

### **Ключові слова**

Локальна похибка, глобальна похибка, абсолютна похибка, відносна похибка, ітераційний алгоритм, збіжність, стійкість, коректність методів та алгоритмів, системи лінійних рівнянь, метод Крамера, метод Гаусса, метод Гаусса-Жордана, метод Гаусса-Зейделя, умови збіжності, власні значення, власні вектори, методи перетворень подібності, метод Хаусхолдера, нелінійні рівняння, алгебраїчні та трансцендентні, метод половинного ділення, метод хорд, метод простої ітерації, метод Ньютона, метод січних, комплексні корені, метод Ліна, метод Ньютона для систем нелінійних рівнянь, матриця Якобі, чисельне інтегрування, чисельне диференціювання, звичайні диференціальні рівняння, задача Коші, крайова задача, однокрокові методи, багатокрокові методи, порядок методу, “жорсткі” задачі, метод “стрілянини”, різниці, порядок різниць, різницеві шаблони, задачі в частинних похідних, еліптичні, параболічні, гіперболічні рівняння.

### **Контрольні запитання та завдання до підрозділу 9.1**

1. Що є джерелом похибок обчислювальних методів та алгоритмів?
2. Чим відрізняються локальна та глобальна похибки?
3. Дайте означення абсолютної та відносної похибок обчислень.
4. Що таке ітераційні методи та алгоритми?
5. Як перевірити збіжність ітераційних алгоритмів?
6. Дайте означення стійкості та коректності обчислювальних методів та алгоритмів.
7. Наведіть приклади обчислювальних задач спеціальності. Класифікуйте їх за математичними методами та фізичною сутністю.

### **Контрольні запитання та завдання до підрозділу 9.2**

1. Чим відрізняються прямі та непрямі методи розв’язання систем лінійних рівнянь? Дайте порівняльну оцінку.
2. Розкрити суть методів Крамера, Гаусса (і його різновидів), прогонки.
3. Як подається система рівнянь для застосування ітераційних методів?
4. Як перевірити збіжність ітераційних алгоритмів?
5. Чим відрізняються алгоритми ітераційних методів Якобі, Гаусса – Зейделя, послідовної верхньої релаксації?
6. Розв’язати наведену нижче систему рівнянь методом Крамера. Скласти алгоритм і програму розв’язання.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15; \\ x_1 - x_3 + 7x_4 = 26; \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -10; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_5 = 20; \\ x_1 + x_3 - x_4 + 10x_5 = 50. \end{cases}$$

7. Розв'язати систему рівнянь з прикладу 6 методом Гаусса. Скласти алгоритм і програму.
8. Розв'язати систему рівнянь з прикладу 6 методом Гаусса – Жордана. Скласти алгоритм і програму.
9. Розв'язати систему рівнянь з прикладу 6 модифікованим методом Гаусса. Скласти алгоритм і програму.
10. Чи можна розв'язати систему рівнянь з прикладу 6 методом прогонки? Скласти алгоритм і програму для розв'язання методом прогонки системи з  $n$  рівнянь та тридіагональною матрицею коефіцієнтів.
11. Розв'язати вказаними в п. 6, 7, 8, 9, 10 методами на ЕОМ таку систему:

$$11.1 \quad A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 12 \\ 30 \\ 14 \\ 3 \end{vmatrix}$$

$$11.2 \quad A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 11 \\ 2 \\ 0 \\ 6 \end{vmatrix}$$

$$11.3 \quad A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ -3 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 & 15 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 38 \\ 5 \\ 4 \\ 14 \\ 19 \end{vmatrix}$$

12. Розв'язати методом Якобі наведену нижче систему. Скласти алгоритм і програму. Перевірити збіжність.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} - \frac{x_4}{4}, \\ x_2 = \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{10} - \frac{x_3}{10} + \frac{x_4}{2}, \\ x_3 = \frac{x_1}{5} + \frac{x_2}{5} + \frac{x_3}{3} + \frac{x_4}{10}, \\ x_4 = \frac{x_3}{3} + \frac{x_4}{4} + 2. \end{cases}$$

13. Розв'язати методом Гаусса – Зейделя систему з п. 12. Скласти алгоритм і програму. Перевірити збіжність
14. Розв'язати методом послідовної верхньої релаксації систему з п. 12 з параметром релаксації  $\omega = 1,5$ .
15. Сформулювати проблему визначення власних значень матриці.
16. Яка матриця називається несингулярною?
17. Сформулювати умову ортогональності матриці.
18. Назвати властивості власних значень та векторів.
19. Чим відрізняються прямі та ітераційні методи визначення власних значень та векторів?
20. Визначити прямим методом власні значення та вектори матриць:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}; \quad A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

21. Скласти алгоритм, програму та визначити власні значення матриць з п. 20 ітераційним методом.
22. Дати загальну характеристику методів перетворень подібності.
23. Чим відрізняються LQ та QR методи ?
24. Дати порівняльну оцінку, аналіз ефективності та умов застосування різних методів визначення власних значень та векторів.

