МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

Т.М.КАДИЛЬНИКОВА, О.Є.ЗАПОРОЖЧЕНКО, Т.П.БАС

ПОСІБНИК-ДОВІДНИК

з дисципліни “Вища математика”
для студентів заочної форми навчання
(I семестр, I курс)

Затверджено
на засіданні Вченої Ради
академії
протокол № від 2010 р.

Дніпропетровськ НМетАУ 2010

УДК 517(07)
Кадильникова Т.М., Запорожченко О.Є., Бас Т.П.Вища математика в прикладах та задачах. Частина I : Навч. посібник.- Дніпропетровськ: НМетАУ, 2010.- 92 с.

Наведені докладні розв'язання типових задач з додаткови поясненнями теоретичних положень.

Посібник призначений для студентів всіх форм навчання.

Друкується за авторською редакцією.

Відповідальний за випуск А.П.Павленко, д-р. фіз.-мат. наук, професор.

Рецензенти: Т.С.Кагадій, докт. фіз.-мат. наук, проф. (НГУ);
Ю.Я.Годес, канд. фіз.-мат. наук, доц. (ДНУ).

Національна металургійна академія
України, 2010

ВСТУП

Розв’язання задач з вищої математики часто пов’язано з багатьма складностями. Відомо, що при самостійному розв’язуванні задач студентам потрібні постійні консультації щодо способів їх розв’язування, оскільки знайти шлях до розв’язування задачі без допомоги викладача або відповідного підручника студентові не під силу. Допомогти студентам заочної форми навчання подолати ці складності, навчити їх застосовувати теоретичні знання до розв’язування задач - основне призначення цього методичного видання.

Метою видання є надання допомоги студентам у отриманні навичок з розв’язування типових задач, користуючись наведеними теоремами та формулами, а також детально розібраними прикладами. Там, де це можливо, задачі класифікувалися за темами. До кожного нового типу подано задачі з розв’язуванням і кілька задач того самого типу для самостійного опрацювання.

1. Матриці і операції над ними. Визначники матриць. Властивості визначників. Обернена матриця.

Матрицею розміру $\mathbf{m\times n}$ називається сукупність елементів $\boldsymbol{a_{ij}}$, розміщених у вигляді прямокутної таблиці, що має **m** рядків і **n** стовпців:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ або } A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Перший індекс кожного елемента вказує на номер рядка, в якому цей елемент розміщений, другий – на номер стовпця. Матриці позначають прописними буквами латинського алфавіту: ***A, B, C,…***Уживають також більш компактний запис $\mathbf{A=(}\boldsymbol{a}_{\mathbf{ij}}\mathbf{)_{mn}}$.

Матриця називається числовою, якщо її елементи $\boldsymbol{a_{ij}}$ – числа; функціональною, якщо $\boldsymbol{a_{ij}}$ – функції. Ми будемо розглядати, в основному, числові матриці.

Кажуть, що матриці A і B мають однакові розміри, якщо у них однакова кількість рядків і однакова кількість стовпців. Матриці A і B вважаються рівними між собою, якщо вони мають однакові розміри, а їхні елементи, що знаходяться на однакових місцях, рівні між собою.

Матриця, у якої кількість рядків дорівнює кількості стовпців (тобто **m = n**), називається **квадратною** матрицею порядку **n.** Квадратна матриця порядку **n** має вигляд:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Елементи $\boldsymbol{a_{11}, a_{22},\ldots,a_{nn}}$ утворюють головну діагональ матриці, а елементи $\boldsymbol{a_{1n}, a_{2(n-1)},\ldots,a_{n1}}$ – побічну.

Деякі квадратні матриці мають власні назви. Зокрема, до них відносяться нульова, діагональна та одинична матриці.

Нульовою називається матриця, всі елементи якої - нулі.

Якщо всі елементи матриці, окрім розташованих на головній діагоналі, дорівнюють нулю, то в цьому випадку матриця називається **діагональною**.

Якщо всі елементи діагональної матриці дорівнюють одиниці, то вона називається **одиничною** матрицею. Одинична матриця має вигляд:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицю, яку одержують із матриці A заміною її рядків відповідними стовпцями, називають **транспонованою** і позначають A^T**.** Транспонована матриця має вигляд:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Сумою (різницею) матриць A і B називається матриця C**,** елементи якої $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ $(c_{ij}=a_{ij}-b_{ij})$, де a_{ij} і b_{ij} – відповідно елементи матриць A і B. При цьому пишуть $C = A + B$**.**

Додавати або віднімати можна тільки матриці однакових розмірів.

Добутком матриці A на число α називається матриця **C** такого ж розміру, елементи якої $c_{ij}= \alpha\, a_{ij}$**,** де a_{ij} – елементи матриці A**,** тобто при множенні матриці на число (числа на матрицю) треба всі елементи матриці помножити на це число. При цьому пишуть $C = \alpha A$.

Для довільних матриць A, B, C однакових розмірів і довільних чисел **α** та **β** справджуються рівності:

$$A + B = B + A;$$
$$(A + B) + C = A + (B + C);$$
$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B;$$
$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A;$$
$$(\alpha \beta)A = \alpha (\beta A).$$

Добутком матриці $A_{m\times n}$ на матрицю $B_{n\times p}$ називається матриця $C_{m\times p} = AB$, елементи якої $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$, де a_{ik}**,** b_{kj} – елементи матриць A і B. Зауважимо, що перемножувати можна тільки ті матриці, в яких кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої. З існування добутку AB не означає, що існує добуток BA.

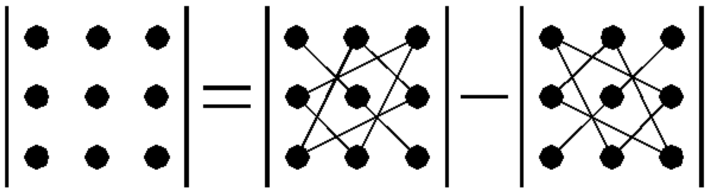
Якщо $AB = BA$, то матриці A і B називаються **комутативними.**

Визначником другого порядку квадратної матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ називається число $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Визначником третього порядку квадратної матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ називається число:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} -$$
$$- a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Для обчислення визначників третього порядку існує правило трикутника, яке схематично можна зобразити так:



Аналогічно для квадратної матриці A n-го порядку можна розглянути її визначник n-го порядку. Визначник матриці A часто позначають **det** A.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} називається визначник, який дістають з визначника матриці A викреслюванням i-го рядка та j-го стовпця.

Алгебричним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} називається відповідний мінор, взятий зі знаком «плюс», якщо сума його індексів парна, і зі знаком «мінус», якщо сума його індексів непарна $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Визначник вищого порядку можна обчислити за допомогою визначників нижчого порядку **розкладом за елементами якогось рядка або стовпця**. Зокрема, для визначників третього порядку маємо:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Визначник дорівнює сумі добутків елементів деякого рядка (стовпця) на їх алгебричні доповнення.

Основні властивості визначників.

1. Значення визначника не змінюється, якщо його рядки замінити відповідними стовпцями, а стовпці – рядками.
2. Перестановка двох рядків (стовпців) визначника рівносильна множенню його на –1.
3. Якщо визначник має два однакових рядка (стовпця), то він дорівнює нулю.
4. Якщо всі елементи якого-небудь рядка (стовпця) визначника містять спільний множник, то його можна винести за знак визначника.
5. Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) визначника дорівнюють нулю, то і сам визначник дорівнює нулю.

6. Якщо відповідні елементи двох рядків (стовпців) визначника пропорційні, то визначник дорівнює нулю.
7. Якщо кожний елемент деякого рядка (стовпця) визначника є сумою двох доданків, то визначник дорівнює сумі двох визначників, у яких один у згаданому рядку (стовпці) має перші з заданих доданків, а інший – другі; елементи, що знаходяться на решті місць, у всіх трьох визначниках одні й ті самі. Записується ця властивість таким чином:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

8. Якщо до елементів деякого рядка (стовпця) визначника додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на довільний спільний множник, то значення визначника при цьому не зміниться.

Матриця A^{-1} називається **оберненою** до квадратної матриці A, якщо добуток цих матриць дорівнює одиничній матриці, тобто $AA^{-1}=A^{-1}A=E$.

Обернена матриця існує для всякої квадратної матриці A, яка є **невиродженою**, тобто коли визначник матриці $\det A \neq 0$.

Алгоритм знаходження оберненої матриці:
1. Обчислити визначник матриці A. Якщо $\det A \neq 0$, то матриця A має обернену, в іншому випадку оберненої матриці не існує.
2. Обчислити алгебричні доповнення A_{ij} елементів матриці A.
3. Визначити обернену матрицю за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix}.$$

Зразки розв’язування задач.

1. Знайти матрицю $C=2A-3B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 3 & -7 & 4 \end{pmatrix}$.

Розв’язання:

Користуючись означеннями операцій множення матриці на число та додавання матриць, послідовно знаходимо:

$$2A = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 & 3\cdot 2 & 4\cdot 2 \\ 2\cdot 2 & 0\cdot 2 & -1\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix},\quad 3B = \begin{pmatrix} 0\cdot 3 & 2\cdot 3 & 5\cdot 3 \\ 3\cdot 3 & -7\cdot 3 & 4\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 15 \\ 9 & -21 & 12 \end{pmatrix},$$

$$C = 2A - 3B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 6 & 15 \\ 9 & -21 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-0 & 6-6 & 8-15 \\ 4-9 & 0-(-21) & -2-12 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -7 \\ -5 & 21 & -14 \end{pmatrix}.$$

2. Для матриць $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & 4 & 4\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 6\end{pmatrix}$ і $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2 & -3 & 4\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$ обчислити $\boldsymbol{A^T+B^T}$**.**

***Р*озв'язання:**

$$\mathbf{A^T}=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & 1 & -1\\ 4 & 0 & 6\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B^T}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ -3 & 1 & 1\\ 4 & 2 & -1\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A^T+B^T}=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & 1 & -1\\ 4 & 0 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ -3 & 1 & 1\\ 4 & 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -1 & 3\\ 1 & 2 & 0\\ 8 & 2 & 5\end{pmatrix}.$$

3. Для заданих матриць обчислити $\boldsymbol{AB}$ і $\boldsymbol{BA}$, якщо це можливо:

а) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}$; б) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}$.

Розв'язання:

а) Оскільки задано матриці $\boldsymbol{A_{2\times2}}$ і $\boldsymbol{B_{2\times2}}$, то можна визначити добутки $\boldsymbol{AB}$ та $\boldsymbol{BA}$**.** Отже,

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot1+5\cdot(-1) & 3\cdot(-5)+5\cdot2\\ 1\cdot1+2\cdot(-1) & 1\cdot(-5)+2\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -5\\ -1 & -1\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{BA}=\begin{pmatrix}1 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot3+(-5)\cdot1 & 1\cdot5+(-5)\cdot2\\ -1\cdot3+2\cdot1 & -1\cdot5+2\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -5\\ -1 & -1\end{pmatrix};$$

$\boldsymbol{AB=BA}$**.**

б) Оскільки кількість стовпців матриці $\boldsymbol{A}$ не дорівнює кількості рядків матриці $\boldsymbol{B}$ то добутку $\boldsymbol{AB}$ не існує. Проте можна обчислити добуток $\boldsymbol{BA}$.

$$\mathbf{BA}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+(-2) & -3+4\\ 3+(-4) & -9+8\\ 5+(-6) & -15+12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & -1\\ -1 & -3\end{pmatrix}.$$

4. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix}1 & 3\\ -6 & 2\end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\cos\alpha\\ \cos\alpha & 1\end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ -2 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 5\end{vmatrix}$.

Розв'язання:

а) Використовуючи формулу для обчислення визначника другого порядку, маємо:

$$\begin{vmatrix}1 & 3\\ -6 & 2\end{vmatrix}=1\cdot2-(-6)\cdot3=2+18=20$$

б) $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\cos\alpha \\ \cos\alpha & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos^2\alpha = \frac{1}{2}\sin^2\alpha.$

в) Користуючись правилом трикутника, знаходимо

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot3\cdot5 + (-1)\cdot2\cdot1 + 3\cdot(-2)\cdot2 - 3\cdot3\cdot1 - (-2)\cdot(-1)\cdot5 - 2\cdot2\cdot2 =$$

$$= 30 - 2 - 12 - 9 - 10 - 8 = -11.$$

5. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$, розклавши його за елементами першого рядка.

Розв'язання:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^2\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^3\cdot2\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^4\cdot5\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 3 - 24 - 2(-6-18) +$$

$$+ 5(-8-3) = -21 + 48 - 55 = -28.$$

6. Обчислити визначник, спочатку спростивши його: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Розв'язання:

Додамо перший рядок до третього рядка , потім помножимо перший рядок на –2 і додамо його до другого рядка і отримаємо визначник, в якому елементи $a_{21} = a_{31} = 0$. Отриманий визначник розкладаємо за елементами першого стовпця:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2+(-2)\cdot1 & 8+(-2)\cdot3 & 1+(-2)\cdot2 \\ -1+1 & 1+3 & 2+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 8 - (-12) = 20.$$

7. Знайти матрицю, обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ і перевірити, чи справджуються рівності $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Розв'язання:

Знайдемо визначник матриці: $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5$. Оскільки $\Delta = -5 \neq 0$, обернена матриця A^{-1} існує. Знаходимо алгебричні доповнення :$A_{11} = 3$, $A_{12} = -1$, $A_{21} = -2$, $A_{22} = 1$. Тоді обернена матриця буде мати вигляд:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Перевіримо, чи виконуються рівності $AA^{-1} = A^{-1}A = E$:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}+\frac{2}{5} & -\frac{2}{5}+\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5}+\frac{3}{5} & \frac{2}{5}+\frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}+\frac{2}{5} & -\frac{6}{5}+\frac{6}{5} \\ -\frac{1}{5}+\frac{1}{5} & \frac{2}{5}+\frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Завдання для самостійної роботи.

1. Для матриць $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ обчислити A^T*-3B*, *AB*, *BA*, *AB+E*.

2. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} a & a-b \\ a+b & a-1 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}$, г) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

3. Обчислити визначник матриці, яка є добутком двох заданих матриць:

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

4. Серед заданих матриць знайти невироджену:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

5. Для заданої матриці знайти обернену: $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Системи лінійних рівнянь. Формули Крамера. Розв'язування систем лінійних рівнянь матричним методом

Системою m **лінійних рівнянь з** n **змінними** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ називається система, яка має наступний вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

де a_{ij} – коефіцієнти при змінних; b_i - вільні члени, $1 \le i \le m, \quad 1 \le j \le n.$

Упорядкована сукупність чисел $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, називається **розв'язком** системи, якщо при заміні x_1 на a_1 , x_2 на a_2 , … , x_n на a_n у кожному рівнянні системи дістанемо n правильних числових рівностей.

Система, що має розв'язок, називається **сумісною.** Система, яка не має жодного розв'язку, називається **несумісною.** Система з єдиним розв'язком називається **визначеною,** а з більшим числом розв'язків – **невизначаною.**

Система двох лінійних рівнянь з двома змінними має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{2.1}$$

а систему трьох лінійних рівнянь з трьома змінними записують у вигляді:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_3, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{2.2}$$

Метод Крамера. Цей метод розв'язування систем лінійних рівнянь зводиться до обчислення визначників. Так, розв'язок системи (2.1) можна знайти за **формулами Крамера**:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta},$$

де $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{12} & b_2 \end{vmatrix}$, за умови, що $\Delta \ne 0.$

$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ - називається визначником системи (2.1), а $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}$ - визначники, які дістають з визначника Δ заміною першого, другого стовпців відповідно стовпцем вільних членів.

Формули Крамера для системи (2.2) мають вигляд:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta},$$

де $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$ - визначник системи (2.2) **,** а

$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$ – визначники, які дістають з визначника Δ заміною першого, другого і третього стовпців відповідно стовпцем вільних членів.

Системи (2.1) і (2.2) мають:

а) єдиний розв’язок, коли $\Delta \neq 0$;

б) безліч розв’язків, коли $\Delta = \Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = 0 \quad (\Delta = \Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = \Delta_{x_3} = 0)$;

в) не мати жодного розв’язку, коли $\Delta = 0$ і хоча б один із визначників $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}$ $(\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \Delta_{x_3})$ відмінний від нуля.

Матричний метод роз’язання лінійних систем.

Нехай дано систему: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_3, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$

Розглянемо три матриці:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Перша матриця називається матрицею симтеми, друга матрицею-стовпцем змінних, третя – матрицею-стовпцем вільних членів. Тоді систему можна записати у матричному вигляді: $A \cdot X = B$. Якщо матриця системи рівнянь невироджена $(\Delta \neq 0)$, то розв’язок системи знаходимо у вигляді $X = A^{-1}B$, або

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Зразки розв'язування задач.

1. Розв'язати системи рівнянь за формулами Крамера:

$$a)\begin{cases} x_1+2x_2=8, \\ 3x_1-x_2=3. \end{cases} \qquad б)\begin{cases} 3x_1+x_2+x_3=-2, \\ 5x_1-x_2-x_3=10, \\ x_1-x_2+5x_3=-12. \end{cases}$$

Розв'язання:

а) Заходимо визначник системи

$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-1-6=-7\neq 0$, тому система має єдиний розв'язок . Знаходимо

$$\Delta_{x_1}=\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-8-6=-14; \qquad \Delta_{x_2}=\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}=3-24=-21.$$

За формулами Крамера , маємо:

$$x_1=\frac{-14}{-7}=2, \qquad x_2=\frac{-21}{-7}=3.$$

б) Знаходимо визначник системи:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=3(-5-1)-(25+1)-5+1=$$

$$=-18-26-4=-48\neq 0.$$

Система має єдиний розв'язок. Знаходимо Δ_{x_1}, Δ_{x_2}, Δ_{x_3} :

$$\Delta_{x_1}=\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 10 & -1 & -1 \\ -12 & -1 & 5 \end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 10 & -1 \\ -12 & 5 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 10 & -1 \\ -12 & -1 \end{vmatrix}=-2(-5-1)-(50-12)-$$

$$-10-12=12-38-22=-48;$$

$$\Delta_{x_2}=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 10 & -1 \\ 1 & -12 & 5 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 10 & -1 \\ -12 & 5 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 1 & -12 \end{vmatrix}=3(50-12)+2(25+1)-$$

$$-60-10=114+52-70=96;$$

$$\Delta_{x_3}=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 5 & -1 & 10 \\ 1 & -1 & -12 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} -1 & 10 \\ -1 & -12 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 1 & -12 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=3(12+10)-(-60-10)-$$

$$-2(-5+1)=66+70+8=144.$$

За формулами Крамера, маємо:

$$x_1 = \frac{-48}{-48} = 1; \quad x_2 = \frac{96}{-48} = -2; \quad x_3 = \frac{144}{-48} = -3.$$

2. Дослідити на сумісність системи лінійних рівнянь та знайти їх розв'язок у випадку сумісності:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -3. \end{cases}$

Розв'язання:

а) Обчислемо визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -1 - 5 - 2(-2-4) - 10 + 4 =$$

$$= -6 + 12 - 6 = 0$$

Визначник системи дорівнює нулю. Система або має безліч розв'язків, або не має жодного розв'язку. Знаходимо Δ_{x_1}, Δ_{x_2}, Δ_{x_3} :

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & -5 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -6 - 6 + 12 = 0,$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & -5 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = -9 + 18 - 9 = 0,$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 6 - 3 = 0.$$

Оскільки, $\Delta = \Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = \Delta_{x_3} = 0$, то система сумісна і невизначена. Для знаходження всіх розв'язків, відкидаємо третє рівняння, а рівняння , що залишилися, записуємо у вигляді:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 + 4x_3, \\ 2x_1 + x_2 = -1 + 5x_3. \end{cases}$$

Розв'язуємо отриману систему за формулами Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 + 4x_3 & 2 \\ -1 + 5x_3 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4x_3 - 2(-1 + 5x_3) = 3 - 6x_3;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1+4x_3 \\ 2 & -1+5x_3 \end{vmatrix} = -1+5x_3-2(1+4x_3) = -3-3x_3;$$

$$x_1 = \frac{3-6x_3}{-3} = -1+2x_3, \quad x_2 = \frac{-3-3x_3}{-3} = 1+x_3.$$

б) $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0$, тому що другий і третій рядки пропорційні.

