диаметрів кульок підпорядковуються нормальному закону з середнім квадратичним відхиленням **1,6** мм і математичним сподіванням, що дорівнює нулю. Який відсоток стандартних кульок виготовляє автомат?

8. Час безвідмовної роботи кожного з двох пристроїв, що працюють незалежно один від одного, є випадковими величинами, розподіленими за показниковим законом з параметрами $\boldsymbol{\lambda_1 = 0{,}002}$, $\boldsymbol{\lambda_2 = \lambda}$. Визначити середній час безвідмовної роботи другого пристрою, якщо ймовірність того, що обидва пристрої спільно пропрацюють без відмов не менше **600** годин, складає **0,2231**.

9. Процентний вміст домішки, що міститься в деякому продукті, є випадковою величиною, розподіленою рівномірно на відрізку **[1.8, 4.0]**. Знайти ймовірність того, що продукт містить від **2** до **3%** домішки.

10. Відомо, що дисперсія нормально розподіленої випадкової величини $\boldsymbol{X}$ дорівнює **81**, а $\boldsymbol{P(X < 37) = 0.97128}$. Знайдіть середнє значення цієї величини.

ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ, ЇЇ ПОДАННЯ І ПЕРЕВІРКА

Номер варіанта контрольної роботи, що виконується, повинен співпадати з *двома* останніми цифрами номера залікової книжки. **З кожного завдання контрольної роботи вибирається задача з відповідним номером згідно з наведеною нижче таблицею.** Виконана контрольна робота переписується в окремий зошит. Розв’язки задач наводяться зі збереженням номерів задач, у порядку зростання цих номерів. Перед розв’язком кожної задачі треба повністю виписати її умову. На обкладинку зошита слід наклеїти заповнений реєстраційний бланк (вказати номер контрольної роботи, назву дисципліни, групу і факультет, прізвище, ім'я та по батькові, номер залікової книжки, домашню адресу). Оформлена належним чином робота реєструється у деканаті. Її необхідно подати на кафедру вищої математики завчасно, але не пізніше як за 10 днів до початку екзаменаційної сесії. Після перевірки викладач робить висновок про те, вірно чи невірно виконана робота, з відповідним надписом на обкладинці. Якщо робота виконана не повністю або невірно, то викладач вказує номери відсутніх або невірно розв’язаних задач і, якщо необхідно, робить свої зауваження у вигляді короткої рецензії. Роботи з не усіма задачами, або ж з такими, що повністю або частково не відповідають даному варіанту, вважаються виконаними невірно. Студент повинен виправити *усі* помилки у тому ж зошиті *після* рецензії викладача у розділі “Робота над помилками” і повернути роботу у найкоротший термін. Виправлення у перевіреній роботі поверх позначок викладача не допускаються. Студент може бути допущений до захисту контрольної роботи, порядок якого визначається викладачем, тільки після повторної перевірки виправлених помилок. На екзамен (залік) допускаються тільки студенти з захищеною роботою.