### Контрольні запитання та завдання до підрозділу 9.3

1. Навести класифікацію нелінійних рівнянь і систем та методів їх розв'язання. В яких задачах з спеціальності виникає потреба розв'язання таких задач?
2. Сформулювати головні теореми та правила відносно кількості та вигляду коренів алгебраїчних рівнянь.
3. Розв'язати алгебраїчне рівняння з комплексними коренями

$$x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 4x^3 - x - 1 = 0.$$

Похибка оцінки кожного кореня не повинна перевищувати 0.05.

4. Чому для розв'язання систем нелінійних рівнянь можливе застосування тільки ітераційних методів?
5. Назвати ітераційні методи для розв'язання систем нелінійних рівнянь та порівняти їх.
6. Як оцінюється збіжність ітераційних методів розв'язання систем нелінійних рівнянь?
7. Скласти алгоритм і програму та розв'язати на ЕОМ методами половинного ділення, хорд, Ньютона, січних та простої ітерації (оцінити інтервал збіжності) з похибками  $\varepsilon = 0.1, 0.01, 0.001$  такі рівняння:

$$x^4 + x^2 - x + 1 = 0;$$

$$x^3 - 7x + 2 = 0;$$

$$x^5 - 10x^2 + 5 = 0;$$

$$x^3 - 2x^2 - 1 = 0;$$

$$x^5 - x^2 - 3 = 0;$$

$$x^2 - \ln x = 0;$$

$$x - 10 \sin x = 0;$$

$$x^3 - 2 \operatorname{tg} x + 5 = 0;$$

$$x^2 - x + \operatorname{tg} x = 0.$$

8. Порівняти ефективність (час розрахунків та кількість ітерацій для досягнення заданої похибки) різних методів.
9. Знайти матриці Якобі для систем нелінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3^2 = 14 \\ \ln|x_1| + x_2^2 - x_3 = 1 \\ x_1 + \sin \frac{\pi x_2}{4} - x_3 = 1 \end{cases}$$

та

$$\begin{cases} \cos x_1 + x_2 + \ln \frac{x_3}{3} = 2 \\ x_1 + x_2^2 + x_3 = 8 \\ \frac{\operatorname{arctg} x_1}{\pi} + \frac{x_2}{2} - \frac{x_3}{12} = 1 \end{cases}$$

10. Як знайти матрицю обернену заданій? Скласти алгоритм.

1. Розв'язати на ЕОМ системи рівнянь з п. 7 методом Ньютона та модифікованим методом Ньютона. Скласти алгоритм та програму. Оцінити збіжність.
2. Дати порівняльну оцінку та рекомендації щодо вибору методів розв'язання нелінійних рівнянь та систем.

### Контрольні запитання та завдання до підрозділу 9.4

1. Сформулюйте задачу Коші і крайову задачу. В чому відмінність у постановці цих задач?
2. Наведіть приклади звичайних диференціальних рівнянь, які розв'язуються лише чисельними методами.
3. Дайте порівняльну оцінку і визначте області застосування методів розв'язання звичайних диференціальних рівнянь.
4. Чи можлива крайова задача для рівнянь першого порядку?
5. Що таке похибка зрізання (обмеження)? Чим визначається порядок похибки методу?
6. Покажіть, що загальна формула для методу Рунге – Кутта, застосована до рівняння  $y' = -y$  з початковою умовою  $y(0) = 1$ , приводить до співвідношення  $y_n = (1 - h + \frac{h^2}{2})^n \approx e^{-x_n}$ .
7. В чому подібність між методами прогнозу та корекції і виправленим методом Ейлера?
8. Як оцінюються похибки методів Ейлера, Рунге – Кутта, прогнозу і корекції?
9. Дайте геометричну інтерпретацію методів Ейлера.
10. Що таке властивість «самостартування» методів розв'язання звичайних диференціальних рівнянь?
11. Як обирається крок при використанні багатокрокових методів розв'язання?
12. Які рівняння називають “жорсткими”? У чому особливості їх розв'язання?
13. Для розв'язання яких крайових задач може використовуватись метод “стрілянини”? Як отримати розв'язок крайової задачі з розв'язків декількох задач Коші в цьому методі?
14. З яких етапів складається розв'язання задачі різницевиими методами?
15. Запишіть всі можливі різницеві оператори для першої і другої похідних.
16. Як визначаються різницеві оператори для похідних більш високих порядків?