Система або має безліч розв'язків, або не має жодного розв'язку.

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -7-14 = -21 \neq 0.$$

Отже, задана система не має жодного розв'язку, тобто вона є несумісною.

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь матричним методом:

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2+6x_3=17, \\ 3x_1+4x_2-x_3=-3, \\ x_1-5x_2+2x_3=10. \end{cases}$$

Розв'язання:

Запишемо дану систему рівнянь у матричній формі: $A \cdot X = B,$ де

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 17 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 16+3-90-24+18-10 = -87 \neq 0,$ значить матриця A має обернену матрицю.

Знайдемо алгебричні доповнення елементів матриці A :

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -24, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -21,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -7, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 20,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -19, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 7, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 17.$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{87}\begin{pmatrix} 3 & -24 & -21 \\ -7 & -2 & 20 \\ -19 & 7 & 17 \end{pmatrix}.$$

Скориставшись рівністю $X = A^{-1} \cdot B$, знаходимо розв'язок системи:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{87}\begin{pmatrix} 3 & -24 & -21 \\ -7 & -2 & 20 \\ -19 & 7 & 17 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 17 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix} = -\frac{1}{87}\begin{pmatrix} 3\cdot 17 - 24\cdot(-3) - 21\cdot 10 \\ -7\cdot 17 - 2\cdot(-3) + 20\cdot 10 \\ -19\cdot 17 + 7\cdot(-3) + 17\cdot 10 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{87}\begin{pmatrix} -87 \\ 87 \\ -174 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 2$ - шуканий розв'язок.

Завдання для самостійної роботи.

1. Розв'язати системи лінійних рівнянь за формулами Крамера:

а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 13, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -15; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 4, \\ 4x_1 - x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$

2. Визначити, при яких значеннях a і b система

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = b, \\ 2x_1 + x_2 + ax_3 = -1, \\ 5x_1 - 8x_2 + 9x_3 = 3 \end{cases}$$

а) має один розв'язок;
б) має безліч розв'язків;
в) не має жодного розв'язку.

3. Розв'язати системи лінійних рівнянь матричним методом:

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 4x_3 = -2, \\ 6x_1 + 2x_2 + x_3 = 9, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$

3.Вектори в просторі. Основні поняття. Лінійні операції з векторами. Прямокутна система координат у просторі.

Розглянемо напрямлений відрізок $\bar{a} = \overline{AB}$, де A – початок, B – кінець. Будемо називати його вектором.

Довжину вектора будемо позначати таким чином:

$$|\overline{a}| = |\overline{AB}|.$$

1. Додавання векторів.

Щоб побудувати суму даних векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$, треба відкласти ці вектори від довільної точки та побудувати на них паралелограм. Сумою векторів буде діагональ, що виходить з початку векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ (рис. 3.1).

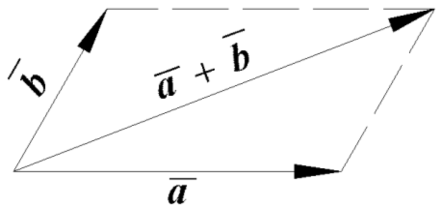


Рис. 3.1

Цей спосіб побудови називається правилом паралелограма.

Суму двох векторів можно побудувати ще й за правилом трикутника.

Відкласти вектор $\overline{b}$ від кінця вектора $\overline{a}$. Сумою векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ буде вектор, що з’єднує початок $\overline{a}$ з кінцем $\overline{b}$ (рис. 3.2).

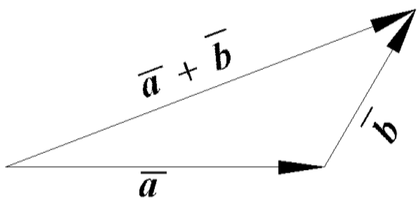


Рис. 3.2

Щоб побудувати суму n даних векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$, треба від довільної точки відкласти $\overline{a}_1$, потім від його кінця відкласти $\overline{a}_2$ і т.д., нарешті від кінця $\overline{a}_{n-1}$ відкласти $\overline{a}_n$. Сумою векторів буде вектор, напрямлений від початку $\overline{a}_1$ до кінця $\overline{a}_n$ (рис. 3.3).

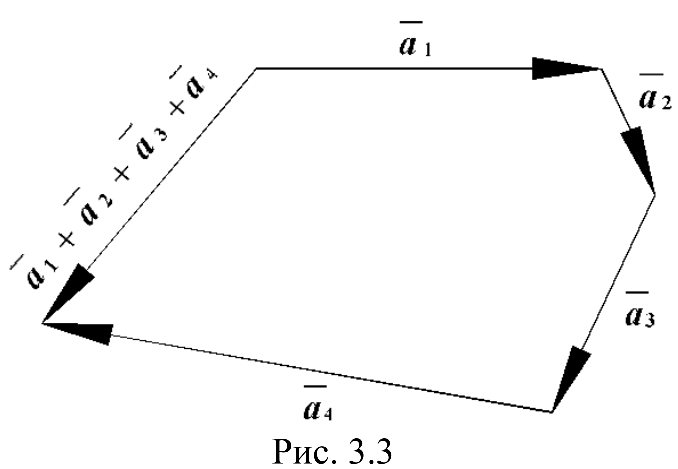


Рис. 3.3

2. Віднімання векоторів.

Щоб побудувати різницю векторів $\bar{a}-\bar{b}$, треба відкласти ці вектори від довільної точки, з'єднати їх кінці та вибрати на цьому відрізку напрямок від кінця $\bar{b}$ до кінця $\bar{a}$ (рис. 3.4).

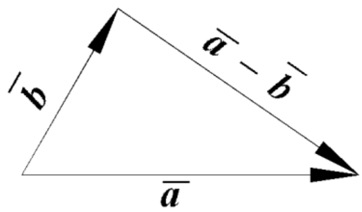


Рис. 3.4

3. Множення вектора на число.

Добутком ненульового вектора $\bar{a}$ на число k називається вектор, який має напрям вектора $\bar{a}$, якщо $k>0$, і протинапрям, якщо $k<0$ (при $k=0$, $0\cdot\bar{a}=\bar{0}$).

Ці три операції називаються лінійними операціями з векторами.

4. Проекція вектора на вісь.

Проекцією вектора на вісь називається довжина направленого відрізка, початок якого є проекція початку вектора і кінець – проекція його кінця, яка

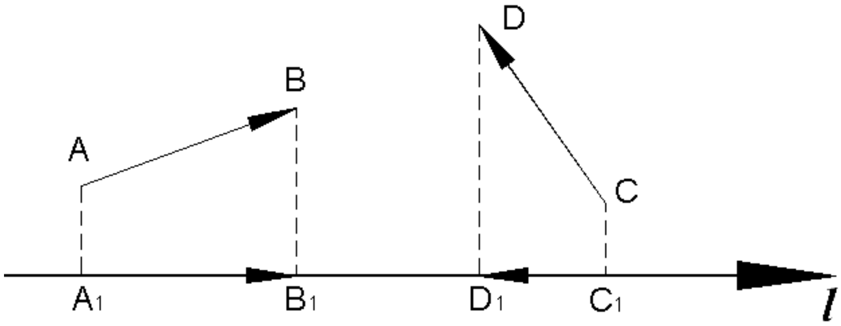


Рис. 3.5

береться із знаком плюс, якщо напрями відрізка і осі збігаються, і зі знаком мінус, якщо їх напрями протилежні (рис.3.5).

$np_{\bar{l}}\overline{AB}=\left|\overline{A_1B_1}\right|$, $np_{\bar{l}}\overline{CD}=\left|\overline{C_1D_1}\right|$.

Властивості проекції.

а) $np_{\bar{l}}\bar{a}=\left|\bar{a}\right|\cdot\cos\varphi$;

б) $np_{\bar{l}}\left(\bar{a}+\bar{b}\right)=np_{\bar{l}}\bar{a}+np_{\bar{l}}\bar{b}$;

в) $np_{\bar{l}}\left(k\cdot\bar{a}\right)=k\cdot np_{\bar{l}}\bar{a}$.

5. Прямокутна система координат.

Нехай у просторі задано три попарно перпендикулярні осі **OX, OY, OZ.** Координатами вектора $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$ на осі називаються проекції вектора на ці осі:

$a_x = np_{ox}\bar{a}$, $a_y = np_{oy}\bar{a}$, $a_z = np_{oz}\bar{a}$.

Якщо $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ - одиничні вектори, що напрямлені по ***OX, OY, OZ*, то** $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$.

Якщо $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ то координати вектора $\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.

6. Правила дій над векторами, заданими своїми координатами.

Якщо $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\bar{b} = (b_x, b_y, b_z)$, то

$$\bar{a} + \bar{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z);$$

$$\bar{a} - \bar{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z);$$

$$k \cdot \bar{a} = (k \cdot a_x, k \cdot a_y, k \cdot a_z).$$

7. Довжина вектора. Напрямлені косинуси вектора.

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2};$$

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|}; \qquad \cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|}; \qquad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\bar{a}|},$$

де α, β, γ - кути між $\bar{a}$ та осями ***OX, OY, OZ*.**

Для напрямлених конусів справедливо співвідношення:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

8. Поділ відрізка в даному відношенні.

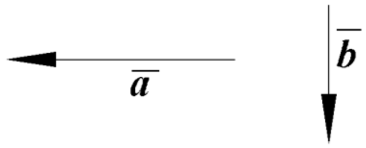
Нехай точки ***A, B*** мають координати $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$.

Якщо відрізок ***AB*** поділимо точкою ***M*** у відношенні: $AB : AM = \lambda$, то координати точки ***M*** знаходять за формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \qquad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

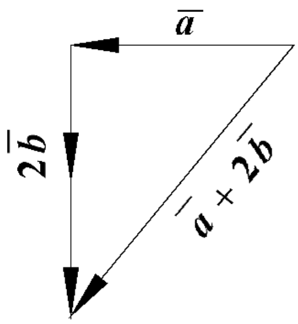
Якщо $\lambda = 1$, то отримуємо формули для знаходження координат середини відрізка.

Зразки розв'язування задач.

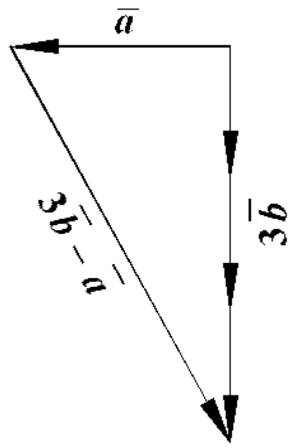


Задача 1. Дано ненульові вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$. Побудувати вектори $\overline{a}+2\overline{b}$, $3\overline{b}-\overline{a}$.

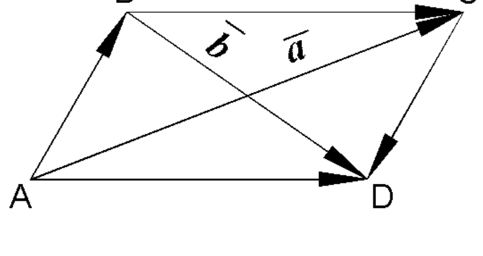
Розв'язання. Знайдемо суму за правилом трикутника $\overline{a}+2\overline{b}$:



і різницю $3\overline{b}-\overline{a}$:



Задача 2. Вектори $\overline{AC}=\overline{a}$, $\overline{BD}=\overline{b}$ - діагоналі паралелограма ***ABCD***. Запишіть вектори $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ і $\overline{DA}$ через $\overline{a}$ і $\overline{b}$.



Розв'язання.

За означенням суми і різниці векторів маємо: $\overline{BC}+\overline{CD}=\overline{b}$, $\overline{BC}-\overline{CD}=\overline{a}$.

Додавши ці рівності, дістанемо $\overline{BC}=\dfrac{\overline{a}+\overline{b}}{2}$. Далі знайдемо $\overline{CD}=\overline{b}-\overline{BC}=\overline{b}-\dfrac{\overline{a}+\overline{b}}{2}=\dfrac{\overline{b}-\overline{a}}{2}$; $\overline{AB}=-\overline{CD}=\dfrac{\overline{a}-\overline{b}}{2}$, $\overline{DA}=-\overline{BC}=-\dfrac{\overline{a}+\overline{b}}{2}$.

Задача 3. Дано: $\mathbf{пр}_{\bar{l}}\,\overline{\mathbf{a}}=\mathbf{3}$; $\mathbf{пр}_{\bar{l}}\,\overline{\mathbf{b}}=-\mathbf{1}$. Обчислити: 1) $\mathbf{пр}_{\bar{l}}\left(\mathbf{3}\overline{\mathbf{a}}+\mathbf{2}\overline{\mathbf{b}}\right)$; 2) $\mathbf{пр}_{\bar{l}}\left(\overline{\mathbf{a}}-\mathbf{2}\overline{\mathbf{b}}\right)$.

Розв'язання. Використавши властивості проекцій, дістанемо:

1) $\boldsymbol{np}_{\bar{l}}\left(3\overline{a}+2\overline{b}\right)=3\boldsymbol{np}_{\bar{l}}\,\overline{a}+2\boldsymbol{np}_{\bar{l}}\,\overline{b}=3\cdot 3+2(-1)=7$.

2) $\boldsymbol{np}_{\bar{l}}\left(\overline{a}-2\overline{b}\right)=\boldsymbol{np}_{\bar{l}}\,\overline{a}-2\boldsymbol{np}_{\bar{l}}\,\overline{b}=3-2(-1)=5$.

Задача 4. Знайти проекції вектора $\overline{a}$ на вісь $\boldsymbol{l}$, яка утворює з вектором кут: 1) 45^0, 2) 120^0, 3) 150^0, якщо довжина вектора дорівнює 4.

Розв'язання.

1) $\boldsymbol{np}_{\bar{l}}\,\overline{a}=\left|\overline{a}\right|\cdot\cos\varphi=4\cdot\cos 45^0=4\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$;

2) $\boldsymbol{np}_{\bar{l}}\,\overline{a}=\left|\overline{a}\right|\cdot\cos\varphi=4\cdot\cos 120^0=4\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-2$;

3) $\boldsymbol{np}_{\bar{l}}\,\overline{a}=\left|\overline{a}\right|\cdot\cos\varphi=4\cdot\cos 150^0=4\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=-2\sqrt{3}$.

Задача 5. Знайти периметр трикутника, вершинами якого є точки $A(8;0;6)$, $B(8;-4;6)$, $C(6;-2;5)$.

Розв'язання. Знайдемо координати векторів, що створюють трикутник, та їх довжини:

$\overline{AB}=(8-8;-4-0;6-6)$, $\overline{AB}=(0;-4;0)$;

$\overline{AC}=(6-8;-2-0;5-6)$, $\overline{AC}=(-2;-2;-1)$;

$\overline{BC}=(6-8;-2-(-4);5-6)$, $\overline{BC}=(-2;2;-1)$;

$\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{0^2+(-4)^2+0^2}=4$;

$\left|\overline{AC}\right|=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+(-1)^2}=3$;

$\left|\overline{BC}\right|=\sqrt{(-2)^2+2^2+(-1)^2}=3$.

Тоді периметр трикутника $P=4+3+3=10$.

Задача 6. Обчислити довжину вектора $3\overline{a}+2\overline{b}$, якщо $\overline{a}=2\overline{i}$, $\overline{b}=\overline{i}+\overline{j}-\overline{k}$.

Розв'язання. Знайдемо координати векторів:

$3\overline{a}=(3\cdot 2;3\cdot 0;3\cdot 0)$, $3\overline{a}=(6;0;0)$;

$2\overline{b}=(2\cdot 1;2\cdot 1;2\cdot(-1))$, $2\overline{b}=(2;2;-2)$;

$3\overline{a}+2\overline{b}=(6+2;0+2;0-2)$, $3\overline{a}+2\overline{b}=(8;2;-2)$.

Тоді довжина шуканого вектора дорівнює:
$\left|3\bar{a}+2\bar{b}\right|=\sqrt{(8)^2+2^2+(-2)^2}=\sqrt{72}=\sqrt{36\cdot 2}=6\sqrt{2}$.

Задача 7. Відрізок AB, де $A(7;2;-3)$, . $B(-5;0;4)$, поділений точкою M у відношенні $\lambda = AB : AM = 1:5$. Знайти координати точки M.

Розв'язання.

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=\frac{7+\frac{1}{5}(-5)}{1+\frac{1}{5}}=\frac{6}{\left(\frac{6}{5}\right)}=5;\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=\frac{2+\frac{1}{5}\cdot 0}{1+\frac{1}{5}}=\frac{2}{\left(\frac{6}{5}\right)}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3};$$

$$z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}=\frac{-3+\frac{1}{5}\cdot 4}{1+\frac{1}{5}}=\frac{\left(-\frac{11}{5}\right)}{\left(\frac{6}{5}\right)}=-\frac{11}{6}.$$

Отже, $M\left(5;\frac{5}{3};-\frac{11}{6}\right)$.

Задача 8. Відрізок з кінцями $A(-2;4;0)$ і $B(6;12;-4)$, ділиться в точці M навпіл. Знайдіть довжину відрізка MK, де $K(0;10;6)$.

Розв'язання. Знайдемо координати точки M за формулами:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-2+6}{2}=2;\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{4+12}{2}=8;\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}=\frac{0-4}{2}=-2;$$

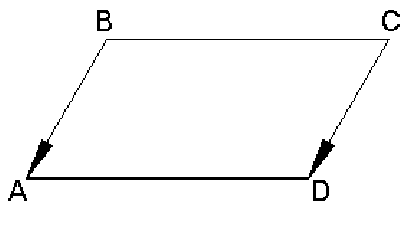
$M(2;8;-2)$.

Тоді координати вектора $\overline{MK}=(0-2;10-8;6-(-2))$, $\overline{MK}=(2;2;8)$.

Довжина вектора $\left|\overline{MK}\right|=\sqrt{(-2)^2+2^2+8^2}=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$.

Задача 9. Точки $A(-3;1;2)$, $B(1;3;2)$, $C(-4;1;0)$ є вершинами паралелограма, причому A і C – протилежні вершини. Знайдіть четверту вершину D.

Розв'язання.



Позначимо координати точки $D(x;y;z)$, тоді $\overline{CD}=(x+4;y-1;z+0)$, $\overline{BA}=(-4;-2;0)$. Оскільки $\left|\overline{CD}\right|=\left|\overline{BA}\right|$, їх координати рівні:

$x+4=-4$; $\qquad y-1=-2$; $\qquad z=0$;

$x=-8$; $\qquad y=-1$; $\qquad z=0$.

Четверта вершина паралелограма – точка $D(-8;-1;0)$.

Задача 10. Знайти напрямні косинуси вектора $\bar{a}$, а також кути, що утворює вектор з осями координат, якщо $\bar{a} = \bar{i} - \bar{k}$.

Розв'язання. Знайдемо координати вектора $\bar{a} = (1;0;-1)$ та його довжину $|\bar{a}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.

Напрямні косинуси дорівнюють:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|} = \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|} = \frac{0}{2} = 0; \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\bar{a}|} = \frac{-1}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Тоді $\alpha = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$; $\beta = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$; $\gamma = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$.

Завдання для самостійної роботи.

Задача 1. У трикутнику ABC проведено медіану AM. Доведіть, що $2\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{AC}$.