Склад варіантів контрольної роботи

Номер варіанта	Завд. 1	Завд. 2	Завд. 3	Завд. 4	Завд. 5	Завд. 6	Завд. 7	Завд. 8	Завд. 9	Завд. 10	Завд. 11
00	6	6	4	5	6	1	6	4	5	6	3
01	4	7	3	9	10	6	4	2	9	10	4
02	3	4	9	6	5	7	3	9	6	5	5
03	9	3	8	1	1	4	9	8	1	1	6
04	1	10	10	3	3	5	1	10	3	3	7
05	10	2	2	2	9	3	10	3	2	9	10
06	2	8	1	8	2	10	2	1	8	2	8
07	8	9	7	4	8	2	8	7	4	8	9
08	7	5	6	7	7	8	7	6	7	7	2
09	5	1	5	10	4	9	5	5	10	4	1
10	4	10	7	3	3	4	3	7	3	3	1
11	1	2	1	7	5	6	2	1	7	5	2
12	9	9	5	1	1	5	9	5	1	1	9
13	7	7	3	4	7	9	7	3	4	7	5
14	5	6	2	10	10	8	6	2	10	10	6
15	8	4	10	8	6	7	4	10	8	6	7
16	6	8	4	5	8	10	8	4	5	8	3
17	10	3	6	2	4	2	10	6	2	4	8
18	3	5	9	9	9	1	5	9	9	9	4
19	2	1	8	6	2	3	1	8	6	2	10
20	5	6	6	8	5	10	6	6	10	5	8
21	2	9	9	2	3	7	9	9	2	3	6
22	9	2	2	9	4	6	2	2	9	4	9
23	4	7	7	4	7	4	7	7	4	7	7
24	1	10	10	1	9	1	10	10	1	9	10
25	6	5	5	7	6	2	5	5	7	8	5
26	7	4	4	6	2	3	4	4	6	2	4
27	8	3	3	5	8	5	3	3	5	6	3
28	3	8	8	3	1	8	8	8	3	1	2
29	10	1	1	10	10	9	1	1	8	10	1
30	5	6	6	1	5	4	6	6	1	5	4
31	4	5	5	2	10	6	5	5	2	10	5
32	7	10	8	6	6	5	10	8	6	6	1
33	3	4	4	3	1	10	4	4	3	1	10
34	9	9	10	9	3	7	9	10	9	3	3
35	6	7	7	5	8	3	7	7	5	8	2
36	2	1	2	8	7	2	1	2	8	7	6
37	10	8	9	10	4	8	8	9	10	4	7
38	1	2	3	4	2	9	2	3	4	2	8
39	8	3	1	7	9	1	3	1	7	9	9
40	6	4	7	4	7	1	4	7	4	7	4
41	5	10	5	3	10	9	10	5	3	10	2
42	2	3	8	7	6	4	3	8	7	8	7
43	10	7	4	2	1	8	7	4	2	1	10
44	1	5	9	8	5	3	5	9	8	5	6
45	4	2	3	5	2	5	2	3	5	2	5

