12.3. Модель як складова задачі оптимального оцінювання

Задачі оцінювання дозволяють використовувати інформацію про взаємозв'язки між параметрами моделі для зменшення похибок вимірювань і підвищення точності отриманої вимірювальної інформації. На основі співвідношень математичної моделі можна:

а) розрахувати невиміряні параметри;

б) виявити та усунути "грубі" помилки і знизити "нормальні" помилки вимірювань;

в) визначити якість функціонування каналів збору даних.

Розглянемо *постановку задачі оцінювання.*

Нехай математична модель системи (об'єкта, процесу) описується системою n рівнянь вигляду:

$$N(\mathbf{Z}) = 0, \tag{12.5}$$

де $\mathbf{Z}$ – повний вектор параметрів системи розмірності $r > n$.

Нехай деякі параметри системи *вимірюються*, позначимо їх через $\widetilde{\mathbf{V}}$. В загальному випадку взаємозв'язок між параметрами моделі $\mathbf{Z}$ і вектором виміряних даних $\widetilde{\mathbf{V}}$ подають у вигляді:

$$\widetilde{\mathbf{V}} = \mathbf{F}(\mathbf{Z}) + \xi_{\widetilde{V}}, \tag{12.6}$$

де $\widetilde{\mathbf{V}}$ – вектор виміряних параметрів розмірності l; $\mathbf{Z}$ – вектор *дійсних значень* параметрів розмірності r; $\xi_{\widetilde{V}}$ – вектор *похибок вимірювань* розмірності l.

Досить часто вектор параметрів $\mathbf{Z}$ вдається розбити на вектор *незалежних параметрів* X і вектор *залежних параметрів* Y таких, що вектор Y виражається в явному вигляді через X:

$$Y = N(X). \tag{12.7}$$

Рівняння (12.7) є моделлю системи.

З урахуванням (12.7) вектор виміряних даних $\widetilde{\mathbf{V}}$ можна подати як функцію лише незалежних параметрів:

$$\widetilde{\mathbf{V}} = \mathbf{V}(X) + \xi_{\widetilde{V}}. \tag{12.8}$$

Задача оцінювання полягає у пошуку таких значень параметрів вектора X, які задовольняють рівняння математичної моделі (12.5) і є найбільш близькими в розумінні деякого критерію до виміряних значень $\widetilde{\mathbf{V}}$. Як критерій близькості найчастіше беруть квадратичний критерій, а задачу оцінювання зводять до *мінімізації функції* вигляду

$$\varphi = \sum_{i=1}^{l} \frac{\left[\tilde{V}_i - \mathbf{V}(X)\right]^2}{\sigma^2_{\tilde{V}_i}}, \qquad (12.9)$$

або в матричному вигляді

$$\Phi(X) = \left[\tilde{\mathbf{V}} - \mathbf{V}(X)\right]^T \mathbf{R}^{-1}_{\tilde{V}} \left[\tilde{\mathbf{V}} - \mathbf{V}(X)\right], \qquad (12.10)$$

де $\mathbf{R}_{\tilde{V}}$ – задана коваріаційна матриця, елементами головної діагоналі якої є дисперсії похибок вимірювань $\sigma^2_{\tilde{V}_i}$.

Якщо вектор параметрів $\mathbf{Z}$ моделі (12.5) не вдається розбити на вектори $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ такі, що $Y = N(X)$, або свідомо вимірюються додаткові параметри, то задачу оцінювання подають у вигляді такої *оптимізаційної задачі*:

знайти мінімум функції

$$\Phi(\mathbf{Z}) = \left[\tilde{\mathbf{V}} - \mathbf{V}(\mathbf{Z})\right]^T \mathbf{R}^{-1}_{\tilde{V}} \left[\tilde{\mathbf{V}} - \mathbf{V}(\mathbf{Z})\right]$$

при обмеженнях

$$\mathbf{U}(\mathbf{Z}) = 0 .$$

Для пошуку мінімуму функції можна використати будь-які методи безумовної оптимізації, однак найчастіше використовують ітераційну формулу методу Ньютона, яка для функції (12.9) запишеться у вигляді

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + \left\{\left(\frac{\partial \mathbf{V}(X)}{\partial X}\right)^T \mathbf{R}^{-1}_{\tilde{V}} \frac{\partial \mathbf{V}(X)}{\partial X}\right\}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{V}(X)}{\partial X}\right)^T \mathbf{R}^{-1}_{\tilde{V}} \left(\tilde{\mathbf{V}} - \mathbf{V}\left(X^{(k)}\right)\right), \qquad (12.11)$$

де k – індекс ітерації; $X^{(k)}$ – поточна оцінка рішення; $X^{(k+1)}$ – наступна оцінка рішення.

Після отримання оцінок вектора незалежних параметрів X оцінки вектора залежних параметрів Y можна отримати з рівнянь (12.7).

Крім оцінок параметрів, визначають також матриці:

$$\mathbf{R}_Y = \left[\left(\frac{\partial \mathbf{V}(X)}{\partial X}\right)^T \mathbf{R}^{-1}_{\tilde{V}} \frac{\partial \mathbf{V}(X)}{\partial X}\right]^{-1}, \qquad (12.12)$$

$$\mathbf{R}_X = \frac{\partial Y(X)}{\partial X} \mathbf{R}^{-1}_Y \left(\frac{\partial Y(X)}{\partial X}\right)^T, \qquad (12.13)$$

де похідні беруться на останній ітерації (12.11). Елементами головної діагоналі матриць $\mathbf{R}_Y$ і $\mathbf{R}_X$ є оцінки дисперсій σ^2_Y і σ^2_X, які характеризують *точність отриманих оцінок.*