Задача 2. Дано вектори $\bar{a} = -2\bar{i} - 3\bar{j}$, $\bar{b} = \bar{i} + \bar{j} - 4\bar{k}$, $\bar{c} = \bar{k} - 2\bar{j}$. Знайти довжини векторів 1) $\bar{a} + 2\bar{b}$, 2) $3\bar{c} - \bar{a}$.

Задача 3. Точки $A(1;-2;-1)$, $B(3;4;2)$, $C(3;1;-2)$ є вершинами паралелограма, причому A і C – протилежні вершини. Знайдіть четверту вершину D, а також периметр паралелограму.

Задача 4. Дано: $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 4$, кути між віссю l дорівнюють 60^0 і 120^0. Обчислити $np_l(2\bar{b} - \bar{a})$.

Задача 5. Відрізок AB задано координатами своїх кінців $A(3;-2;-5)$ і $B(7;6;-1)$. Знайти довжину вектора $\overline{CD}$, де C – середина відрізка AB, D – точка, яка ділить AB у відношенні $\lambda = \frac{1}{3}$.

4. Скалярний, векторний, мішаний добутки векторів. Застосування в задачах геометрії. Умови перпендикулярності та компланарності векторів.

1. **Скалярним добутком векторів** називається число, що дорівнює добутку довжин векторів на косинус кута між ними:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\left(\bar{a} \,\widehat{,}\, \bar{b}\right)$$

Якщо вектори задані своїми координатами: $\bar{a} = (a_x;\ a_y;\ a_z)$, $\bar{b} = (b_x;\ b_y;\ b_z)$, то скалярний добуток обчислюють за формулою:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Кут між векторами обчислюють за формулою:

$$\cos\left(\bar{a}\ \hat{,}\ \bar{b}\right)=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}=\frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

Умова перпендикулярності векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ має вигляд:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

Скалярний квадрат вектора дорівнює:

$$\bar{a}^2=\bar{a}\cdot\bar{a}=|\bar{a}|\cdot|\bar{a}|\cdot\cos(0)=|\bar{a}|^2.$$

Проекція вектора $\bar{a}$ на напрям вектора $\bar{b}$:

$$np_{\bar{b}}\bar{a}=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|}.$$

2. **Векторним добутком двох векторів** $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називається третій вектор $\bar{c}$, який задовольняє умові:

1) $|\bar{c}|=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot sin\left(\bar{a}\ \hat{,}\ \bar{b}\right)$;

2) $\bar{c}\perp\bar{a}$, $\bar{c}\perp\bar{b}$;

3) $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ утворюють праву трійку векторів, тобто третій вектор має такий

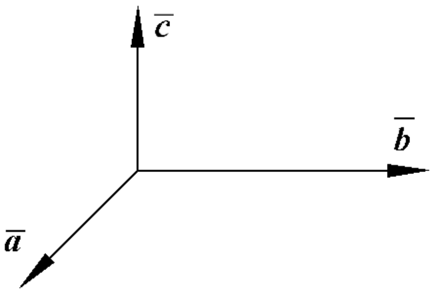


Рис. 4.1

напрям, що при спостереженні з його кінця найближчий поворот від вектора $\bar{a}$ до $\bar{b}$ виконується проти годинникової стрілки.

Векторний добуток позначається символом $\bar{a}\times\bar{b}$. За визначенням випливає, що $\bar{a}\times\bar{b}=-\left(\bar{b}\times\bar{a}\right)$.

Модуль векторного добутку дорівнює площі паралелограма, побудованого на $\bar{a}$ і $\bar{b}$:

$$S_{nap}=|\bar{a}\times\bar{b}|.$$

Площа трикутника обчислюється за формулою:

$$S_{mp}=\frac{1}{2}S_{nap}=\frac{1}{2}|\bar{a}\times\bar{b}|.$$

Векторній добуток векторів, які задані своїми координатами, обчислюються за формулою:

$$\left|\bar{a} \times \bar{b}\right| = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Умова колінеарності двох векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ має вигляд:

$\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$ (або $\dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y} = \dfrac{a_z}{b_z}$).

Векторні добутки ортів дорівнюють:

$\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}$; $\bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}$; $\bar{k} \times \bar{i} = \bar{j}$;

$\bar{i} \times \bar{i} = \bar{0}$; $\bar{j} \times \bar{j} = \bar{0}$; $\bar{k} \times \bar{k} = \bar{0}$.

3. **Мішаним добутком трьох векторів** називається добуток $\left(\bar{a} \times \bar{b}\right) \cdot \bar{c}$. Частіше мішаний добуток позначається $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$.

Якщо вектори задані своїми координатами, то мішаний добуток знаходять за формулою:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Об'єм паралелепіпеду, який побудований на векторах $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$, $\bar{\mathbf{c}}$ як на сторонах, дорівнює модулю мішаного добутку цих векторів:

$$V_{пар} = \left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right|.$$

Для об'єму піраміди маємо наступну формулу:

$$V_{піраміди} = \frac{1}{6}\left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right|.$$

Умова компланарності трьох векторів має вигляд: $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0$.

Зразки розв'язування задач.

Задача 1. Знайти скалярний добуток векторів $\bar{a} = 4\bar{k} - \bar{i}$, $\bar{b} = 3\bar{j} + \bar{i} - \bar{k}$.

Розв'язання. Знайдемо координати векторів: $\bar{a}(-1;\ 0;\ 4)$, $\bar{b}(1;\ 3;\ -1)$. Тоді скалярний добуток дорівнює $\bar{a} \cdot \bar{b} = (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) = -1 - 4 = -5$.

Задача 2. Знайти кут між діагоналями паралелограма, який побудований на векторах $\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$, $\bar{b} = 3\bar{j} - \bar{i} - \overline{4k}$.

Розв'язання. Як відомо, діагоналі паралелограма є $\bar{c} = \left(\bar{a} + \bar{b}\right)$ та $\bar{d} = \left(\bar{a} - \bar{b}\right)$. Знайдемо ці вектори:

$\bar{c} = \bar{a} + \bar{b} = (\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}) + (3\bar{j} - \bar{i} - 4\bar{k}) = 5\bar{j} - 5\bar{k}$;

$\bar{c} = \bar{a} + \bar{b} = (0;\ 5;\ -5)$;

$\bar{d} = \bar{a} - \bar{b} = (\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}) - (3\bar{j} - \bar{i} - 4\bar{k}) = 2\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}$;

$\bar{d} = \bar{a} - \bar{b} = (2;\ -1;\ 3)$.

Тоді косинус кута між діагоналями знаходиться за формулою:

$$\cos\left(\bar{c} \ \hat{,} \ \bar{d}\right) = \frac{\bar{c} \cdot \bar{d}}{|\bar{c}| \cdot |\bar{d}|} = \frac{0 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) + (-5) \cdot 3}{\sqrt{5^2 + (-5)^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \frac{-5-15}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{14}} = \frac{-20}{5\sqrt{2} \cdot \sqrt{2 \cdot 7}} =$$

$$= -\frac{20}{10\sqrt{7}} = -\frac{2}{\sqrt{7}} = -\frac{2\sqrt{7}}{7};$$

$$\mathbf{cos}\left(\bar{c} \ \hat{,} \ \bar{d}\right) = \mathbf{arccos}\left(-\frac{2\sqrt{7}}{7}\right).$$

Задача 3. Задано вектори $\bar{a} = 12\bar{i} - 3\bar{j} - 3\bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} + 2\bar{j} + 4\bar{k}$, $\bar{c} = \bar{i} - 3\bar{j} - 2\bar{k}$. Обчислити проекцію вектора $\bar{b} + \bar{c}$ на вектор $\bar{a}$.

Розв'язання. Знайдемо координати векторів $\bar{b} + \bar{c} = (1+1;\ 2-3;\ 4-2)$; $\bar{b} + \bar{c} = (2;\ -1;\ 2)$ та $\bar{c} = (12;\ -3;\ -3)$.

Обчислимо проекцію $(\bar{b} + \bar{c})$ на вектор $\bar{a}$ за формулою:

$$np_{\bar{a}}(\bar{b} + \bar{c}) = \frac{(\bar{b} + \bar{c}) \cdot \bar{a}}{|\bar{a}|} = \frac{2 \cdot 12 + (-1) \cdot (-3) + 2(-3)}{\sqrt{12^2 + (-3)^2 + (-3)^2}} = \frac{24 + 3 - 6}{\sqrt{144 + 9 + 9}} = \frac{21}{\sqrt{162}} = \frac{21}{9\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{6}.$$

Задача 4. Дано трикутник своїми вершинами: $A(2;\ 4;\ 5)$, $B(-3;\ 2;\ 2)$, $C(-1;\ 0;\ 3)$. Покажіть, що $\overline{CA} \perp \overline{CB}$.

Розв'язання. Знайдемо координати векторів:

$\overline{CA} = (2-(-1);\ 4-0;\ 5-3)$; $\overline{CA} = (3;\ 4;\ 2)$;

$\overline{CB} = (-3-(-1);\ 2-0;\ 2-3)$; $\overline{CB} = (-2;\ 2;\ -1)$.

Умова перпендикулярності двох векторів має вигляд: $\overline{CA} \cdot \overline{CB} = 0$. Перевіримо виконання цієї умови: $\overline{CA} \cdot \overline{CB} = 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = -6 + 8 - 2 = 0$.

Доведено, що вектори перпендикулярні.

Задача 5. Знайти площу паралелограма, який побудований на векторах $\bar{a} = \bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$, $\bar{b} = 2\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$.

Розв'язання. Модуль векторного добутку двох векторів дорівнює площі паралелограма, який побудований на цих векторах. Знайдемо векторний добуток:

$$\bar a \times \bar b = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \bar i \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - \bar j \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \bar k \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \bar i \cdot (2-1) - j \cdot (2+2) + \bar k \cdot (-1-2) = \bar i - 4\bar j - 3\bar k.$$

Площа паралелограма дорівнює:

$$\boldsymbol{S = \left|\bar a \times \bar b\right| = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{26}(кв.\ од.)}.$$

Задача 6. Знайти площу трикутника за координатами його вершин: $\boldsymbol{A(1;\ -2;\ 8)}$, $\boldsymbol{B(0;\ 0;\ 4)}$, $\boldsymbol{C(6;\ 2;\ 0)}$.

Розв'язання. Розглянемо два вектори, на яких побудовано трикутник, наприклад, $\boldsymbol{\overline{AB} \perp \overline{AC}}$.

$\boldsymbol{\overline{AB} = (-1;\ 2;\ -4)}$, $\boldsymbol{\overline{AC} = (5;\ 4;\ -8)}$.

Векторний добуток дорівнює:

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ -1 & 2 & -4 \\ 5 & 4 & -8 \end{vmatrix} = \bar i \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} - \bar j \cdot \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 5 & -8 \end{vmatrix} + \bar k \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \bar i \cdot (-16+16) - j \cdot (8+20) + \bar k \cdot (-4-10) = -28\bar j - 14\bar k.$$

Тоді площа трикутника дорівнює:

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{2}\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right| = \sqrt{(-28)^2 + (-14)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{5 \cdot 14^2} = 7\sqrt{5}(кв.\ од.)}.$$

Задача 7. Розкрити дужки та спростити вираз:

$$\boldsymbol{(2\bar k \times \bar j)\cdot(3\bar i - \bar k) + (\bar i \times 2\bar j)\cdot(\bar j - 3\bar k)}.$$

Розв'язання.

$$(2\bar k \times \bar j)\cdot(3\bar i - \bar k) + (\bar i \times 2\bar j)\cdot(\bar j - 3\bar k) = (-2\bar i)\cdot(3\bar i - \bar k) + 2\bar k \cdot (\bar j - 3\bar k) =$$

$$= -6\bar i^2 + 2\bar i \cdot \bar k + 2\bar k \cdot \bar j - 6\bar k^2 = -6 - 6 = -12.$$

Задача 8. При яких значеннях $\boldsymbol{\alpha}$ і $\boldsymbol{\beta}$ вектори $\boldsymbol{\bar a = \alpha\bar i - 3\bar j + \bar k}$, $\boldsymbol{\bar b = 2\bar i + 4\bar j + \beta\bar k}$ колінеарні?

Розв'язання. Умова колінеарності двох векторів має вигляд:

$$\boldsymbol{\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}}; \qquad \boldsymbol{\frac{\alpha}{2} = \frac{-3}{4} = \frac{1}{\beta}}.$$

Звідки

$$\boldsymbol{\alpha = \frac{2\cdot(-3)}{4} = -\frac{3}{2}};\ \boldsymbol{\beta = \frac{4\cdot 1}{-3} = -\frac{4}{3}}.$$

Задача 9. Обчислити об'єм паралелепіпеду і піраміди, які побудовані на векторах $\bar{a}=3\bar{i}-4\bar{j}$, $\bar{b}=\bar{k}-3\bar{j}$, $\bar{c}=2\bar{j}+5\bar{k}$.

Розв'язання. Об'єм паралелепіпеду дорівнює модулю мішаного добутку векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\begin{vmatrix}3 & 4 & 0\\ 0 & -3 & 1\\ 0 & 2 & 5\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 2 & 5\end{vmatrix}=3\cdot(-15-2)=-51.$$

Тоді об'єми паралелепіпеду і піраміди дорівнюють:

$$V_{пар}=\left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right|=\left|-51\right|=51(куб.\ од.);$$

$$V_{піраміди}=\frac{1}{6}\left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right|=\frac{1}{6}V_{пар}=\frac{51}{6}=\frac{17}{2}=8{,}5(куб.\ од.).$$

Задача 10. Довести, що точки $A(2;\ -1;\ -2)$, $B(1;\ 2;\ 1)$, $C(2;\ 3;\ 0)$, $D(5;\ 0;\ -6)$ лежать в одній площині.

Розв'язання. Щоб довести, що ці чотири точки лежать в одній площині, доведемо, що в одній площині лежать вектори $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, тобто ці три вектори компланарні.

Умова компланарності трьох векторів має вигляд:

$\overline{AB}\ \overline{AC}\ \overline{AD}=0$.

Знайдемо координати векторів:

$\overline{AB}=(-1;\ 3;\ 3)$; $\overline{AC}=(0;\ 4;\ 2)$; $\overline{AD}=(3;\ 1;\ -4)$.

Обчислимо мішаний добуток векторів:

$$\overline{AB}\ \overline{AC}\ \overline{AD}=\begin{vmatrix}-1 & 3 & 3\\ 0 & 4 & 2\\ 3 & 1 & -4\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}4 & 2\\ 1 & -4\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}3 & 3\\ 4 & 2\end{vmatrix}=-1(-16-2)+3\cdot(6-12)=18-18=0.$$

Таким чином, точки ***A***, ***B***, ***C***, ***D*** лежать в одній площині.

Завдання для самостійної роботи.

Задача 1. Знайти кут між векторами $\bar{a}=-\bar{i}+\bar{j}$ і $\bar{b}=\bar{i}-2\bar{j}+2\bar{k}$, а також площу паралелограма, побудованого на них.

Задача 2. Обчислити проекцію вектора $\bar{a}-\bar{c}$ на вектор $\bar{b}$, якщо $\bar{a}=2\bar{i}-\bar{k}$, $\bar{b}=\bar{i}+3\bar{j}$, $\bar{c}=3\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k}$.

Задача 3. Дано вектори: $\bar{a}=2\bar{i}-2\bar{j}+\bar{k}$, $\bar{b}=3\bar{i}+2\bar{j}-2\bar{k}$, $\bar{c}=6\bar{i}-6\bar{j}+3\bar{k}$. Довести:

1) вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ перпендикулярні;
2) вектори $\bar{a}$ і $\bar{c}$ колінеарні;
3) вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ компланарні.

Задача 4. Обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах: $\bar{a}=\bar{i}-\bar{k}$, $\bar{b}=3\bar{j}+2\bar{k}$, $\bar{c}=\bar{i}-\bar{j}-2\bar{k}$.

Задача 5. Дано координати вершин піраміди:: $O(0;\ 0;\ 0)$, $A(1;\ 2;\ -1)$, $B(-2;\ 3;\ 4)$, $C(1;\ 0;\ -2)$. Обчислити:

1) кут ABC;
2) площу грані ABC;
3) об'єм піраміди $OABC$.

5.Загальне і канонічне рівняння прямої. Рівняння прямої у відрізках на осях. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Рівняння прямої, яка проходить через дві дані точки. Перетин двох прямих.

Рівняння вигляду $Ax+By+C=0$ за умови, що коефіцієнти A і B одночасно не дорівнюють нулю, називається загальним рівнянням прямої. Розглянемо окремі випадки загального рівняння.

Значення коефіцієнтів	Вид рівняння	Положення прямої
$C=0$	$Ax+By=0$	Проходить через початок координат
$A=0$	$By+C=0$	Паралельна осі Ox
$B=0$	$Ax+C=0$	Паралельна осі Oy
$A=C=0$	$y=0$	Збігається з віссю Ox
$B=C=0$	$x=0$	Збігається з віссю Oy

Нехай $M_0(x_0;\ y_0)$ - задана точка прямої, а $\bar{q}=(m;\ n)$ - вектор, колінеарний прямій:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$$

називається **канонічним рівнянням прямої**.

Рівняння прямої у відрізках на осях має вигляд:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

де a і b - відповідно абсциса і ордината точки перетину прямої з осями Ox і Oy.

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом має вигляд: $y=kx+b$,

де $k=tg\alpha$ - кутовий коефіцієнт, який дорівнює тангенсу кута нахилу прямої до додатного напряму осі Ox; b - ордината точки перетину прямої з віссю Oy.

Рівняння прямої, що проходить через дві дані точки $A(x_1;\ y_1)$ і $B(x_2;\ y_2)$, має вигляд: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

Якщо дано дві прямі $A_1x+B_1y+C_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2=0$, які перетинаються, то щоб визначити координати точки перетину цих прямих, треба розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0; \\ A_2x+B_2y+C_2=0. \end{cases}$

Зразки розв'язування задач.

Задача 1. Перевірити, чи належать точки $A(-3;\ 0)$, $B(14;\ -13)$, $C(1;\ 0)$, $D(2;\ 2)$ прямій $2x-5y+6=0$.

Розв'язання. Якщо координати точки задовольняють рівнянню, тобто перетворюють його в тотожність, то ця точка належить заданій прямій; якщо координати точки не задовольняють рівнянню, то точка не належить прямій.

Підставивши замість змінних x і y в рівняння $2x-5y+6=0$ координати точки A, дістанемо тотожність $2\cdot(-3)-5\cdot 0+6=0$, отже точка $A(-3;\ 0)$ належить заданій прямій. Аналогічно переконуємося у тому, що точка D належить прямій, а точки B і C не належать.

Задача 2. Побудуйте прямі:

а) $3x+4y+12=0$;

б) $5x+12=0$;

в) $2y-7=0$.

Розв'язання.

а) Щоб побудувати пряму, знайдемо координати точок перетину з осями Ox і Oy. Припустивши, що $y=0$, дістанемо $3x+12=0$, $x=-4$, $A(-4;\ 0)$. При $x=0$ дістанемо $4y+12=0$, $y=-3$, $B(0;\ -3)$. Через точки A і B проводимо шукану пряму (рис. 5.1).

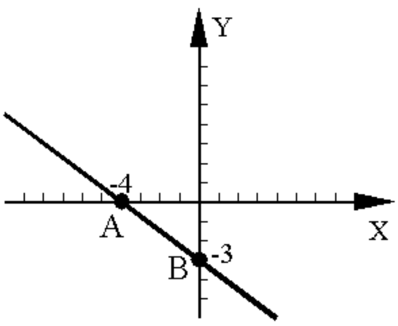


Рис. 5.1

б) Знайдемо змінну $\boldsymbol{x}$ з рівняння $\mathbf{5}\boldsymbol{x}+\mathbf{12}=\mathbf{0}$: $\boldsymbol{x}=-\dfrac{\mathbf{12}}{\mathbf{5}}=-\mathbf{2{,}4}$. На осі $\boldsymbol{Ox}$ візьмемо точку $\boldsymbol{x}=-\mathbf{2{,}4}$ і проведемо пряму паралельно осі $\boldsymbol{Oy}$ (рис. 5.2).