46	**3**	**6**	**6**	**10**	**4**	**2**	**6**	**6**	**10**	**4**	**9**
47	**8**	**8**	**2**	**6**	**8**	**7**	**8**	**2**	**6**	**6**	**3**
48	**9**	**1**	**10**	**9**	**3**	**6**	**1**	**10**	**9**	**3**	**8**
49	**7**	**9**	**1**	**1**	**9**	**10**	**9**	**1**	**1**	**9**	**1**
50	**10**	**2**	**1**	**7**	**8**	**3**	**2**	**1**	**7**	**8**	**5**
51	**9**	**8**	**2**	**8**	**1**	**4**	**8**	**2**	**8**	**1**	**9**
52	**8**	**9**	**3**	**6**	**6**	**5**	**9**	**3**	**6**	**6**	**6**
53	**7**	**7**	**5**	**5**	**5**	**6**	**7**	**5**	**5**	**5**	**1**
54	**1**	**1**	**10**	**9**	**4**	**7**	**1**	**10**	**9**	**4**	**3**
55	**5**	**5**	**6**	**3**	**9**	**10**	**5**	**6**	**3**	**9**	**2**
56	**4**	**4**	**7**	**2**	**3**	**8**	**4**	**7**	**2**	**3**	**8**
57	**3**	**3**	**8**	**1**	**10**	**9**	**3**	**8**	**1**	**10**	**4**
58	**2**	**10**	**9**	**10**	**7**	**2**	**10**	**9**	**10**	**7**	**7**
59	**6**	**6**	**4**	**4**	**2**	**1**	**6**	**4**	**4**	**2**	**10**
60	**9**	**10**	**1**	**5**	**8**	**1**	**10**	**1**	**5**	**8**	**3**
61	**3**	**8**	**4**	**7**	**7**	**2**	**8**	**4**	**7**	**7**	**7**
62	**5**	**7**	**7**	**3**	**10**	**9**	**7**	**7**	**3**	**10**	**1**
63	**6**	**4**	**2**	**9**	**4**	**5**	**4**	**2**	**9**	**4**	**4**
64	**8**	**6**	**5**	**1**	**3**	**6**	**6**	**5**	**1**	**3**	**10**
65	**10**	**9**	**9**	**8**	**2**	**7**	**9**	**6**	**8**	**2**	**8**
66	**7**	**1**	**3**	**6**	**6**	**3**	**1**	**3**	**6**	**6**	**5**
67	**4**	**5**	**6**	**2**	**1**	**8**	**5**	**9**	**2**	**1**	**2**
68	**1**	**3**	**10**	**4**	**5**	**4**	**3**	**10**	**4**	**5**	**9**
69	**2**	**2**	**8**	**10**	**9**	**10**	**2**	**8**	**10**	**9**	**6**
70	**10**	**6**	**7**	**2**	**6**	**8**	**6**	**7**	**2**	**6**	**8**
71	**6**	**7**	**6**	**9**	**1**	**6**	**7**	**6**	**9**	**1**	**2**
72	**7**	**10**	**2**	**6**	**7**	**9**	**10**	**2**	**6**	**7**	**9**
73	**1**	**1**	**9**	**5**	**5**	**7**	**1**	**9**	**5**	**5**	**4**
74	**9**	**9**	**3**	**4**	**8**	**10**	**9**	**3**	**4**	**8**	**1**
75	**8**	**8**	**4**	**3**	**10**	**5**	**8**	**4**	**3**	**10**	**7**
76	**2**	**2**	**10**	**8**	**2**	**4**	**2**	**10**	**8**	**2**	**6**
77	**3**	**3**	**8**	**10**	**4**	**3**	**3**	**8**	**10**	**4**	**5**
78	**5**	**5**	**5**	**1**	**3**	**2**	**5**	**5**	**1**	**3**	**3**
79	**4**	**4**	**1**	**7**	**9**	**1**	**4**	**1**	**7**	**9**	**10**
80	**8**	**7**	**1**	**6**	**6**	**4**	**7**	**1**	**6**	**6**	**1**
81	**10**	**1**	**3**	**7**	**8**	**5**	**1**	**3**	**7**	**8**	**2**
82	**6**	**10**	**4**	**3**	**3**	**1**	**10**	**4**	**3**	**3**	**6**
83	**9**	**6**	**2**	**8**	**7**	**10**	**6**	**2**	**8**	**7**	**3**
84	**5**	**9**	**5**	**9**	**10**	**3**	**9**	**5**	**9**	**10**	**9**
85	**7**	**8**	**7**	**10**	**9**	**2**	**8**	**7**	**10**	**9**	**5**
86	**1**	**2**	**10**	**5**	**5**	**6**	**2**	**10**	**5**	**5**	**8**
87	**3**	**5**	**8**	**1**	**1**	**7**	**3**	**8**	**1**	**1**	**10**
88	**4**	**4**	**6**	**2**	**4**	**8**	**5**	**6**	**2**	**4**	**4**
89	**2**	**3**	**9**	**4**	**2**	**9**	**4**	**9**	**4**	**2**	**7**
90	**8**	**9**	**8**	**8**	**4**	**4**	**9**	**8**	**8**	**4**	**4**
91	**4**	**6**	**1**	**4**	**2**	**2**	**6**	**1**	**4**	**2**	**3**
92	**10**	**1**	**9**	**6**	**7**	**7**	**1**	**9**	**6**	**7**	**7**
93	**3**	**3**	**7**	**1**	**10**	**10**	**3**	**7**	**1**	**10**	**2**
94	**7**	**2**	**3**	**5**	**6**	**6**	**2**	**3**	**5**	**6**	**8**