### Контрольні запитання та завдання до підрозділу 9.5

1. Наведіть приклади інженерних задач, які описуються диференціальними рівняннями в частинних похідних.
2. На які типи можна поділити диференціальні рівняння другого порядку в частинних похідних залежно від коефіцієнтів, які входять до них?
3. Які методи існують для розв'язання диференціальних рівнянь в частинних похідних?
4. Як конструюються обчислювальні шаблони для частинних похідних? Отримайте обчислювальні шаблони для оператора Лапласа та бігармонічного оператора.
5. Як використовується різницевий метод у випадку, коли межа області, де шукають розв'язок, не проходить через вузли сітки? Наведіть приклад обчислювального шаблону?
6. Якими різницевими методами розв'язується класична задача Діріхле для рівнянь Лапласа в прямокутній області? Доведіть їх збіжність.
7. Отримайте тришарову схему розв'язання гіперболічних рівнянь. В яких випадках розв'язок стійкий?
8. Порівняйте ефективність використання явної і неявної схем розв'язання параболічних рівнянь в частинних похідних.
9. Як вибирається крок при розв'язанні диференціальних рівнянь в частинних похідних?

### Контрольні запитання та завдання до підрозділів 9.6-9.7

1. Перелічіть методи чисельного інтегрування?
2. Чому необхідні методи і алгоритми чисельного інтегрування?
3. Яка послідовність застосування методів Ньютона – Котеса? Розробіть алгоритм. Чим відрізняються прості формули Ньютона – Котеса від складених?
4. Як отримують формули Ньютона – Котеса? Виведіть прості формули трапецій та Сімпсона для чисельного інтегрування та складені формули.
5. Як застосовуються методи Гаусса і Чебишова? Розробіть алгоритм.
6. Як визначаються коефіцієнти в формулі Гаусса для чисельного інтегрування? Чому її називають формулою найвищої алгебраїчної точності?
7. Як оцінюється похибка методів чисельного інтегрування?
8. Порівняйте методи Чебишова, Гаусса, Ньютона – Котеса?
9. Згадайте метод прямокутників. В чому його суть? Розробіть алгоритм.
10. Розробіть алгоритм та наведіть приклад програми чисельного інтегрування

за методом Монте – Карло для двократного інтеграла  $I = \iint_{(\sigma)} (x^2 + y^2) dx dy$ ,

де область інтегрування  $\sigma$  визначається такими нерівностями

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 1,$$

$$0 \leq y \leq 2x - 1.$$

Чи потраплять в область інтегрування точки з координатами (0.55; 0.75), (0.25; 0.75), (0.25; 0.25), (0.99; 0.70)?

11. Коли потрібні методи чисельного диференціювання аналітично заданих функцій і в чому вони полягають?

### Література

1. Абрамовиц М. Справочник по специальным функциям / М. Абрамовиц, И. Стиган. – М. : Наука, 1979. – 486 с.
2. Кветний Р. Н. Методи комп'ютерних обчислень / Кветний Р. Н. – Вінниця : ВНТУ, 2001. – 218 с.
3. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика / Л. Коллатц. – М. : Мир, 1969. – 448 с.
4. Комп'ютерне моделювання систем та процесів. Методи обчислень / під заг. ред. Р. Н. Кветного – Вінниця : ВНТУ, 2012. – ч. 1 – 196 с.; ч. 2 – 230 с.
5. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1986. – 832 с.
6. Краскевич В. Е. Численные методы в инженерных исследованиях / Краскевич В. Е., Зеленский К. Х., Гречко В. И. – К. : Вища школа, 1986. – 264 с.
7. Ляшенко М. Я. Чисельні методи : підручник / Ляшенко М. Я., Головань М. С. – К. : Либідь, 1996. – 288 с.
8. Маликов В. Т. Вычислительные методы и применение ЭВМ / Маликов В. Т., Кветний Р. Н. – К. : Вища школа, 1989. – 362 с.
9. Самарский А. А. Введение в численные методы / Самарский А. А. – М. : Наука, 1987. – 234 с.
10. Самарский А. А. Теория разностных схем / Самарский А. А. – М. : Наука, 1977. – 400 с.
11. Скурихин В. Н. Математическое моделирование / Скурихин В. Н., Шифрин В. Б., Дубровский В. В. – К. : Техніка, 1983. – 270 с.
12. Фельдман Л. П. Чисельні методи в інформатиці / Фельдман Л. П., Петренко А. І., Дмитрієва О. А. – К. : Вид. група ВНУ, 2006. – 480 с.
13. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М. : Мир, 1980. – 279 с.

14. Чабан В. Чисельні методи / В. Чабан. – Львів : Вид. Нац. ун-ту “Львівська політехніка”, 2001. – 186 с.
15. Оборский Г. А. Моделирование систем / Г. А. Оборский, А. Ф. Дашенко, А. В. Усов, Д. В. Дмитришин – Одесса : Астропринт, 2013. – 664с.
16. Kvyetnyu R. Basics of Modelling and Computational Methods / R. Kvyetnyu. – Вінниця : ВДТУ, 2007. – 147 с.