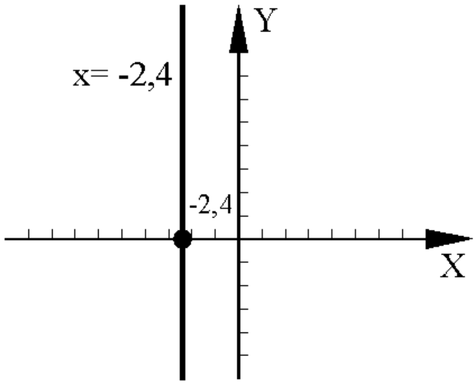


Рис. 5.2

в) Знайдемо змінну $\boldsymbol{y}$ з рівняння $\mathbf{2}\boldsymbol{y}-\mathbf{7}=\mathbf{0}$: $\boldsymbol{y}=\dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}}=\mathbf{3{,}5}$.

На осі $\boldsymbol{Oy}$ візьмемо точку $\boldsymbol{y}=\mathbf{3{,}5}$ і проведемо пряму паралельно осі $\boldsymbol{Ox}$ (рис. 5.3)

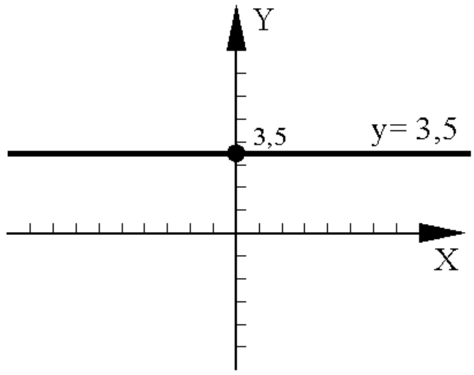


Рис. 5.3

Задача 3. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $\boldsymbol{M_0}(\mathbf{2};\ -\mathbf{3})$ і паралельна вектору $\bar{\boldsymbol{l}}=(2;\ -2)$.

Розв'язання. Використовуючи канонічне рівняння прямої, маємо $\dfrac{\boldsymbol{x}-\mathbf{2}}{\mathbf{2}}=\dfrac{\boldsymbol{y}+\mathbf{3}}{-\mathbf{2}}$.

Доводимо рівняння до загального вигляду:

$-\mathbf{2}(\boldsymbol{x}-\mathbf{2})=\mathbf{2}(\boldsymbol{y}+\mathbf{3})$; $\quad -\boldsymbol{x}+\mathbf{2}=\boldsymbol{y}+\mathbf{3}$; $\quad \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\mathbf{1}=\mathbf{0}$.

Задача 4. Загальне рівняння прямої $3x-4y+12=0$ перетворити в рівняння у відрізках на осях та побудувати пряму.

Розв'язання. Перетворимо рівняння: $3x-4y=-12$. Праву та ліву частини рівняння розділимо на (-12): $\frac{3x}{-12}-\frac{4y}{-12}=1$.

Тоді $\frac{x}{-4}+\frac{y}{3}y=1$ - рівняння у відрізках на осях.

Тобто $a=-4$ і $b=3$. Отже дістанемо точки $A(-4;\ 0)$ і $B(0;\ 3)$. Пряма, яка проведена через точки A і B - шукана (рис. 5.4).

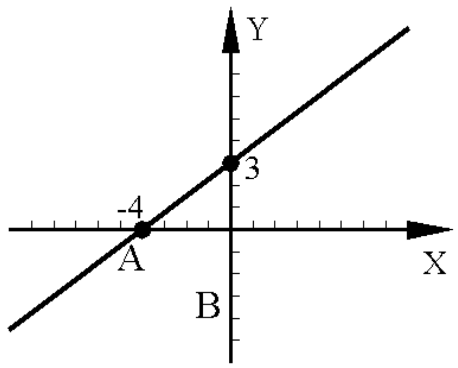


Рис. 5.4

Задача 5. Обчислить кутовий коефіцієнт прямої $3x+2y+6=0$.

Розв'язання. Розв'язавши рівняння $3x+2y+6=0$ відносно y, дістанемо $y=-\frac{3}{2}x-3$, звідки $k=tg(\alpha)=-1{,}5$.

Задача 6. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $(-1;\ -4)$ і утворює з віссю Ox кут 135^0.

Розв'язання. Щоб скласти шукане рівняння прямої, треба знайти k і b. Знайдемо кутовий коефіцієнт $k=tg\left(135^0\right)=-1$. Для визначення b підставимо в рівняння з кутовим коефіцієнтом $y=kx+b$ координати даної точки і значення k. Дістанемо: $-4=(-1)\cdot 1+b$, звідки $b=-5$. Шукане рівняння має вигляд $y=-x-5$.

Задача 7. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точки $A(3;\ -2)$ і $B(4;\ -3)$.

Розв'язання. За умовою задачі: $x_1=3$, $x_2=4$, $y_1=-2$, $y_2=-3$. Підставивши ці значення в рівняння прямої, яка проходить через дві точки, дістанемо: $\frac{x-3}{4-3}=\frac{y+2}{-3+2}$; $-x+3=y+2$ і $x+y+1=0$.

Задача 8. Трикутник задано вершинами: $A(2;\ 5)$, $B(-6;\ -4)$.і $C(6;\ -3)$. Складіть рівняння медіани BD.

Розв'язання. Знайдемо координати точки D - середини сторони AC:

$$x_D = \frac{x_A + x_C}{2}; \qquad y_D = \frac{y_A + y_C}{2};$$

$$x_D = \frac{2+6}{2} = 4; \qquad y_D = \frac{5-3}{2} = 2.$$

Отже, координати точки дорівнюють $D(4;\ 2)$. Тоді рівняння сторони BD, де $B(-6;\ -4)$, має вигляд: $\dfrac{x-4}{-6-4} = \dfrac{y+2}{-4-2}$;

$$\frac{x-4}{-10} = \frac{y+2}{-6};$$

$$-6(x-4) = -10(y-2);$$

$$-6x + 24 = -10y + 20;$$

$$6x - 10y - 4 = 0;$$

$$3x - 5y - 2 = 0.$$

Задача 9. Знайдіть вершини трикутника, якщо його сторони задано рівняннями . $3x - 4y + 11 = 0$; $4x - y - 7 = 0$; $y = -3x$.

Розв'язання. Щоб знайти координати вершин трикутника, треба розв'язати три системи рівнянь:

$$\begin{cases} 3x - 4y + 11 = 0 \\ 4x - y - 7 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x - y - 7 = 0 \\ y = -3x \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - 4y + 11 = 0 \\ y = -3x \end{cases}.$$

Перша система має розв'язок:

$$\begin{cases} y = 4x - 7 \\ 3x - 4(4x-7) + 11 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4x - 7 \\ 3x - 16x + 28 + 11 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4x - 7 \\ -13x = -39 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \cdot 3 - 7 = 5 \end{cases}$$

Друга система має розв'язок:

$$\begin{cases} y = -3x \\ 4x + 3x - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -3x \\ 7x = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}.$$

Третя система має розв'язок:

$$\begin{cases} y = -3x \\ 3x - 4(-3x) + 11 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -3x \\ 15x = -11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{11}{15} \\ y = \dfrac{11}{5} \end{cases}.$$

Отже, вершинами трикутника є точки $(3;\ 5)$; $(1;\ -3)$; $\left(-\dfrac{11}{15};\ \dfrac{11}{5}\right)$.

Завдання для самостійної роботи.

1. При якому значенні коефіцієнта k пряма $y = kx + 9$ проходить через точку перетину прямих $x - y + 5 = 0$ і $x + 2y + 2 = 0$.
2. Пряма проходить через точку $M(2\ \ 5)$ і утворює з віссю Ox кут, що дорівнює $arctg(3)$. Знайдіть на цій прямій точку з абсцисою -2.
3. Дано рівняння сторін трикутника: $6x - 5y + 8 = 0$; $4x - 2y + 2 = 0$ і $x - 3y - 3 = 0$. Знайдіть рівняння його медіан.
4. На прямій $2x + 3y - 18 = 0$ знайдіть точку, яка лежить від осі в три рази далі, ніж від осі Ox.
5. Складіть рівняння прямої, яка перпендикулярна до даного вектора і проходить через точку перетину даних прямих:
   a) $\overline{n} = (-5\ \ 3)$, $2x + 3y - 17 = 0$; $x + y - 6 = 0$.
   b) $\overline{n} = (-2\ \ -6)$; $3x + y - 10 = 0$; $2x + y - 6 = 0$.

6. Кут між двома прямими. Пучок прямих, які проходять через дану точку. Нормальне рівняння прямої. Відстань від точки до прямої.

Кут φ між двома прямими, які задані загальними рівняннями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, обчислюється за формулою:

$$\cos(\varphi) = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Якщо прямі задані рівняннями $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$, то кут між прямими обчислюється за формулою $tg(\varphi) = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$.

Умова паралельності двох прямих: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$; $k_1 = k_2$.

Умова перпендикулярності двох прямих: $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$; $k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$.

Рівняння пучка прямих, які проходять через дану точку $M(x_0,\ y_0)$, має вигляд: $y - y_0 = k(x - x_0)$.

Нормальне рівняння прямої $x \cdot \cos(\varphi) + y \cdot \sin(\varphi) - p = 0$ одержуємо з загального рівняння $Ax + By + C = 0$, якщо останнє поділити на $\pm\sqrt{A^2 + B^2}$ і вибрати знак протилежний знаку C.

Відстань від точки $M(x_0,\ y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$ обчислюється за формулою: $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Зразки розв'язування задач.

Задача 1. Знайти гострий кут між прямими:

1) $y = 5x$ і $y = 2x$.

2) $3x - 2y - 12 = 0$ і $2x + 3y + 6 = 0$.

Розв'язання.

1) Кутові коефіцієнти даних прямих дорівнюють $\mathbf{5}$ і $\mathbf{2}$. Тангенс куту між прямими беремо за модулем: $tg(\varphi) = \left|\frac{2-5}{1+2\cdot 5}\right| = \frac{3}{11} = 0{,}2727$. Отже $\varphi \approx 15^0 15'$.

2) Косинус кута між прямими беремо за модулем:

$$\cos(\varphi) = \left|\frac{3\cdot 2 - 2\cdot 3}{\sqrt{3^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{2^2+3^2}}\right| = 0.$$ Отже $\varphi = 90^0$.

Задача 2. Дано трикутник з вершинами $A(-2,\ 1)$, $B(2,\ 5)$ і $C(-5,\ 3)$. Знайдіть внутрішні кути цього трикутника.

Розв'язання. Знаходимо кутові коефіцієнти сторін цього трикутника:

$$k_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5-1}{2-(-2)} = \frac{4}{4} = 1;\ k_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{3-5}{-5-2} = \frac{-2}{-7} = \frac{2}{7};$$

$$k_{CA} = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{1-3}{-2-(-5)} = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}.$$

Знайдемо кути трикутника:

$$tg(\hat{A}) = \frac{k_{AB} - k_{CA}}{1 + k_{AB}\cdot k_{CA}} = \frac{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}{1+1\left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{5}{3} : \frac{1}{3} = 5;\ tg(\hat{B}) = \frac{k_{BC} - k_{AB}}{1 + k_{BC}\cdot k_{AB}} = \frac{\frac{2}{7}-1}{1+\frac{2}{7}\cdot 1} = -\frac{5}{7} : \frac{9}{7} = -\frac{5}{9};$$

$$tg(\hat{C}) = \frac{k_{BC} - k_{CA}}{1 + k_{BC}\cdot k_{CA}} = \frac{\frac{2}{7}-\left(-\frac{2}{3}\right)}{1+\frac{2}{7}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{20}{21} : \frac{17}{21} = \frac{20}{17}.$$ Отже $\hat{A} = arctg(5)$; $\hat{B} = arctg\left(-\frac{5}{9}\right)$; $\hat{C} = arctg\left(\frac{20}{17}\right)$.

Задача 3. Які з прямих паралельні?

$2x - 3y + 4 = 0$; $10x - 15y - 7 = 0$; $25x - 20y - 8 = 0$; $2y = -3x + 2$.

Розв'язання. Паралельні прямі мають однакові кутові коефіцієнти. Знайдемо кутові коефіцієнти прямих: $k_1 = \frac{2}{3}$; $k_2 = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$; $k_3 = \frac{25}{20} = \frac{5}{4}$; $k_4 = -3$. Таким чином, $k_1 = k_2$, а це означає, що перша та друга прямі – паралельні.

Задача 4. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $M(-1,\ 2)$ паралельно прямій $3x + 4y - 12 = 0$.

Розв'язання. Знайдемо кутовий коефіцієнт даної прямої: $4y = -3x + 12$;

$$y = -\frac{3}{4}x + 3; \qquad k_1 = -\frac{3}{4}.$$

Оскільки дана і шукана прямі паралельні, то їх кутові коефіцієнти рівні, тобто $k_1 = k_2 = -\frac{3}{4}$. Шукана пряма проходить через точку $M(-1,\ 2)$ і має кутовий коефіцієнт $k_2 = -\frac{3}{4}$. Тоді її рівняння запишемо у вигляді: $y - 2 = -\frac{3}{4}\cdot(x+1)$, або $3x + 4y + 1 = 0$.

Задача 5. При якому значенні параметра k прямі $y = 3x + 4$ і $y = kx - 2$ перпендикулярні?

Розв'язання. Кутові коефіцієнти перпендикулярних прямих зв'язані між собою співвідношенням: $k_1 \cdot k_2 = -1$. Для даних прямих: $3k = -1$. Звідки, $k = -\frac{1}{3}$.

Задача 6. Перевірте, чи перпендикулярні прямі:

1) $3x + 4y + 1 = 0$ і $4x + 3y - 2 = 0$;
2) $y = 3x + 2$ і $y = \frac{x}{3} + 1$;
3) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ і $2x - 3y + 5 = 0$.

Розв'язання.

1) Перевіримо виконання умови $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$. Для даних прямих: $A_1 = 3$; $B_1 = -2$; $A_2 = 4$; $B_2 = 3$. Тоді $3\cdot 4 + (-2)\cdot 3 \neq 0$. Це означає, що прямі неперпендикулярні.

2) Якщо прямі задані рівняннями з кутовими коефіцієнтами, то умова перпендикулярності має вигляд: $k_2 = -\frac{1}{k_1}$. Кутові коефіцієнти даних прямих дорівнюють: $k_1 = 3; k_2 = \frac{1}{3}$. Умова перпендикулярності не виконується, отже, прямі неперпендикулярні.

3) Рівняння першої прямої запишемо у вигляді: $y=-\frac{3x}{2}+3$. Тоді $k_1=-\frac{3}{2}$. Друга пряма має кутовий коефіцієнт: $k_2=\frac{2}{3}$. Умова перпендикулярності виконується: $\frac{2}{3}=-\frac{1}{-\frac{3}{2}}$; $\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$. Прямі перпендикулярні.

Задача 7. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $M(2,\,-3)$ перпендикулярно до прямої $4x+5y-8=0$.

Розв'язання. Знайдемо кутовий коефіцієнт даної прямої: $k_1=-\frac{4}{5}$. Тоді кутовий коефіцієнт шуканої прямої $k_2=\frac{5}{4}$. Отже її рівняння має вигляд $y+3=\frac{5}{4}(x-2)$, або $5x-4y-22=0$.

Задача 8. Знайдіть відстань від точки $M(-2,\,4)$ до прямої $4x-3y-5=0$.

Розв'язання. Використовуючи формулу для обчислювання відстані від точки до прямої, дістанемо:

$$d=\frac{|4\cdot(-2)-3\cdot 4-5|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{25}{5}=5.$$

Задача 9. Знайдіть відстань між двома паралельними прямими $4x+3y-8=0$ і $4x+3y-33=0$.

Розв'язання. Знайдемо будь-яку точку на першій прямій. Якщо візьмемо $y=0$, то $4x-8=0$. Тоді $x=2$. Таким чином, точка $A(2,\,0)$ належить першій прямій. Отже, відстань від цієї точки до прямої $4x+3y-33=0$ обчислюється за формулою $d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Одержуємо $d=\frac{|4\cdot 2+3\cdot 0-33|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{25}{5}=5$.

Завдання для самостійної роботи.

1.Складіть рівняння прямих, які проходять через точку $M(-7,\,8)$ під кутом 45^0 до прямої $3x-5y+15=0$.

2.Знайдіть рівняння двох перпендикулярів до прямої $5x-4y-20=0$ у точках перетину її з осями координат.

3.Трикутник задано вершинами $A(-3,\,-2)$, $B(1,\,6)$ і $C(2,\,-5)$. Знайдіть: кути $\hat{B}$ і $\hat{C}$;рівняння висоти, яка проведена з вершини C; довжину перпендикуляра до сторони AB, який проходить через вершину C.

4. Дві протилежні вершини квадрата лежать у точках $A(-1,\,1)$ і$C(5,\,3)$.Складіть рівняння сторін і діагоналей цього квадрата.

7. Криві другого порядку: коло, еліпс.

Колом називається множина всіх точок площини, рівновіддалених від даної точки цієї площини, яка називається центром.

Рівняння кола з центром у початку координат і радіусом R має вигляд:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Рівняння кола з центом у точці $O(a;b)$ і радіусом R має вигляд:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

Рівняння кола у загальному вигляді записують так:

$$Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0,$$

де A, B, C, D - сталі коефіцієнти.

Еліпсом називається множина точок площини, сума відстаней яких до двох даних точок, що називаються фокусами, є величина стала, більша за відстань між фокусами.

Рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі Ox, має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b),$$

де a – довжина великої півосі; b – довжина малої півосі (ріс 7.1).

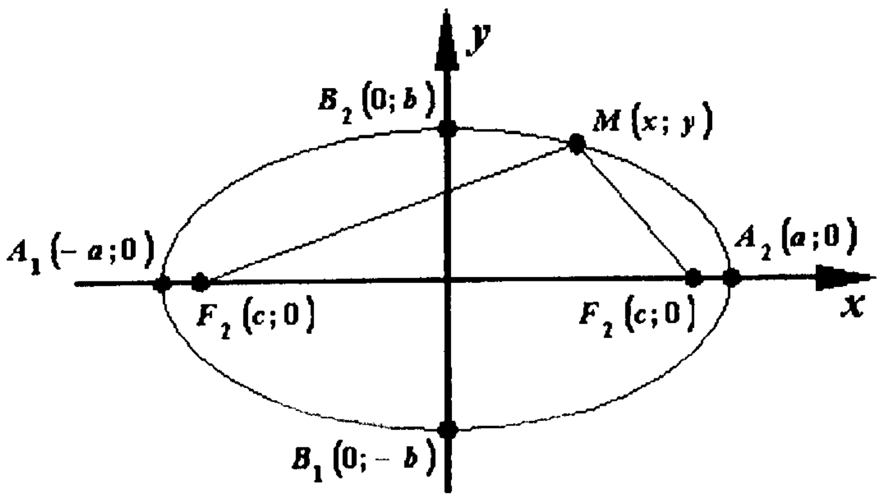


Рис. 7.1

Залежність між параметрами a,b,c виражається співвідношенням:

$$a^2 - b^2 = c^2.$$

Ексцентриситетом еліпса називається відношення фокусної відстані $2c$ до великої осі $2a$:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Якщо центр симетрії еліпса знаходиться у точці $C(x_0; y_0)$, а осі симетрії паралельні осям Ox, Oy, то рівняння еліпса має вигляд:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Зразки розв’язування задач.