95	5	4	2	7	5	5	4	2	7	5	5
96	6	10	6	10	9	9	10	6	10	9	10
97	1	5	10	2	3	3	5	10	2	3	6
98	2	7	5	3	8	8	7	5	3	8	9
99	9	8	4	9	1	1	8	4	9	1	1

ДОДАТКИ

Додаток 1

ЗОБРАЖЕННЯ ОСНОВНИХ ОРИГІНАЛІВ

ОРИГІНАЛ	ЗОБРАЖЕННЯ
Одинична функція Хевісайда $\eta(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 1, & t\ge 0\end{cases}$	$\frac{1}{p}$
e^t	$\frac{1}{p-1}$
$\sin t$	$\frac{1}{p^2+1}$
$\cos t$	$\frac{p}{p^2+1}$
$sh\, t$	$\frac{1}{p^2-1}$
$ch\, t$	$\frac{p}{p^2-1}$

Додаток 2

ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА

ОРИГІНАЛ	ЗОБРАЖЕННЯ
Лінійність	
$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(t)$	$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i F_i(p)$
Подібність	
$f(\alpha t) \quad (\forall \alpha > 0)$	$\frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right) \quad (\forall \alpha > 0)$
Зокрема, e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{p^2+a^2}$
$\cos(at)$	$\frac{p}{p^2+a^2}$
$sh(at)$	$\frac{a}{p^2-a^2}$
$ch(at)$	$\frac{p}{p^2-a^2}$
Зміщення	
$e^{-\alpha t} f(t) \quad (\forall \alpha)$	$F(p+\alpha) \quad (\forall \alpha)$
Зокрема, $e^{-bt} \sin t$	$\frac{1}{(p+b)^2+1}$
$e^{-bt} \cos t$	$\frac{p+b}{(p+b)^2+1}$

Запізнювання	
$f(t-t_0)\cdot\eta(t-t_0) \quad (\forall t_0>0)$	$e^{-t_0 p}F(p) \quad (\forall t_0>0)$
Зокрема, $\eta(t-t_0)=\begin{cases}0, & t<t_0,\\ 1, & t\ge t_0\end{cases}$ ***(узагальнена одинична функція)***	$e^{-t_0 p}\cdot\dfrac{1}{p}$
Диференціювання оригіналу	
$f(t)$	$F(p)$
$f'(t)$	$pF(p)-f(0)$
$f''(t)$	$p^2F(p)-p\,f(0)-f'(0)$
$f'''(t)$	$p^3F(p)-p^2f(0)-p\,f'(0)-f''(0)$
………………………………………. $f^{(n)}(t)$	………………………………………….. $p^nF(p)-\sum_{k=1}^{n}p^{n-k}f^{(k-1)}(0)$, $f^{(i)}(0)=\lim_{t\to 0+0}f^{(i)}(t) \quad (i=0,1,...,n-1)$
Інтегрування оригіналу	
$\int_0^t f(\tau)d\tau$	$\dfrac{F(p)}{p}$
Диференціювання зображення	
$f(t)$	$F(p)$
$t\cdot f(t)$	$-F'(p)$
$t^2f(t)$	$F''(p)$
$t^3f(t)$	$-F'''(p)$
………………………………………. $t^nf(t)$	………………………………………….. $(-1)^nF^{(n)}(p)$

Зокрема, t^n	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
Інтегрування зображення	
$\dfrac{f(t)}{t}$	$\int_p^{\infty} F(q)dq$
Зокрема, $\dfrac{\sin t}{t}$	$\dfrac{\pi}{2} - arctg\ p$
Згортка	
$f(t) * g(t) = g(t) * f(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t g(\tau)f(t-\tau)d\tau$	
Теорема Бореля	
$f(t) * g(t)$	$F(p) \cdot G(p)$
Інтеграли Дюамеля	
$\int_0^t f(\tau)\cdot g'(t-\tau)d\tau + f(t)\cdot g(0)$ $\int_0^t g'(\tau)\cdot f(t-\tau)d\tau + f(t)\cdot g(0)$ $\int_0^t g(\tau)\cdot f'(t-\tau)d\tau + f(0)\cdot g(t)$ $\int_0^t f'(\tau)\cdot g(t-\tau)d\tau + f(0)\cdot g(t)$	$p \cdot F(p) \cdot G(p)$