Задача 1. Складіть рівняння кола з центром у точці ***M(2;-3)*** і з радіусом, що дорівнює ***2***. Побудуйте це коло.

Розв’язання. За умовою задачі маємо***: a=2, b=-3, R=2.*** Підставивши ці значення в рівняння кола, дістанемо:

$$(x-2)^2+(y-(-3))^2=4$$

або

$$(x-2)^2+(y+3)^2=4\,.$$

Будуємо центр кола, тобто точку ***M(2,-3).*** З центра ***M*** радіусом, який дорівнює ***2***, опишемо коло (рис.7.2).

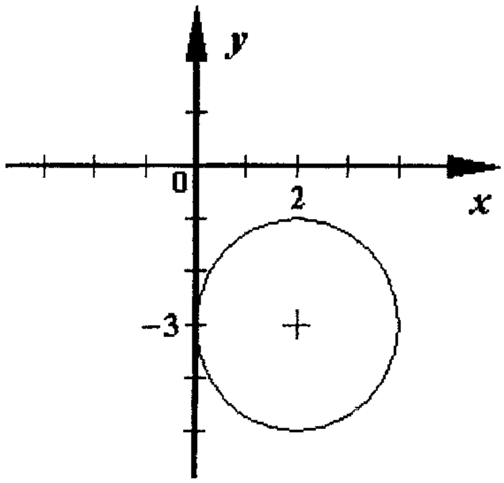


Рис. 7.2

Задача 2. Складіть рівняння кола, яке має центр в точці ***(5;-7)*** і проходить через точку ***(2;-3).***

Розв’язання. Знайдемо радіус кола як відстань від центра до його точки:

$$R=\sqrt{(2-5)^2+(-3-(-7))^2}=5\,.$$

В рівняння кола підставимо координати центра і знайдену величину радіуса:

$$(x-5)^2+(y+7)^2=25\,.$$

Задача 3. Знайдіть координати точок перетину кола $3x^2+3y^2-18x-10y-48=0$ з осями координат.

Розв’язання. Коло перетинається з віссю абсцис у точках, ординати яких дорівнюють нулю. Припустивши, що рівнянні кола ***y=0***, дістанемо:

$$3x^2-18x-48=0 \Rightarrow x^2-6x-16=0\,;$$

$$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-4(-16)}}{2}=\frac{6\pm10}{2}\,,\ x_1=8\ i\ x_2=-2\,.$$

Отже, коло перетинається з віссю абсцис у точках ***(-2; 0) і (8;0).***

Коло перетинається з віссю ординат у точках, абсциси яких дорівнюють нулю. Припустивши, що в рівнянні кола $x=0$, дістанемо:

$$3y^2-10y^2-48=0;$$

$$y_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{100-4(-48)\cdot 3}}{2\cdot 3}=\frac{10\pm 26}{6};\ x_1=8\ i\ x_2=-\frac{8}{3}.$$

Отже, коло перетинається з віссю ординат у точках $(0;-\frac{8}{3})$ *і (0;6).*

Задача 4. Складіть рівняння кола, яке проходить через точки $A(3;1)$, $B(-2;6)$, $C(-5;-3)$.

Розв'язання. Нехай точка $O_1(a;b)$ - центр шуканого кола, тоді $|O_1A|=|O_1B|=|O_1C|$, як радіуси того самого кола. Маємо:

$$|O_1A|=\sqrt{(a-3)^2+(b-1)^2},$$
$$|O_1B|=\sqrt{(a+2)^2+(b-6)^2},$$
$$|O_1C|=\sqrt{(a+5)^2+(b+3)^2}.$$

Складемо систему рівнянь відносно невідомих a і b та розв'яжемо її:

$$\begin{cases}\sqrt{(a-3)^2+(b-1)^2}=\sqrt{(a+2)^2+(b-6)^2};\\ \sqrt{(a-3)^2+(b-1)^2}=\sqrt{(a+5)^2+(b+3)^2};\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}a^2+b^2+9+1-6a-2b=a^2+b^2+4+36+4a-12b,\\ a^2+b^2+9+1-6a-2b=a^2+b^2+25+9+10a+6b;\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}a-b+3=0,\\ 2a+b+3=0;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a-b=-3,\\ 2a+b=-3;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3a=-6,\\ b=a+3;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-2,\\ b=1.\end{cases}$$

$O_1(-2;1)$.

Знаходимо $R=|O_1A|=\sqrt{(-2-3)^2+(1-1)^2}=5$.

Отже, шукане рівняння кола має вигляд:

$(x+2)^2+(y-1)^2=25$.

Задача 5. Знайдіть координати центра і радіус кола $x^2+y^2-8x-10y-8=0$.

Розв'язання. Перепишемо це рівняння у вигляді:

$x^2-8x+y^2-10y=8$.

Доповнивши двочлени x^2-8x і y^2-10y до повних квадратів, дістанемо:

$x^2 - 2\cdot 4x + 4^2 + y^2 - 2\cdot 5y + 5^2 = 8 + 4^2 + 5^2$ або $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 49$.

Звідки $a = 4$, $b = 5$, $R = 7$, тобто центр кола – точка ***(4;5)***, а радіус дорівнює ***7***.

Задача 6. Скласти рівняння еліпса з фокусами на осі ***Ox***, якщо велика ось дорівнює ***12***, а відстань між фокусами дорівнює ***8***.

Розв'язання. З умови впливає, що $a = 6$ і $c=4$. Знаходимо $b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 16 = 20$. Підставивши значення a і b в рівняння еліпса, дістанемо $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$.

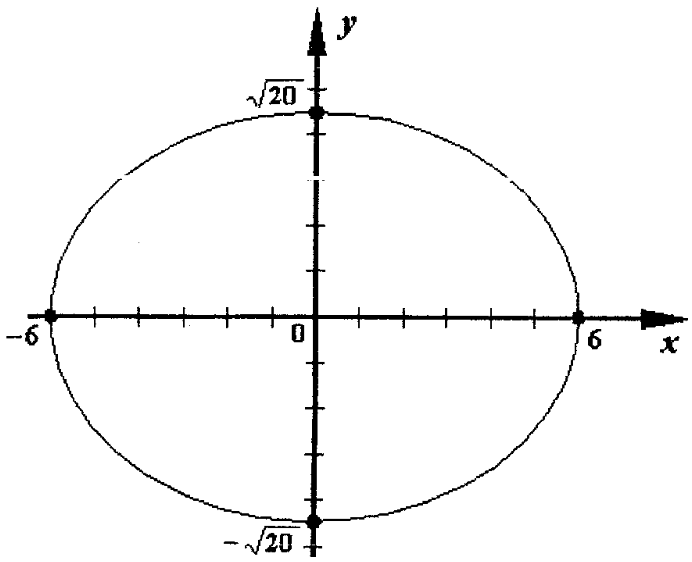


Рис. 7.3

Задача 7. Дано еліпс $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$. Знайти координати фокусів еліпса і відстань між ними.

Розв'язання. З рівняння еліпса маємо $a^2 = 100$ і $b^2 = 36$. Тоді $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{100 - 36} = 8$. Отже координати фокусів $F_1\,(-8;0)$ і $F_2\,(8;0)$, а відстань між ними $2c = 2\cdot 8 = 16$.

Задача 8. Скласти рівняння еліпса з фокусами на осі ***Ox***, якщо його велика вісь дорівнює ***14***, а ексцентриситет $\frac{2}{3}$.

Розв'язання. З умови маємо: $a = 7$, $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{2}{3}$. Підставивши в це співвідношення значення ***a***, дістанемо $c = \frac{14}{3}$.

Далі знаходимо $b^2 = 7^2 - \left(\frac{14}{3}\right)^2 = \frac{245}{9}$. Отже, шукане рівняння має вигляд:

$$\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{245/9} = 1 \text{ або } \frac{x^2}{49} + \frac{9y^2}{245} = 1.$$

Задача 9. Скласти рішення еліпса з фокусами на осі Ox, якщо він проходить через точки $A(\sqrt{3};\sqrt{6})$ і $B(3;\sqrt{2})$.

Розв'язання. Щоб скласти рівняння еліпса, треба знайти параметри a і b. Підставивши в рівняння еліпса координати даних точок, дістанемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{3}{a^2}+\dfrac{6}{b^2}=1, \\ \dfrac{9}{a^2}+\dfrac{2}{b^2}=1; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{a^2}=\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{6}{b^2}\right), \\ \dfrac{9}{3}\left(1-\dfrac{6}{b^2}\right)+\dfrac{2}{b^2}=1; \end{cases}$$

$$3-\frac{18}{b^2}+\frac{2}{b^2}=1; \quad \frac{16}{b^2}=2; \quad b^2=8;$$

$$\frac{1}{a^2}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{6}{8}\right); \quad \frac{1}{a^2}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}; \quad \frac{1}{a^2}=\frac{1}{12}; \quad a^2=12.$$

Отже, шукане рівняння має вигляд: $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{8}=1$.

Завдання для самостійної роботи.

1. Складіть рівняння еліпса з фокусами на осі Ox, якщо відстань між фокусами дорівнює ***12***, ексцентриситет $\varepsilon=\dfrac{2}{3}$.

2. Скласти рівняння еліпса з фокусами на осі Ox, якщо він проходить через точки ***A (6;4)*** і ***B (8;3).***

3. Знайдіть відстань між центрами кіл $x^2+y^2-10x+16y+80=0$ і $x^2+y^2+6x+4y-12=0$.

4. Знайдіть кут між прямими, які проходять через центр кола $x^2+y^2-4x-16y+32=0$ і через фокуси еліпса $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{20}=1$.

5. Складіть рівняння кола, яке проходить через точки ***A(-8;3)*** і ***B(2;-7),*** якщо центр його лежить на прямій $x+4y+16=0$.

8. Криві другого порядку: гіпербола, парабола.

I. Гіпербола

Гіперболою називається множина точок площини, абсолютна величина різниці відстаней яких до двох даних точок, що називається фокусами, є величина стала ***(2a),*** менша за відстань між фокусами ***(2c).***

Рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі на осі Ox, має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (8.1)$$

де $\boldsymbol{a}$ – довжина дійсної півосі; $\boldsymbol{b}$ – довжина уявної півосі (рис. 8.1).

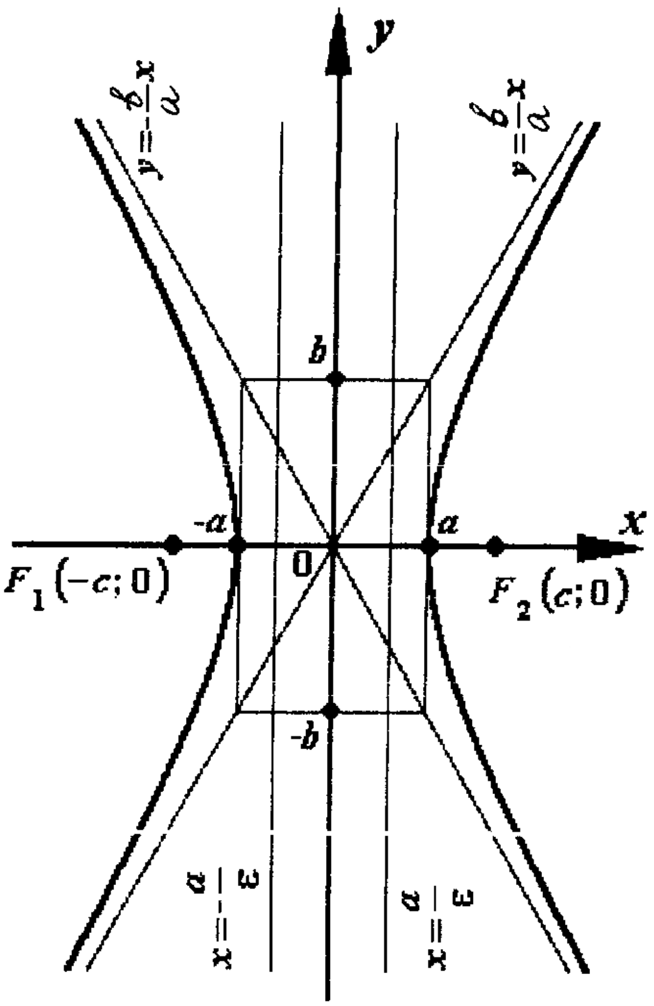


Рис. 8.1

Залежність між параметрами ***a, b, c*** виражається співвідношенням:

$$b^2=c^2-a^2.$$

Ексцентриситетом гіперболи називається відношення півфокусної відстані до її дійсної півосі:

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}>1.$$

Фокуси гіперболи знаходяться у точках $F_1\,(-c;0)$, $F_2\,(c;0)$.

Гіпербола має дві асимптоти, рівняння яких $y=\pm\frac{b}{a}x$, а також дві директриси, рівняння яких $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$.

Якщо дійсна та уявна півосі рівні ***(a=b),*** то гіпербола називається рівносторонньою. Рівняння рівносторонньої гіперболи має вигляд:

$$x^2-y^2=a^2,$$

а рівняння її асимптот $y = \pm x$.

Якщо фокуси гіперболи лежать на осі ***Oy*** у точках $F_1\ (0;-c)$, $F_2\ (0;c)$, то її рівняння має вигляд:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1. \tag{8.2}$$

Рівняння асимптот такої гіперболи $y = \pm\frac{b}{a}x$, а рівняння директрис $y = \pm\frac{b}{\varepsilon}$ (рис. 8.2).

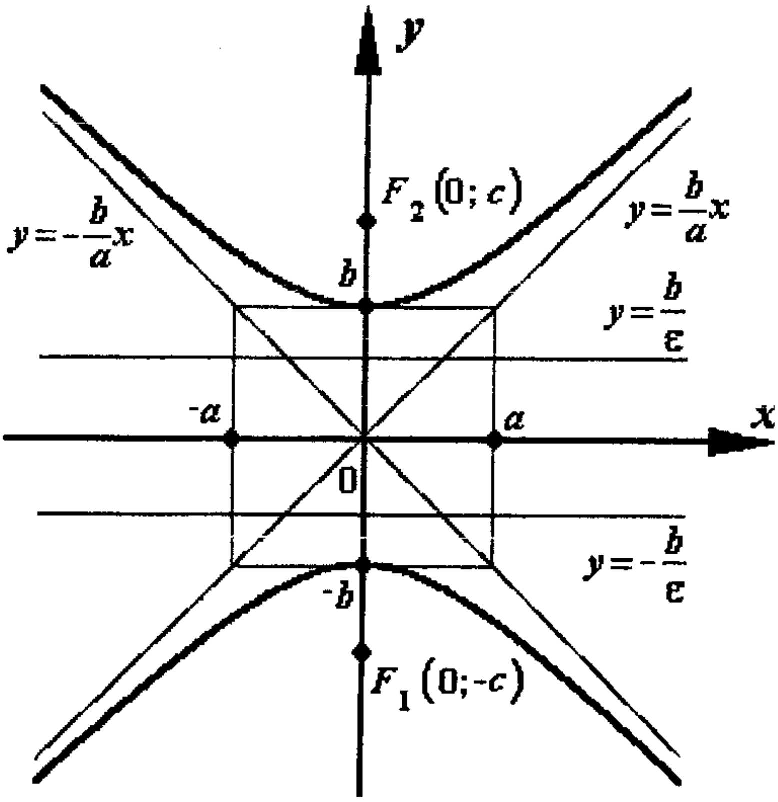


Рис. 8.2

Гіперболи (8.1) і (8.2) називається спряженими.

Рівняння рівносторонньої гіперболи з фокусами на осі ***Oy*** має вигляд:

$$y^2 - x^2 = a^2.$$

Якщо центр симетрії гіперболи знаходиться у точці $C(x_0;y_0)$, а осі симетрії паралельні осям ***Ox, Oy***, то рівняння гіперболи має вигляд:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1; \tag{8.1*'}$$

$$\frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(x-x_0)^2}{a^2} = 1. \tag{8.2*}$$

ІІ.Парабола

Параболою називають множину точок на площині, рівновіддалених від даної точки, яка називається фокусом і від даної прямої, яка називається директрисою.

Рівняння параболи з вершиною в початку координат, віссю симетрії якої є вісь Ox, має вигляд:

$$y^2 = 2px, \tag{8.3}$$

де p – параметр параболи.

Якщо $p > 0$, то вітки параболи напрямлені вправо, якщо $p < 0$, то вітки напрямлені вліво (рис. 8.3).

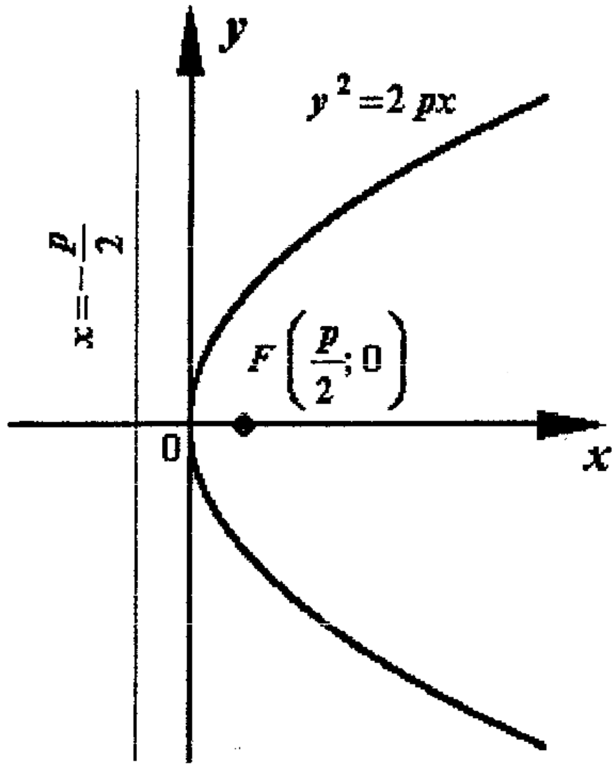


Рис. 8.3

Фокус параболи знаходиться у точці $F\left(\frac{p}{2};0\right)$. Рівняння директриси $x = -\frac{p}{2}$.

Рівняння параболи з вершиною в початку координат, віссю симетрії якої є вісь Oy, має вигляд:

$$x^2 = 2py. \tag{8.4}$$

Якщо $p > 0$, то вітки направлені вгору, якщо $p < 0$, то вітки направлені вниз (рис. 8.4). Фокус такої параболи є точка $F\left(0;\frac{p}{2}\right)$, рівняння директриси $y = -\frac{p}{2}$.

Якщо вершина параболи – у точці $C(x_0;y_0)$, а вісь симетрії паралельна осі Oy, то рівняння має вигляд:

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0). \tag{8.4*'}$$

Фокус цієї параболи $F\left(x_0; y_0+\frac{p}{2}\right)$, рівняння директриси $y=y_0-\frac{p}{2}$.

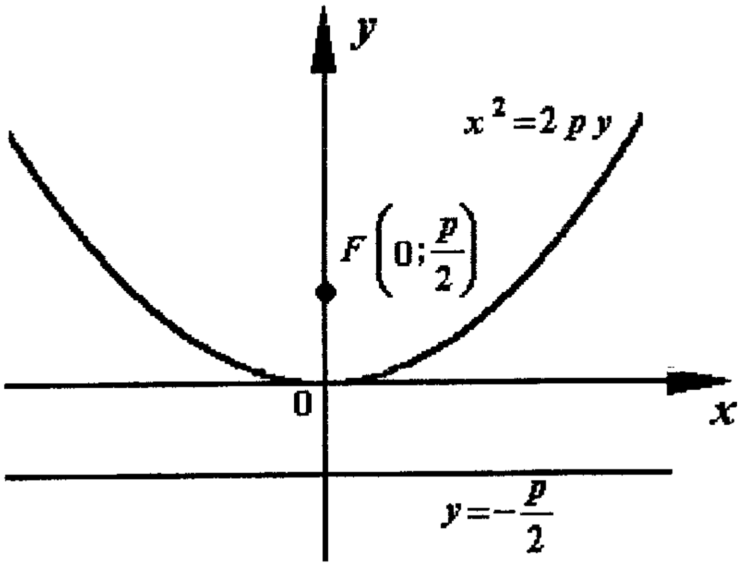


Рис. 8.4

Якщо вершина параболи знаходиться у точці $C(x_0;y_0)$, а вісь симетрії паралельна осі Ox, то рівняння параболи має вигляд:

$$(y-y_0)^2=2p(x-x_0). \qquad (8.3^{*'})$$

Фокус такої параболи $F\left(x_0+\frac{p}{2}; y_0\right)$, рівняння директриси $x=x_0-\frac{p}{2}$.

Зразки розв'язування задач.

Задача 1. Побудувати гіперболу $9x^2-16y^2-144=0$. Знайти фокуси, ексцентриситет, рівняння асимптот та директрис.

Розв'язання. Приведемо рівняння кривої до виду (8.1):

$$9x^2-16y^2=144 \quad :144$$

$$\frac{9x^2}{144}-\frac{16y^2}{144}=1;$$

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1.$$

Таким чином

$$a^2=16,\ b^2=9;$$

$a=4$, $b=3$ - півосі гіперболи.

Знайдемо відстань фокусів від центра симетрії:

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5.$$

Фокуси гіперболи $F_1(-5;0)$, $F_2(5;0)$.

Ексцентриситет $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{5}{4}>1$.

Рівняння асимптот $y=\pm\frac{3}{4}x$.

Рівняння директрис $x = \pm\frac{4}{\left(\frac{5}{4}\right)}$; $x = \pm\frac{16}{5}$.

Побудуємо параболу.

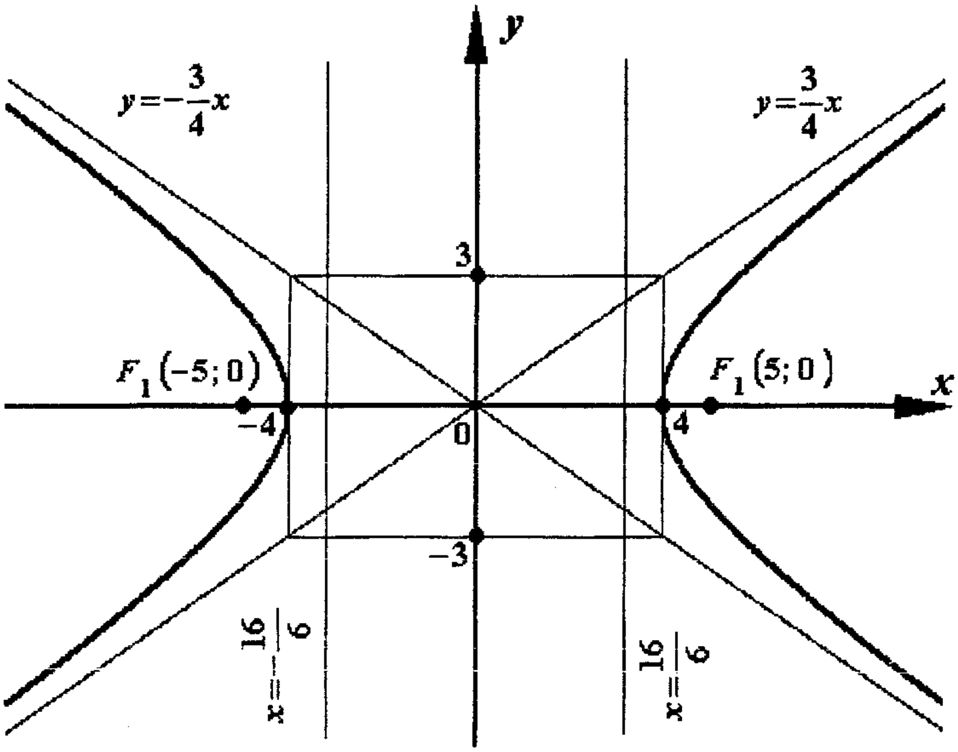


Рис. 8.5

Задача 2. Скласти рівняння гіперболи з фокусами на осі $\boldsymbol{Ox}$, якщо її дійсна вісь дорівнює *24*, а відстань між фокусами дорівнює $8\sqrt{34}$.

Розв'язання. Для складання рівняння гіперболи треба знайти параметри $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$. З умови маємо:

$$2a = 24, \quad 2c = 8\sqrt{34}.$$

Знайдемо $\boldsymbol{a}$ *,c* і $\boldsymbol{b}$:

$$a = 12, c = 4\sqrt{34}, \; b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{544 - 144} = 20.$$

Підставивши a^2 і b^2 в рівняння $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, дістанемо $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{400} = 1$.

Задача 3. Скласти рівняння гіперболи за координатами її фокусів $(-20;0)$, $(20;0)$ і ексцентриситетом $\varepsilon = \frac{4}{3}$.

Розв'язання. З умови маємо: *c=20,* $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{4}{3}$. Підставивши у цю рівність *c* , дістанемо: $\frac{20}{a} = \frac{3}{4}$, тобто $a = \frac{20 \cdot 3}{4} = 15$. Далі знайдемо

$b=\sqrt{c^2-a^2}=\ \sqrt{400-225}=\sqrt{175}=5\sqrt{7}$. Підставивши a^2 і b^2 в рівняння (8.1), дістанемо $\frac{x^2}{225}-\frac{y^2}{175}=1$.

Задача 4. Скласти рівняння гіперболи з фокусами на осі ***Ox***, якщо довжина її дійсної осі дорівнює ***16***, і гіпербола проходить через точку ***(-10;-3).***

Розв'язання. За умовою ***2a=16***, тобто ***a=8***. Підставивши в рівняння (8.1) значення **a=8** і координати даної точки, дістанемо:

$$\frac{(-10)^2}{8^2}-\frac{(-3)^2}{b^2}=1;$$

$$\frac{100}{64}-\frac{9}{b^2}=1; \quad \frac{9}{b^2}=\frac{25}{16}-1=\frac{9}{16}; \qquad b^2=16.$$

Підставивши a^2 і b^2 в рівняння (8.1), отримаємо $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{16}=1$.

Задача 5. Скласти рівняння гіперболи за рівнянням її асимптот $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}x$ і координатами точки, через яку вона проходить $\left(4\sqrt{3};3\sqrt{3}\right)$.

Розв'язання. Рівняння асимптот гіперболи $y=\pm\frac{b}{a}x$. За умовою $\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Підставимо в рівняння (8.1) координати точки і розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases}\frac{(4\sqrt{3})^2}{a^2}-\frac{(3\sqrt{3})^2}{b^2}=1,\\ \frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2};\end{cases} \qquad \begin{cases}\frac{48}{a^2}-\frac{27}{b^2}=1,\\ 2b=\sqrt{3a};\end{cases}$$

$$\frac{48}{a^2}-\frac{27}{\left(\frac{\sqrt{3a}}{2}\right)^2}=1; \qquad \frac{48}{a^2}-\frac{36}{a^2}=1; \quad a^2=12; \;\; a=\sqrt{12}; \quad b=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}}{2}=3.$$

Рівняння гіперболи $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{9}=1$.

Задача 6. Скласти рівняння параболи з вершиною у початку координат, якщо її фокус лежить у точці F (1;0).

Розв'язання. Фокус лежить на осі ***Ox,*** тобто рівняння параболи має вигляд (8.3) $y^2=2px$. Оскільки координати фокуса $F\left(\frac{p}{2};0\right)$, то $\frac{p}{2}=1,\ p=2$. Підставивши значення ***p*** в рівняння (8.3), дістанемо $y^2=4x$.

Задача 7. Скласти рівняння параболи з вершиною у початку координат, яка симетрична відносно осі ***Oy*** і проходить через точку ***A (-2;-4).***

Розв'язання. Шукана парабола симетрична відносно осі ***Oy***, отже її рівняння має вигляд $x^2 = 2py$. Підставивши в це рівняння координати точки ***A***, знайдемо ***p***:

$$(-2)^2 = 2p \cdot (-4);$$
$$4 = -8p;$$
$$p = -\frac{1}{2}.$$

Після підстановки значення ***p*** в рівняння параболи дістанемо $x^2 = -y$.

Задача 8. За даним рівнянням параболи $y^2 = -8x$ обчислити координати її фокуса, одержати рівняння директриси. Побудувати.

Розв'язання. З рівняння параболи $y^2 = -8x$ маємо $2p = -8$, $\frac{p}{2} = -2$.

Парабола симетрична відносно осі ***Ox***, її фокус лежить на осі симетрії і має координати $F\left(\frac{p}{2};0\right)$, тобто $F(-2;\,0)$. Рівняння директриси $x = -\frac{p}{2}$, тобто ***x=2***.

Шукана парабола симетрична відносно осі ***Ox***, її вітки напрямлені вліво. Знайдемо точку, що лежить на параболі. Нехай ***x=2***, $y^2 = -8 \cdot (-2) = 16$, $y = \pm 4$.

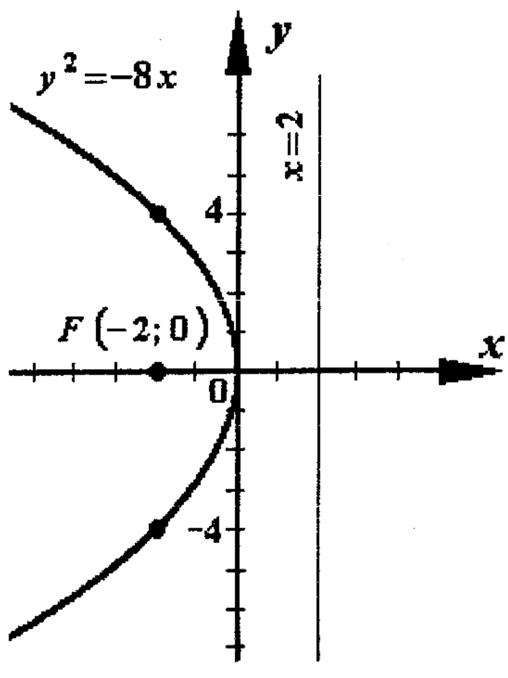


Рис. 8.6

Задача 9. Побудувати параболу $x^2 - 6x + 2y + 7 = 0$. Знайти координати фокуса та рівняння директриси.

Розв'язання. Знайдемо вершину параболи, перетворивши рівняння $x^2 - 6x + 2y + 7 = 0$ до вигляду $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$.

$x^2 - 6x = -2y - 7$; $(x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2) - 3^2 = -2y - 7$;

$(x-3)^2 = -2y - 7 + 9$; $(x-3)^2 = -2(y-1)$.

З цього рівняння ***x_0=3, y_0=1, C (3;1)*** – вершина параболи.

Знайдемо точки перетину параболи з осями ***Ox*** і ***Oy***:

$y = 0$; $x^2 - 6x + 7 = 0$; $x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-28}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 3 \pm \sqrt{2}$;

$x = 0$; $2y + 7 = 0$; $y = -3{,}5$.

Знайдемо координати фокуса. З рівняння $(x-3)^2 = -2(y-1)$ маємо: $2p = -2$, $\frac{p}{2} = -\frac{1}{2} = -0{,}5$. Координати фокуса $F\left(x_0; y_0 + \frac{p}{2}\right)$, тобто $F(3;1-0{,}5)$, $F(3;\ 0{,}5)$.

Рівняння директриси: $y = y_0 - \frac{p}{2}$, тобто $y = 1 + 0{,}5$; $y = 1{,}5$.

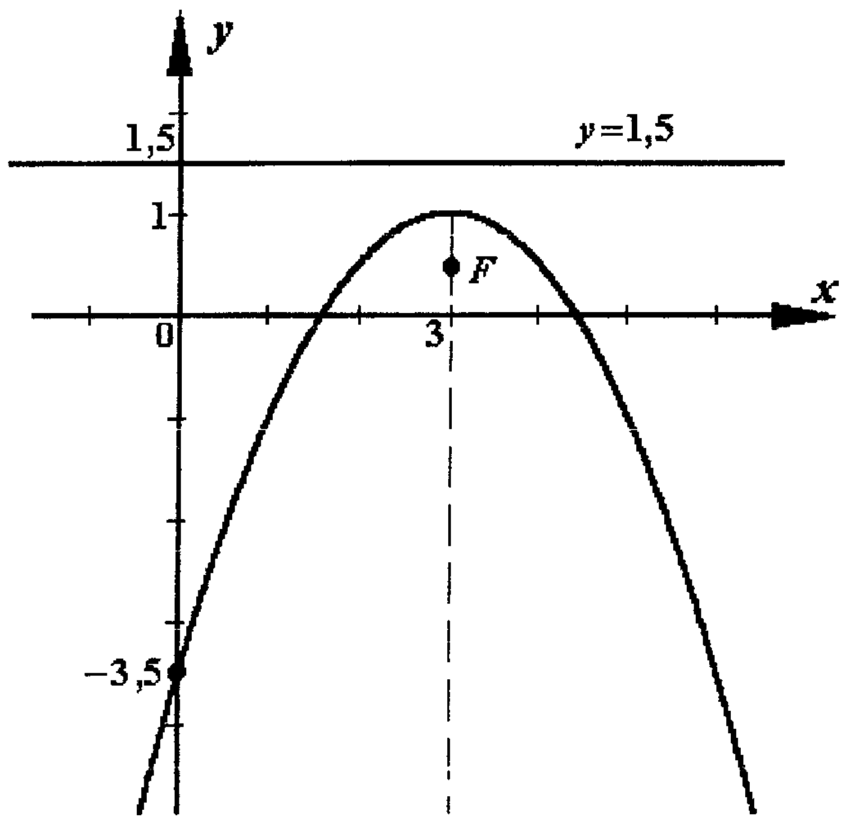


Рис. 8.4

Задача 10. Побудувати параболу $y^2 + 4y - 3x + 4 = 0$. Знайти координати фокуса та рівняння директриси.

Розв'язання. Знайдемо координати вершини:

$y^2 + 4y + 4 = 3x$;

$(y+2)^2 = 3(x-0)$.

Вершина параболи лежить у точці ***C (0;-2)***. Вітки параболи напрямлені вправо $(2p = 3,\ p = 1{,}5 > 0)$.

Знайдемо точку перетину параболи з віссю ***Ox***:

$$y = 0, \qquad -3x + 4 = 0, \qquad x = \frac{4}{3}.$$

Координати фокуса $F\left(x_0 + \frac{p}{2}; y_0\right)$, тобто $F\left(0 + \frac{3}{4}; -2\right)$, $F\left(\frac{3}{4}; -2\right)$.

Рівняння директриси: $x = x_0 - \frac{p}{2}$, тобто $x = -\frac{3}{4}$.

Побудуємо параболу.

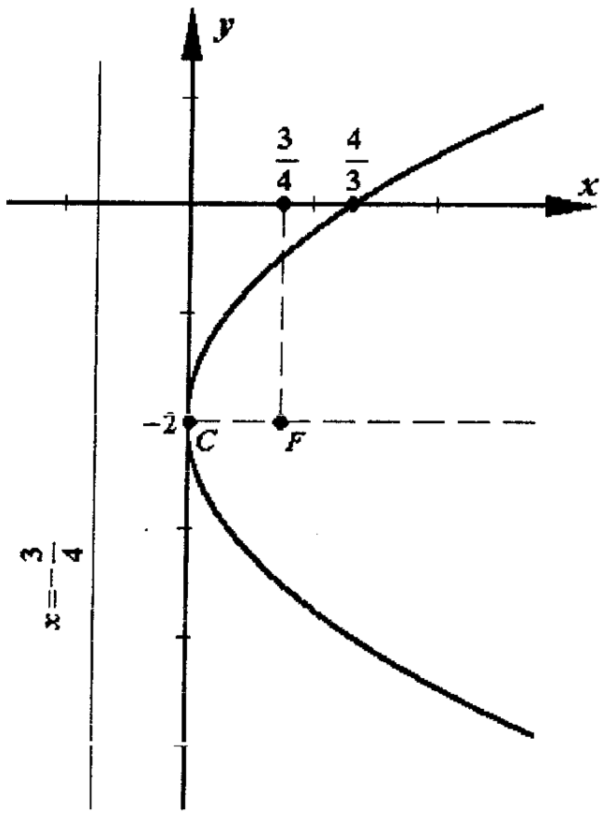


Рис. 8.4

Завдання для самостійної роботи.

Задача 1. Скласти рівняння гіперболи з фокусами на осі ***Ox***, якщо довжина її уявної осі дорівнює ***12***, і гіпербола проходить через точку ***(20;8).***

Задача 2. Побудувати гіперболу $4x^2 - y^2 - 16 = 0$. Знайти фокуси, ексцентриситет, рівняння асимптот та директрис.

Задача 3. Скласти рівняння гіперболи, якщо відстань між фокусами дорівнює ***10***, а рівняння асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$.

Задача 4 Скласти рівняння параболи з вершиною у початку координат, яка симетрична відносно осі ***Ox*** і проходить через точку ***(5;-3).*** Знайти координати фокуса, рівняння директриси. Побудувати.

Задача 5 Побудувати параболу $x^2 - 2x + y + 8 = 0$. Знайти координати фокуса та рівняння директриси.

9. Рівняння площини в просторі.

Рівняння площини, що проходить через дану точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ в заданому напрямі $\vec{n} = (A, B, C)$ має вигляд:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (9.1)$$

Рівняння

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (9.2)$$

називається ***загальним рівнянням*** площини, якщо коефіцієнт A, B, C одночасно не дорівнюють нулю.

Ненульовий вектор $\vec{n} = (A, B, C)$, перпендикулярний до площини, називається ***нормальним вектором площини***.

Розглянемо окремі випадки загального рівняння площини.

1. Нехай $D=0$. Тоді рівняння площини має вигляд $Ax + By + Cz = 0$ і площина проходить через початок координат.

2. Нехай $C = 0$. Тоді рівняння площини має вигляд $Ax + By + D = 0$ і площина паралельна осі Oz. Аналогічно при $A=0$ і $B = 0$ дістанемо площини $By + Cz + D = 0$ і $Ax + Cz + D = 0$, паралельні відповідно осям Ox і Oy.

3. Нехай $C = D = 0$. Тоді рівняння площини має вигляд $Ax + By = 0$ і площина проходить через початок координат і паралельна осі Oz. Аналогічно при $A = D = 0$ і $B = D = 0$ дістанемо площини $By + Cz = 0$ і $Ax + Cz = 0$, які проходять відповідно через осі Ox і Oy.

4. Нехай $B = C = 0$. Тоді рівняння площини має вигляд $Ax + D = 0$ і площина паралельна осям Oy і Oz, тобто перпендикулярна до осі Ox. Аналогічно при $A = B = 0$ і $A=C=0$ дістанемо площини $Cz + D = 0$ і $By + D = 0$, які перпендикулярні відповідно до осей Oz і Oy.

5. Нехай $B=C=D=0$. Тоді рівняння площини має вигляд $Ax = 0$, тобто $x=0$; площина збігається з площиною Oyz.

Аналогічно при $A=B=D=0$ і $A=C=D=0$ дістанемо площини $z=0$ і $y=0$, які збігаються відповідно з координатними площинами Oxy і Oxz.

Кут між двома площинами, які перетинаються, $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ дорівнює куту між її нормальними векторами $\vec{n_1} = (A_1, B_1, C_1)$ і $\vec{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$ і обчислюється за формулою:

$$\cos\varphi = \pm \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (9.3)$$

Щоб дві площини були паралельні, їх нормальні вектори $\vec{n_1}$ і $\vec{n_2}$ повинні бути колінеарні, тобто

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Щоб площини були перпендикулярні, їх нормальні вектори $\bar{\mathbf{n}}_1$ і $\bar{\mathbf{n}}_2$ також повинні бути перпендикулярні, тобто

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0.$$

Відстань від точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до площини $Ax+By+Cz+D=0$ обчислюється за формулою:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{9.4}$$

Зразки розв'язування задач.