Додаток 3

ОРИГІНАЛИ ДЕЯКИХ ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

ЗОБРАЖЕННЯ	ОРИГІНАЛ
$\frac{1}{p(p+a)}$	$\frac{1}{a}\left(1-e^{-at}\right)$
$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$	$\frac{1}{b-a}\left(e^{-at}-e^{-bt}\right)$
$\frac{p}{(p+a)(p+b)}$	$\frac{1}{a-b}\left(ae^{-at}-be^{-bt}\right)$
$\frac{1}{(p+a)^2}$	te^{-at}
$\frac{p}{(p+a)^2}$	$(1-at)\,e^{-at}$
$\frac{1}{p^2(p+a)}$	$\frac{1}{a^2}\left(e^{-at}+at-1\right)$
$\frac{1}{p(p+a)(p+b)}$	$\frac{1}{ab(a-b)}\left(a-b+be^{-at}-ae^{-bt}\right)$
$\frac{1}{p(p+a)^2}$	$\frac{1}{a^2}\left[1-e^{-at}(1+at)\right]$
$\frac{1}{(p+a)(p+b)^2}$	$\frac{1}{(b-a)^2}\left[e^{-at}-e^{-bt}-(b-a)te^{-bt}\right]$
$\frac{p}{(p+a)(p+b)^2}$	$\frac{1}{(b-a)^2}\left[-ae^{-at}+a+b(b-a)te^{-bt}\right]$
$\frac{p}{(p+a)^3}$	$te^{-at}\left(1+\frac{a}{2}t\right)$
$\frac{p^2}{(p+a)^3}$	$e^{-at}\left(1-2at+\frac{a^2}{2}t^2\right)$
$\frac{1}{p[(p+b)^2+a^2]}$	$\frac{1}{a^2+b^2}\left[1-e^{-bt}\left(\cos(at)+\frac{b}{a}\sin(at)\right)\right]$
$\frac{1}{p(p^2+a^2)}$	$\frac{1}{a^2}[1-\cos(at)]$
$\frac{2a^2}{p(p^2+4a^2)}$	$\sin^2(at)$