Задача 1. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $K(2;0;-1)$ і перпендикулярна до осі Ox.

Розв'язання. Рівняння площини, перпендикулярної до осі Ox, має вигляд $Ax+D=0$. Підставивши в це рівняння координати точки K, знаходимо $2A+D=0$, тобто $D=-2A$. Підставивши тепер значення D в рівняння $Ax+D=0$, дістанемо $Ax-2A=0$, тобто $x-2=0$.

Задача 2. Скласти рівняння площини, яка проходить через вісь Oz і через точку $M(2;-5;4)$.

Розв'язання. Рівняння шуканої площини має вигляд $Ax+By=0$. Підставивши в це рівняння координати точки M, дістанемо $2A-5B=0$, тобто $B=\frac{2}{5}A$. Підставивши тепер значення B в рівняння $Ax+By=0$, знаходимо $Ax+\frac{2}{5}A\cdot y=0$, тобто $x+\frac{2}{5}y=0$ або $5x+2y=0$.

Задача 3. Скласти рівняння площини, яка паралельна осі Ox і проходить через точки $M_1(3;-1;2)$ і $M_2(-2;3;4)$.

Розв'язання. Оскільки шукана площина паралельна осі Ox і проходить через точки $M_1(3;-1;2)$ і $M_2(-2;3;4)$, то за її нормальний вектор $\overline{n}=(A,B,C)$ можна взяти вектор перпендикулярний до векторів $\overline{M_1M_2}=(-5;4;2)$ і $\overline{n}=(1;0;0)$ (одиничний вектор на осі Ox). З другого боку, відомо, що векторний добуток двох векторів є вектор, перпендикулярний до векторів співмножників, тому за $\overline{n}$ можна взяти векторний добуток $\overline{M_1M_2}$ і $\overline{n}$.

$$\overline{n}=\overline{M_1M_2}\times\overline{n_1}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ -5 & 4 & 2\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=\overline{i}\begin{vmatrix}4 & 2\\ 0 & 0\end{vmatrix}-\overline{j}\begin{vmatrix}-5 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix}+\overline{k}\begin{vmatrix}-5 & 4\\ 1 & 0\end{vmatrix}=2\overline{j}-4\overline{k}.$$

Скористаємось рівнянням площини, яка проходить через дану точку $M_2(-2;3;4)$ перпендикулярно до вектора $\overline{n}=(0;2;-4)$. Маємо:

$2(y-3)-4(z-4)=0$ або $y-2z+5=0$.

Задача 4. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(4;-3;1)$ і паралельна до площини $3x+2y-4z+12=0$.

Розв'язання. Оскільки шукана площина паралельна площині $3x+2y-4z+12=0$, то за її нормальний вектор можна взяти вектор $\overline{n}=(3;2;-4)$.

Використавши тепер рівняння площини, що проходить через дану точку в заданому напрямі, дістанемо:

$3(x-4)+2(y+3)-4(z-1)=0$ або $3x+2y-4z-2=0$.

Задача 5. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(2;-4;1)$ і $M_2(-3;5;7)$ і перпендикулярна до площини $3x+4y-7z+2=0$.

Розв'язання. За нормальний вектор $\bar{n}$ шуканої площини візьмемо векторний добуток векторів $\overline{M_1M_2}=(-5;9;6)$ і $\bar{n}=(3;4;-7)$:

$$\bar{n}=\overline{M_1M_2}\times\bar{n}_1=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -5 & 9 & 6\\ 3 & 4 & -7\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}9 & 6\\ 4 & -7\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}-5 & 6\\ 3 & -7\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}-5 & 9\\ 3 & 4\end{vmatrix}=$$

$$=-87\bar{i}-17\bar{j}-47\bar{k}$$

Скористаємось рівнянням площини, яка проходить через дану точку $M_1(2;-4;1)$ перпендикулярно до вектора $\bar{n}=(-87;-17;-47)$:

$-87(x-4)-17(y+3)-47(z-1)=0$ або $87x+17y+47z-153=0$.

Задача 6. Знайти гострий кут між площинами $2x-3y+4z-1=0$ і $3x-4y-z+3=0$.

Розв'язання. Щоб обчислити гострий кут φ між площинами, скористаємось формулою (9.3), причому праву частину рівності беремо за абсолютною величиною, бо $\cos\varphi>0$. Маємо:

$A_1=2,\ \ B_1=-3,\ \ C_2=4$ і

$A_2=3,\ \ B_2=-4,\ \ C_2=-1$.

Отже $\cos\varphi=\left|\dfrac{2\cdot3+(-3)\cdot(-4)+4\cdot(-1)}{\sqrt{2^2+(-3)^2+4^2}\cdot\sqrt{3^2+(-4)^2+(-1)^2}}\right|=\dfrac{14}{\sqrt{29}\sqrt{26}}=0,5098$.

Тоді, використовуючи таблиці Брадіса, маємо $\varphi=59^0 21'$.

Задача 7. Знайти відстань від точки $A(-5;2;-1)$ до площини $2x+2y-3z-5=0$.

Розв'язання. Відстань від точки до площини знаходиться за формулою (9.4). Маємо:

$$d=\frac{|2\cdot(-5)+2\cdot2-3\cdot(-1)-5|}{\sqrt{2^2+2^2+(-3)^2}}=\frac{8}{\sqrt{17}}\approx1,94\ \ (\text{од.}).$$

Задача 8. Знайти відстань між паралельними площинами $2x-3y+z-2=0$ і $4x-6y+2z+7=0$.

Розв'язання. Щоб знайти шукану відстань, треба визначити точку, яка належить одній з двох даних площин. Розглянемо площину $4x-6y+2z+7=0$. Якщо $x=0$, $y=0$, то $z=-3,5$, тобто точка $A(0;0;-3,5)$ належить площині. Тоді треба знайти відстань від точки A до площини $2x-3y+z-2=0$. За формулою (9.4) маємо:

$$d=\frac{|2\cdot 0-3\cdot 0-3{,}5-2|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}}=\frac{5{,}5}{\sqrt{14}}\approx 1{,}47 \ (од.).$$

Задача 9. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки ***A(1;2;-3), B(3;-1;2)*** і ***C(5;-3;4)***.

Розв'язання. Нехай точка ***M(x;y;z)*** належить до шуканої площини. Складемо три вектори, які будуть виходити з точки ***A***: $\overline{AM}, \overline{AB}, \overline{AC}$.

$$\overline{AM}=(x-1;\,y-2;\,z+3);\ \ \overline{AB}=(2;-3;5);\ \ \overline{AC}=(4;-5;7).$$

Так як вектори належать одній площині, то вони компланарні. За умовою компланарності $\overline{AM}\ \overline{AB}\ \overline{AC}=0$, маємо:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+3 \\ 2 & -3 & 5 \\ 4 & -5 & 7 \end{vmatrix}=0;$$

$$(x-1)\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -5 & 7 \end{vmatrix}-(y-1)\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}+(z+3)\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}=0.$$

Тобто ***2x+3y+z-5=0*** є рівнянням шуканої площини.

Завдання для самостійної роботи.

Задача 1. Складіть рівняння площини, яка проходить через точку ***M(-2;3;1)*** і вісь ***Oz***.

Задача 2. Складіть рівняння площини, яка проходить через точки ***A(2;1;-2***), і ***B(3;0;4)*** і перпендикулярна до площини ***x+2y-z=0.***

Задача 3. Обчисліть кут між площинами ***2x-3y+5z-2=0*** і ***x-y+z=0.***

Задача 4. Знайти відстань між паралельними площинами ***2 x-3y+z-4=0*** і ***4x-6y+2z+10=0.***

Задача 5. Складіть рівняння площини, яка проходить через точку ***M(1;-3;2)*** паралельно двом векторам: $\bar{\mathbf{a}}=2\bar{\mathbf{i}}-\bar{\mathbf{j}}+\bar{\mathbf{k}}$ і $\bar{\mathbf{b}}=5\bar{\mathbf{i}}+2\bar{\mathbf{j}}-\bar{\mathbf{k}}$.

10. Пряма в просторі. Площина і пряма.

Пряму в просторі можна розглядати як лінію перетину двох площин, тобто пряма визначається системою двох лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$$

(10.1)

Рівняння (10.1) називається загальним рівнянням прямої.

Канонічне рівняння прямої має вигляд:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}, \qquad (10.2)$$

де $\bar{l}=(m,n,p)$ - **напрямний вектор** прямої; $M_0(x_0;y_0;z_0)$ – точка, яка належить прямій.

Якщо в (10.2) ввести $t=\frac{x-x_0}{m}$, то дістанемо **параметричне рівняння** прямої:

$$x=x_0+mt;\ \ y=y_0+nt;\ \ z=z_0-pt.$$
(10.3)

Якщо пряма проходить через дві точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ і $M_2(x_2;y_2;z_2)$, її рівняння має вигляд:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (10.4)$$

Кут між двома прямими $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ і $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$ обчислюється за формулою:

$$\cos\varphi=\pm\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$
(10.5)

Тоді **умова паралельності** двох прямих має вигляд:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_2}{p_2}. \qquad (10.6)$$

А **умова перпендикулярності** – у вигляді:

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0. \qquad (10.7)$$

Кут між прямою $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ **і площиною** $Ax+By+Cz+D=0$ обчислюється за формулою:

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \qquad (10.8)$$

Умова паралельності прямої і площини записується у вигляді:

$$Am+Bn+Cp=0. \qquad (10.9)$$

А умова перпендикулярності – у вигляді:

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}. \qquad (10.10)$$

Рівняння пучка площин, які проходять через пряму

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$

має вигляд:

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 + \lambda(A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2) = 0, \qquad (10.11)$$

де λ – будь-яке дійсне число.

Зразки розв’язування задач

Задача 1. Скласти рівняння прямої, яка паралельна вектору $\bar{l} = (2;3;1)$ і проходить через точку $M(-1;4;-2)$.

Розв’язання. Використовуючи канонічне рівняння прямої (10.2), маємо:

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z+2}{1}.$$

Якщо ці рівняння записати у вигляді системи, то дістанемо загальне рівняння прямої:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-4}{3}, \\ \dfrac{y-4}{3} = \dfrac{z+2}{1}; \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 3x - 2y + 11 = 0, \\ y - 3z - 10 = 0. \end{cases}$$

Задача 2. Скласти рівняння прямої, яка паралельна осі Oy і проходить через точку $M(2;-1;1)$.

Розв’язання. Напрямний вектор $\bar{l}$ прямої колінеарний осі Oy, отже його проекції на осях Ox і Oz дорівнюють нулю. Візьмемо $|\bar{l}| = \mathbf{1}$ і виберемо напрям такий, що збігається з додатним напрямом осі Oy, тоді $\bar{l} = (0;1;0)$. Складемо канонічне рівняння прямої: $\frac{x-2}{0} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{0}$.

Загальні рівняння шуканої прямої мають вигляд:

$$\begin{cases} x - 2 = 0, \\ z - 1 = 0. \end{cases}$$

Задача 3. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(2;-3;-1)$ і паралельна прямій $\frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z+3}{-3}$.

Розв’язання. Оскільки шукана пряма паралельна даній, то за її напрямний вектор можна взяти напрямний вектор $\bar{l} = (2;4;-3)$ даної прямої. Використавши тепер рівності (10.2), дістанемо канонічне рівняння шуканої прямої:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z+1}{-3}.$$

Задача 4. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точки *A(-3;2;4)* і *B(7;-3;2).*

Розв'язання. За формулою (10.4) маємо:

$$\frac{x+3}{7+3}=\frac{y-2}{-3-2}=\frac{z-4}{2-4} \text{ або } \frac{x+3}{10}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z-4}{-2}.$$

Задача 5. Довести, що прямі $\frac{x-2}{-2}=\frac{y+6}{3}=\frac{z-1}{-4}$ і $\frac{x+3}{5}=\frac{y-2}{6}=\frac{z+1}{2}$ взаємно перпендикулярні.

Розв'язання. Припустивши в рівності (10.7) $m_1=-2,\ n_1=3,\ p_1=-4$ і $m_2=5,\ n_2=6,\ p_2=2$, маємо: $-2\cdot5+3\cdot6+(-4)\cdot2=0.$

Задача 6. Обчислити гострий кут між двома прямими $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{2}$ і $\frac{x+1}{12}=\frac{y-4}{3}=\frac{z+2}{4}$.

Розв'язання. Припустивши в рівності (10.5) $m_1=2,\ n_1=1,\ p_1=2$ і $m_2=12,\ n_2=3,\ p_2=4$, знаходимо:

$$\cos\varphi=\frac{2\cdot12+1\cdot3+2\cdot4}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=0{,}8974,\ \varphi=26^0 11'.$$

Задача 7. Обчислити кут між прямою $\frac{x+3}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+4}{-3}$ і площиною $3x+4y+2z-5=0$.

Розв'язання. Скористаємось формулою (10.8). Оскільки $A=3,\ B=4,\ C=2,\ m=1,\ n=2,\ p=-3$, то

$$\sin\varphi=\frac{|3\cdot1+4\cdot2+2\cdot(-3)|}{\sqrt{3^2+4^2+2^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}}=0{,}2482,\ \varphi=14^0 22'.$$

Задача 8. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку *A(-2;-3;1)* перпендикулярно до прямої $\frac{x-2}{2}=\frac{y+2}{4}=\frac{z+3}{-3}$.

Розв'язання. Відомо, що за нормальний вектор $\bar{n}$ шуканої площини можна взяти паралельний йому напрямний вектор $\bar{l}$=**(4;-2;3)** даної прямої. Скористаємось рівнянням площини, яка проходить через дану точку *M* перпендикулярно до вектора $\bar{l}$**:**

$4(x+2)-2(y+3)+3(z-1)=0$ або $4x-3y-2z-1=0.$

Задача 9. Перевірити, що пряма $\frac{x+4}{5}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{7}$ паралельна площині $4x-3y-2z+7=0.$

Розв'язання. Використавши умову (10.9) паралельності прямої і площини, дістанемо $5\cdot4+2\cdot(-3)+7\cdot(-2)=0$, тобто пряма і площина паралельні.

Задача 10. Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму $\begin{cases} 3x-2y+3z-5=0, \\ 2x+y-z+1=0, \end{cases}$ і точку $M(1;-3;5)$.

Розв'язання. Використавши рівність (10.11), запишемо рівняння пучка площин, які проходять через дану пряму:

$$x-2y+3z-5+\lambda(2x+y-z+1)=0. \qquad (*)$$

Оскільки координати точки M повинні задовольняти рівнянню площини, то, підставивши у співвідношення (*), $x=1$, $y=-3$, $z=5$, маємо: $1-2\cdot(-3)+3\cdot5-5+\lambda(2\cdot1-3-5+1)=0$ або $-5\lambda+17=0$, звідки $\lambda=\dfrac{17}{5}$.

Підставивши тепер у співвідношення (*) знайдене значення λ, дістанемо $5x-10y+15z+34x+17y-17z+17=0$ або $39x+7y-2z+17=0$.

Завдання для самостійної роботи.

Задача 1. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $M(-1;4;-2)$ і паралельна до вектора $\bar{l}=(3;-2;5)$.

Задача 2. Обчисліть кут між прямими $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{-5}$ і $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+3}{2}$.

Задача 3. Перевірте, що пряма $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-4}{-3}=\dfrac{z+1}{3}$ паралельна площині $3x-5y-3z-4=0$.

Задача 4. Обчисліть кут між прямою $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z+1}{-3}$ і площиною $3x-2y+4z-2=0$.

Задача 5. Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму $\begin{cases} 3x-4y+5z-2=0, \\ x+5y-z+3=0, \end{cases}$ і точку $M(2;-5;4)$.

11. Нескінченна числова послідовність. Границя числової послідовності і її властивості. Нескінченно малі і нескінченно великі послідовності.

Нескінченною числовою послідовністю називається числова функція, визначена на множині N натуральних чисел.

Послідовність $\{x_n\}$ називається **зростаючою (спадною)**, якщо для будь-якого n виконується нерівність $x_{n+1}>x_n$ $(x_{n+1}<x_n)$.

Послідовність $\{x_n\}$ називається **незростаючою (неспадною)**, якщо для будь-якого n виконується нерівність $x_{n+1} \geq x_n$ $(x_{n+1} \leq x_n)$.

Спадні, зростаючі, неспадні і незростаючі послідовності називаються монотонними.

Звичайно послідовність задається формулою, яка виражає загальний член послідовності через n.

Число a називається границею послідовності $\{x_n\}$, якщо для будь-якого додатного числа ε знайдеться натуральне число N, що буде виконуватися нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$. Записується таким чином: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Послідовність може мати лише одну границю. Якщо послідовність має границю, то таку послідовність називають **збіжною**, а послідовність, яка не має границі, називається **розбіжною**.

Властивості числових границь мають вигляд:

Теорема 1. Якщо послідовності $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ збігаються, то $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Теорема 2. Якщо послідовності $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ збігаються, то $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Теорема 3. Сталий множник можна винести за знак границі, якщо послідовність $\{x_n\}$ збігається: $\lim\limits_{n\to\infty}(k \cdot x_n) = k \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Теорема 4. Якщо послідовності $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ збігаються і границя послідовності $\{y_n\}$ відмінна від нуля, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$.

Послідовність називається **нескінченно малою**, якщо її границя дорівнює нулю.

Для нескінченно малих послідовностей справедливі наступні теореми:

Теорема I. Сума двох нескінченно малих послідовностей є нескінченно малою.

Теорема II. Добуток обмеженої послідовності на нескінченно малу є нескінченно малою.

Теорема III. Щоб виконувалася рівність $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, необхідно і достатньо, щоб $x_n = a + \alpha_n$, де α_n - нескінченно мала послідовність.

Послідовність називається нескінченно великою, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Зразки розв'язування задач.

Обчислити границі таких послідовностей:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-1}{3n+2}$.

Чисельник і знаменник не мають границі, бо це необмежені послідовності, отже теорему про границю частки безпосередньо застосувати не можна. Поділивши чисельник і знаменник на n і застосувавши потім теорему про границю частки, дістанемо:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{3n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-1/n}{3+2/n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(2-1/n)}{\lim\limits_{n\to\infty}(3+2/n)} = \frac{2-\lim\limits_{n\to\infty}(1/n)}{3+\lim\limits_{n\to\infty}(2/n)} = \frac{2-0}{3+0} = \frac{2}{3}.$$

Решта границь 2-5 обчислюється аналогічно (чисельник і знаменник ділимо на n у старшому ступені):

2) $$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2-2n+4}{3n^2+4n-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{5-2/n+4/n^2}{3+4/n-2/n^2} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(5-2/n+4/n^2)}{\lim\limits_{n\to\infty}(3+4/n-2/n^2)} = \frac{5-0+0}{3+0-0} = \frac{5}{3}.$$

3) $$\lim_{n\to\infty} \frac{2-3n}{7n^2-4n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2/n^2-3/n}{7-4/n+1/n^2} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(2/n^2-3/n)}{\lim\limits_{n\to\infty}(7-4/n+1/n^2)} = \frac{0-0}{7-0+0} = \frac{0}{7} = 0.$$

4) $$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3-3n^2+2}{6n^2-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-3/n^2+2/n^3}{6/n-1/n^3} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(2-3/n^2+2/n^3)}{\lim\limits_{n\to\infty}(6/n-1/n^3)} = \frac{2-0+0}{0-0} =$$
$$= \frac{2}{0} = \infty$$

5) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4n^2+3n+2}+5n}{3n+7} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4+3/n+2/n^2}+5}{3+7/n} = \frac{\sqrt{4}+5}{3} = \frac{7}{3}.$$

6) $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2+4n})$;

При $n\to\infty$ послідовність $n-\sqrt{n^2+4n}$ є різницею двох нескінченно великих послідовностей $(\infty-\infty)$. Помноживши і поділивши послідовність на вираз $n+\sqrt{n^2+4n}$, дістанемо:

$$\lim_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2+4n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-\sqrt{n^2+4n})(n+\sqrt{n^2+4n})}{(n+\sqrt{n^2+4n})} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n^2-4n}{n+\sqrt{n^2+4n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-4}{1+\sqrt{1+4/n}} = \frac{4}{1+1} = -2.$$

Решта границь 7,8 обчислюється аналогічно.

7) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3n-2}-\sqrt{n^2+7})=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+3n-2}-\sqrt{n^2+7})\cdot(\sqrt{n^2+3n-2}+\sqrt{n^2+7})}{(\sqrt{n^2+3n-2}+\sqrt{n^2+7})}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n-2-n^2-7}{(\sqrt{n^2+3n-2}+\sqrt{n^2+7})}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n-9}{(\sqrt{n^2+3n-2}+\sqrt{n^2+7})}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3-9/n}{(\sqrt{1+3/n-2/n^2}+\sqrt{1+7/n^2})}=\frac{3}{1+1}=\frac{3}{2}.$$

8) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{3n+2}-\sqrt{3n+7})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{3n+2}-\sqrt{3n+7})\cdot(\sqrt{3n+2}+\sqrt{3n+7})}{(\sqrt{3n+2}+\sqrt{3n+7})}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2-3n-7}{(\sqrt{3n+2}+\sqrt{3n+7})}=\lim_{n\to\infty}\frac{-5}{(\sqrt{3n+2}+\sqrt{3n+7})}=0.$$

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+...+n}{1+3+5+...+(2n-1)}$;

Чисельник і знаменник не мають границі, бо це необмежені послідовності, які утворюють суми арифметичних прогресій. У чисельнику така сума S_n дорівнює $S_n=\dfrac{1+n}{2}\cdot n$. У знаменнику така сума $\sigma_n=\dfrac{1+2n-1}{2}\cdot(2n-1)$, або $\sigma_n=n\cdot(2n-1)$. Тоді дана границя має вигляд:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+...+n}{1+3+5+...+(2n-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+n)\cdot n}{2n\cdot(2n-1)}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n-1}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1+1/n}{2-1/n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

Завдання для самостійної роботи.

Обчислити границі послідовностей:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+5}{3n^2+2n+4}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3+n^2}{3n^2-5n+1}$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5+n-3n^2}{4-n+2n^2}$;
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+5n}-n\right)$;

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+4+7+...+(3n-2)}{2+3+4+...+(n+1)}$.

12. Похідна функції. Похідні основних елементарних функцій. Основні правила диференціювання.

Похідною функції $f(x)$ в точці x_0 називається границя відношення приросту функції Δy функції в цій точці до приросту Δx аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля:

$$y' = f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} .$$

Наводимо таблицю похідних основних елементарних функцій.

1. $(x)' = 1$
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$
3. $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$
4. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
5. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
6. $(e^x)' = e^x$
7. $(\sin x)' = \cos x$
8. $(\cos x)' = -\sin x$
9. $(tg\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
10. $(ctg\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
11. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(arctg\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
14. $(arcctg\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
15. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\cdot \ln a}$

16. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

При знаходженні похідної функції користуються також основними правилами диференціювання.

1. $(c)' = 0$, де c – стала.

2. $(c \cdot u)' = c \cdot u'$, де u - функція.

3. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Якщо y є функція від u: $y = f(u)$, де u, у свою чергу є функція від аргументу x: $u = \varphi(x)$, тобто залежить від x через проміжний аргумент u, y називається складеною функцією від x (функцією від функції): $y = f\left[\varphi(x)\right]$.

Похідна складеної функції дорівнює добутку її похідної за проміжним аргументом на похідну цього аргументу за незалежною змінною:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Якщо функція y від x задана параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$ (t - параметр), похідна y'_x обчисляється за формулою $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$.

Геометричний зміст похідної $f'(x_0)$ у точці x_0 у тому, що вона дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0. Рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0 має вигляд:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Другою похідною функції $y = f(x)$ називається похідна від першої похідної цієї функції:

$$y'' = (y')'.$$

Друга похідна параметрично заданої функції обчисляється за формулою:

$$y''_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}.$$

Зразки розв'язування задач

Задача 1. Знайти похідні функцій:

1) $y = 5x^4$, 2) $y = \frac{7}{x}$, 3) $y = 10\sqrt[3]{x}$,

4) $y = \frac{8}{x^4}$, 5) $y = \frac{9}{\sqrt{x^7}}$.

Розв'язання.

1) Винесемо сталий множник за знак похідної, а потім застосуємо формулу 2 таблиці похідних

$$y' = 5(x^4)' = 5 \cdot 4x^{4-1} = 20 \cdot x^3.$$

Аналогічно дістанемо:

2) $y' = 7\left(\frac{1}{x}\right)' = 7\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{7}{x^2}.$

3) $y' = 10\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = 10 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{10}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{10}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}.$

4) $y' = 8\left(\frac{1}{x^4}\right)' = 8(x^{-4})' = 8 \cdot (-4) \cdot x^{-4-1} = -\frac{32}{x^5}.$

5) $y' = 9\left(x^{-\frac{7}{2}}\right)' = 9\left(-\frac{7}{2}\right) \cdot x^{-\frac{7}{2}-1} = -\frac{63}{2\sqrt{x^9}}.$

Задача 2. Знайти похідні функції:

1) $y = 4 + 5x^2 + \frac{8}{x^2} - \frac{4\sqrt{x}}{3} - \frac{2}{\sqrt{x}}$;

2) $y = 2x\sqrt{x} + \frac{x}{\sqrt[5]{x}} - 5$;

3) $y = x^4 \sin x$;

4) $y = \frac{8x - 7}{2x^3 + x^2}$;

5) $y = \sqrt{x}\, e^x \frac{7^x + 7x}{2\cos x}.$

Розв'язання.

1) Знайдемо похідну від алгебраїчної суми як алгебраїчну суми похідних доданків:

$$y' = (4)' + (5x^2)' + \left(\frac{8}{x^2}\right)' - \left(\frac{4\sqrt{x}}{3}\right)' - \left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)' = 5 \cdot 2x + 8 \cdot (-2) \cdot x^{-2-1} -$$

$$-\frac{4 \cdot 1}{3 \cdot 2\sqrt{x}} - 2\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x^{-\frac{1}{2}-1} = 10x - \frac{16}{x^3} - \frac{2}{3\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x^3}};$$

2) $y' = 2\left(x^{1+\frac{1}{2}}\right) + \left(x^{1-\frac{1}{5}}\right)' - (5)' = 2\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + \dfrac{4}{5}\cdot x^{-\frac{1}{5}} = 3\sqrt{x} + \dfrac{4}{5\sqrt[5]{x}}$.

3) Знайдемо похідну за основним правилом 3:

$y' = \left(x^4\right)' \sin x + x^4 \cdot (\sin x)' = 4x^3 \sin x + x^4 \cos x$.

4) Використаємо правило 4:

$$y' = \frac{(8x-7)' \cdot \left(2x^3 + x^2\right) - (8x-7)\cdot\left(2x^3 + x^2\right)'}{\left(2x^3 + x^2\right)^2} = \frac{8\cdot\left(2x^3 + x^2\right) - (8x-7)\cdot\left(6x^2 + 2x\right)}{\left(2x^3 + x^2\right)^2} =$$

$$= \frac{16x^3 + 8x^2 - 48x^3 + 42x^2 - 16x^2 + 14x}{\left(2x^3 + x^2\right)^2} = \frac{-32x^3 + 34x^2 + 14x}{(2x^3 + x^2)^2}.$$

5) $y' = \left(\sqrt{x}\right)' \cdot e^x + \sqrt{x}\cdot\left(e^x\right)' - \dfrac{\left(7^x + 7x\right)' \cdot 2\cos x - \left(7^x + 7x\right)\left(2\cos x\right)'}{4\cos^2 x} =$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}e^x + \sqrt{x}e^x - \frac{\left(7^x \ln 7 + 7\right)\cdot 2\cos x + \left(7^x + 7x\right)\cdot 2\sin x}{4\cos^2 x}.$$

Задача 3. Знайти похідні складених функцій:

1) $y = \ln\sin x + \sqrt{arctgx}$;

2) $y = e^{3tg\frac{1}{x}} + \cos^3 x$;

3) $y = \left(4x^2 + 1\right)^2 \cdot 5^{\sqrt{x^3 - 1}}$;

4) $y = \dfrac{\arcsin^4 \sqrt{x}}{\ln(a - bx)}$;

5) $y = x \cdot 2^{tg\frac{3}{4x-5}}$.

Розв'язання.

1) Знайдемо похідну від першого доданку за формулою:

$y_x' = y_u' \cdot u_x'$, де $y = \ln u,\ u = \sin x$.

Тоді

$y_x' = \ln u \cdot u_x' = \dfrac{1}{u}\cdot\left(\sin x\right)_x' = \dfrac{1}{\sin x}\cos x = ctgx$.

Похідну від другого доданку знайдемо аналогічно:

$y = \sqrt{u},\quad u = arctgx$

$y_u' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u_x' = \dfrac{1}{2\sqrt{arctgx}}\cdot\left(arctgx\right)'_x = \dfrac{1}{2\sqrt{arctgx}}\cdot\dfrac{1}{1 + x^2}$.

Загалом

$y_x' = ctgx + \dfrac{1}{2\sqrt{arctgx}}\cdot\dfrac{1}{1 + x^2}$.

2) $y' = \left(e^{3tg\frac{1}{x}}\right) + \left(\cos^3 x\right)' = e^{3tg\frac{1}{x}}\left(3tg\dfrac{1}{x}\right)' + 3\cos^2 x\left(\cos x\right)' = e^{3tg\frac{1}{x}}\cdot 3\cdot\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{1}{x}}\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)' +$

$$= 3\cos^2 x(-\sin x) = e^{3tg\frac{1}{x}} \cdot \frac{3}{\cos^2\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) - 3\cos^2 x \sin x .$$

3) $y' = \left(\left(4x^2+1\right)^2\right)' \cdot 5^{\sqrt{x^3-1}} - \left(4x^2+1\right)^2 \cdot \left(5^{\sqrt{x^3-1}}\right)' =$

$$= 2\cdot\left(4x^2+1\right)\left(4x^2+1\right)' \cdot 5^{\sqrt{x^3-1}} + \left(4x^2+1\right)^2 \cdot 5^{\sqrt{x^3-1}} \cdot \ln 5 \cdot \left(\sqrt{x^3-1}\right)' =$$

$$= 2\cdot\left(4x^2+1\right)^2 \cdot 8x \cdot 5^{\sqrt{x^3-1}} + \left(4x^2+1\right)^2 \cdot 5^{\sqrt{x^3-1}} \cdot \ln 5 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^3-1}} \cdot 3x^2 .$$

4) $y' = \dfrac{\left(\arcsin^4\sqrt{x}\right)' \cdot \ln(a-bx) - \arcsin^4\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}\left(\ln(a-bx)\right)'}{\ln^2(a-bx)} =$

$$= \frac{4\cdot\arcsin^3\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln(a-bx) - \arcsin^4\sqrt{x} \cdot \frac{(-b)}{a-bx}}{\ln^2(a-bx)} .$$

5) $y' = (x)' \cdot 2^{tg\frac{3}{4x-5}} + x \cdot \left(2^{tg\frac{3}{4x-5}}\right)' =$

$$= 2^{tg\frac{3}{4x-5}} + x \cdot 2^{tg\frac{3}{4x-5}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{3}{4x-5}} \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{(4x-5)^2}\right) \cdot 4 .$$

Задача 4. Обчислити значення похідної функції $f(x) = \ln\dfrac{a-x}{a+x}$ у точці $x=2a$.

Розв'язання:

$$f(x) = \frac{1}{\frac{a-x}{a+x}} \cdot \frac{(a-x)'(a+x) - (a-x)(a+x)'}{(a+x)^2} =$$

$$= \frac{a+x}{a-x} \cdot \frac{-1\cdot(a+x) - (a-x)\cdot 1}{(a+x)^2} = \frac{-a-x-a+x}{(a-x)(a+x)} = -\frac{2a}{a^2-x^2};$$

$$f'(2a) = -\frac{2a}{a^2-(2a)^2} = -\frac{2a}{a^2-4a^2} = -\frac{2a}{-3a^2} = \frac{2a}{3a} .$$

Задача 5. Знайти похідну параметрично заданої функції:
$x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$.

Розв'язання. Знайдемо

$$y_t' = e^t \cdot \cos t + e^t \cdot (-\sin t) = e^t(\cos t - \sin t);$$

$$x_t' = e^t \cdot \sin t + e^t \cdot \cos t = e^t(\sin t + \cos t);$$

$$y_x' = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{e^t(\cos t - \sin t)}{e^t(\sin t + \cos t)} = \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t} .$$

Задача 6. Знайти похідну неявно заданої функції:

1) $x^2+4y^3+2xy=0$;

2) $\cos(x+y)-e^{3y}=0$.

1) Диференціюємо по x ліву і праву частину рівняння, враховуючи, що y – це функція від x:

$$2x+12y^2\cdot y_x'+2y+2x\cdot y_x'=0.$$

Розв’язуємо рівняння відносно y_x'.

$$y_x'\left(12y^2+2x\right)=-2x-2y;$$

$$y_x'=\frac{-2x-2y}{12y^2+2x}=-\frac{x+y}{6y^2+x}.$$

2) Диференціюємо по x:

$$-\sin(x+y)\cdot\left(x+y\right)_x'-e^{3y}\cdot\left(3y\right)_x'=0;$$

$$-\sin(x+y)\cdot\left(1+y_x'\right)-e^{3y}\cdot 3\cdot y_x'=0;$$

$$-\sin(x+y)-y_x'\cdot\sin\left(x+y\right)-e^{3y}\cdot 3\cdot y_x'=0;$$

$$y_x'\cdot\left(\sin(x+y)+3e^{3y}\right)=-\sin(x+y);$$

$$y_x'=-\frac{\sin(x+y)}{\sin(x+y)+3e^{3y}}.$$

Задача 7. Скласти рівняння дотичних до кривих:

1) $y=x\ln x$ у точці з абсцисою $x_0=e$;

2) $x=2e^t,\quad y=e^{-t}$ у точці де, $t_0=0$;

3) $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{7}=1$ у точці $M_0\left(2;\sqrt{7}\right)$.

Розв’язання:

1) Знайдемо кутовий коефіцієнт дотичної до кривої:

$$y'(x)=1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1,\quad y'\left(x_0\right)=y'\left(e\right)=\ln e+1=2,$$

а також $y(x_0)=y(e)=e\ln e=e$.

Підставимо в рівняння дотичної:

$$y-e=2\cdot(x-e);$$

$$y=2x-2e+e;$$

$$y=2x-e.$$

2) $y_t'=-e^{-t},\quad x_t'=2e^t$.

$$y_x'=\frac{y_t'}{x_t'}=\frac{-e^t}{2e^t}=-\frac{1}{2e^{2t}};$$

$$y_0'(0) = -\frac{1}{2e^{2\cdot 0}} = -\frac{1}{2}.$$

Знайдемо координати точки M_0, через яку проведена дотична: $x(0) = 2e^0 = 2$, $y(0) = e^{-0} = 1$.

Рівняння дотичної

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x-2);$$

$$y = -\frac{x}{2} + 2.$$

3) Знайдемо похідну неявної функції:

$$\frac{1}{2}\cdot 2x - \frac{1}{7}\cdot 2y\cdot y' = 0;$$

$$\frac{yy'}{7} = \frac{x}{2}; \qquad y' = \frac{7x}{2y};$$

$$y'(M_0) = y'(2;\sqrt{7}) = \frac{7\cdot 2}{2\cdot\sqrt{7}} = \sqrt{7}.$$

Рівняння дотичної:

$$y - \sqrt{7} = \sqrt{7}(x-2);$$

$$y = \sqrt{7}x - 2\sqrt{7} + \sqrt{7};$$

$$y = \sqrt{7x} - \sqrt{7}.$$

Задача 8. Знайти похідну другого порядку функції:

1) $y = \arcsin 3x$;

2) $x = a\sin^3 t, \quad y = a\sin^3 t$;

3) $y = 3xy$.

Розв'язання:

1) Знайдемо

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-(3x)^2}}\cdot 3 = \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}} = 3\cdot\left(1-9x^2\right)^{-\frac{1}{2}};$$

$$y'' = (y')' = 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-9x^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(-18x\right) = \frac{27x}{\sqrt{(1-9x^2)^3}}.$$

2) $y_x' = \dfrac{y_t'}{x_t}$;

$$y_t' = a\cdot 3\cos^2 t\cdot(-\sin t); \qquad x_t' = 3a\sin^2 t\cdot\cos t;$$

$$y_x' = \frac{-3a\cos^2 t\cdot\sin t}{3a\sin^2 t\cdot\cos t} = -\frac{\cos t}{\sin t} = -ctgt.$$

$$y'' = \frac{(y_x')_t'}{x_t};$$

$$(y_x')'t = \left(-ctgt\right)_t' = -\left(-\frac{1}{\sin^2 t}\right) = \frac{1}{\sin^2 t};$$

$$y_{xx}'' = \frac{1}{\sin^2 t \cdot 3a\sin^2 t \cdot \cos t} = \frac{1}{3a\sin^4 t \cdot \cos t}.$$

3) $y' = (3x)' \cdot y + 3x \cdot (y)'$;

$y' = 3y + 3xy'$;

$y' - 3xy' = 3y$;

$y'(1-3x) = 3y$;

$y' = \frac{3y}{1-3x}$.

Диференціюємо по x ще раз, а потім підставимо замість y' її вираз через x.

$$y'' = \frac{3y'(1-3x) - 3y\cdot(-3)}{(1-3x)^2} = \frac{3\cdot\left(\frac{3y}{1-3x}\right)(1-3x) + 9y}{(1-3x)^2} = \frac{9y+9y}{(1-3x)^2} = \frac{18y}{(1-3x)^2}.$$

Завдання для самостійної роботи.

1. Знайти похідні функцій:

1) $y = \sin^2 3x \cdot \sin 3x^2$;

2) $y = \ln arctg\sqrt{8x+1}$;

3) $y = \frac{tg^4 5x}{7^{\sqrt{x}} - 4}$;

4) $y = \sqrt[4]{x} \cdot e^{\frac{3}{x^2}}$.

2. Обчислити значення похідної $f'(1)$ функції $f(x) = e^{2x}\ln x^2$.

3. Знайти похідні параметричної і неявної функцій:

1) $x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}$;

2) $y = tg(x+y)$.

4. Скласти рівняння дотичних до кривих:

1) $y = \frac{1}{1+x^2}$ у точці з абсцисою $x_0=0$;

2) $x = \sin t, \quad y = \cos 2t, \quad t_0 = \frac{\pi}{6}$;

3) $e^y + xy = e$ у точці $M(0;1)$.

5. Знайти другі похідні функцій:

1) $y = x \cdot e^{x^2}$;

2) $x = \ln 2t, \quad y = t^2 - 1$;

3) $y^4 + x^3 - 7axy = 0$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Вища математика: основні означення, приклади і задачі: У двох книгах/ За редакцією Г.Л.Кулініча та І.П.Васильченка.- К.: Либідь, 1994.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика.- К.: Вища школа, 1993.
3. Богомолов М.В. Практичні заняття з математики.- К.: Вища школа, 1979.
4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т.1.- М.:Наука, 1976.
5. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа.- М.:Наука, 1975.

ЗМІСТ