$\dfrac{p^2+2a^2}{p(p^2+4a^2)}$	$\cos^2(at)$
$\dfrac{1}{(p+a)(p^2+b^2)}$	$\dfrac{1}{a^2+b^2}\left[e^{-at}+\dfrac{a}{b}\sin(bt)-\cos(bt)\right]$
$\dfrac{p}{(p+a)(p^2+b^2)}$	$\dfrac{1}{a^2+b^2}\left[-ae^{-at}+a\cos(bt)+b\sin(bt)\right]$
$\dfrac{p^2}{(p+a)(p^2+b^2)}$	$\dfrac{1}{a^2+b^2}\left[a^2e^{-at}-ab\sin(bt)+b^2\cos(bt)\right]$
$\dfrac{1}{(p+a)[(p+b)^2+c^2]}$	$\dfrac{1}{(b-a)^2+c^2}\left[e^{-at}-e^{-bt}\cos(ct)+\right.$ $\left.+\dfrac{a-b}{c}e^{-bt}\sin(ct)\right]$
$\dfrac{p}{(p+a)[(p+b)^2+c^2]}$	$\dfrac{1}{(b-a)^2+c^2}\left[-ae^{-at}+ae^{-bt}\cos(ct)-\right.$ $\left.-\dfrac{ab-b^2-c^2}{c}e^{-bt}\sin(ct)\right]$
$\dfrac{p^2}{(p+a)[(p+b)^2+c^2]}$	$\dfrac{1}{(b-a)^2+c^2}\left[a^2e^{-at}+[(a-b)^2+c^2-a^2]\,e^{-bt}\cdot\right.$ $\left.\cdot\cos(ct)-\left\{ac+b\left(c-\dfrac{(a-b)b}{c}\right)\right\}e^{-bt}\sin(ct)\right]$
$\dfrac{1}{p^3(p+a)}$	$\dfrac{1}{a^3}-\dfrac{1}{a^2}t+\dfrac{1}{2a}t^2-\dfrac{1}{a^3}e^{-at}$
$\dfrac{1}{p^2(p+a)(p+b)}$	$-\dfrac{a+b}{a^2b^2}+\dfrac{1}{ab}t+\dfrac{1}{a^2(b-a)}e^{-at}+\dfrac{1}{b^2(a-b)}e^{-bt}$
$\dfrac{1}{p^2(p+a)^2}$	$\dfrac{1}{a^2}t\left(1+e^{-at}\right)+\dfrac{2}{a^3}\left(e^{-at}-1\right)$
$\dfrac{1}{(p+a)^2(p+b)^2}$	$\dfrac{1}{(a-b)^2}\left[e^{-at}\left(t+\dfrac{2}{a-b}\right)+e^{-bt}\left(t-\dfrac{2}{a-b}\right)\right]$
$\dfrac{1}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$	$\dfrac{1}{b^2-a^2}\left[\dfrac{1}{a}\sin(at)-\dfrac{1}{b}\sin(bt)\right]$
$\dfrac{p}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$	$\dfrac{1}{b^2-a^2}\left[\cos(at)-\cos(bt)\right]$
$\dfrac{p^2}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$	$\dfrac{1}{b^2-a^2}\left[-a\sin(at)+b\sin(bt)\right]$

$\dfrac{p^3}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$	$\dfrac{1}{b^2-a^2}\left[-a^2\cos(at)+b^2\cos(bt)\right]$
$\dfrac{1}{(p^2+a^2)^2}$	$\dfrac{1}{2a^2}\left[\dfrac{1}{a}\sin(at)-t\cos(at)\right]$
$\dfrac{p}{(p^2+a^2)^2}$	$\dfrac{1}{2a}t\sin(at)$
$\dfrac{p^2}{(p^2+a^2)^2}$	$\dfrac{1}{2a}[\sin(at)+at\cos(at)]$
$\dfrac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$	$t\cdot\cos(at)$
$\dfrac{2ap}{(p^2-a^2)^2}$	$t\cdot sh(at)$
$\dfrac{p^2+a^2}{(p^2-a^2)^2}$	$t\cdot ch(at)$
$\dfrac{p^3}{(p^2+a^2)^2}$	$\dfrac{1}{2}[2\cos(at)-at\sin(at)]$
$\dfrac{1}{[(p+b)^2+a^2]^2}$	$\dfrac{1}{2a^2}e^{-bt}\left[\dfrac{1}{a}\sin(at)-t\cos(at)\right]$
$\dfrac{1}{p^2(p^2+a^2)}$	$\dfrac{1}{a^2}\left[t-\dfrac{1}{a}\sin(at)\right]$
$\dfrac{a(p^2+a^2-b^2)}{[p^2+(a-b)^2][p^2+(a+b)^2]}$	$\sin(at)\cdot\cos(bt)$

Додаток 4

Таблиця значень функції $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	**0,3989**	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	**0,2420**	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	**0,0540**	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	**0,0044**	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0008	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Додаток 5

Таблиця значень функції $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	**0,00000**	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	**0,34134**	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	**0,47725**	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2.7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
3,0	**0,49865**									
3,1	49903									
3,2	49931									
3,3	49952									
3,4	49966									
3,5	**0,49977**									
3,6	49984									
3,7	49989									
3,8	49993									
3,9	49995									
4,0	**0,499968**									
4,5	**0,499997**									
5,0	**0,49999997**									