

8.2. Диференціальні рівняння в частинних похідних для моделювання технічних систем

З розв'язанням диференціальних рівнянь в частинних похідних (differential equations in partial derivatives) інженерам і дослідникам доводиться зустрічатися у багатьох галузях науки і техніки: в аеро- і гідродинаміці, ядерній фізиці, радіозв'язку, теплотехніці тощо. В таких рівняннях містяться частинні похідні і шукана величина залежить одразу від декількох змінних. Наприклад, диференціальне рівняння другого порядку з двома незалежними змінними має вигляд

$$A(x, y) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + B(x, y) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + E(x, y) \frac{\partial f}{\partial y} + D(x, y) \frac{\partial f}{\partial x} + F(x, y) = G(x, y).$$

Аналогічно звичайним диференціальним рівнянням єдиний розв'язок рівняння можна отримати лише задавши додаткові умови, але оскільки тут присутні дві незалежні змінні x та y , умова повинна задаватися для якої-небудь кривої у площині xOy . Ця умова може бути накладена на функцію f або/та на її похідні та залежати від типу рівняння, яке визначає її вигляд і характер зміни.

Існують три типи диференціальних рівнянь другого порядку:

- еліптичні, при $B^2 - 4AC < 0$;
- параболічні, при $B^2 - 4AC = 0$;
- гіперболічні, при $B^2 - 4AC > 0$.

Рівняння можуть переходити з одного типу в інший залежно від значень коефіцієнтів.

Еліптичні рівняння описують усталені (стаціонарні) процеси, причому задача ставиться в замкненій області, і в кожній точці границі цієї області задаються граничні умови. Інші два типи рівнянь описують еволюційні процеси. В таких задачах найбільш поширений випадок, коли на одній частині границі ставлять граничні умови, а на іншій – початкові.

В цьому розділі розглянуто загальні підходи до аналітичного розв'язання таких рівнянь, а в наступному (дев'ятому) надано методи та алгоритми чисельного розв'язання задач математичної фізики (як часто називають диференціальні рівняння в частинних похідних) на прикладі рівнянь другого порядку.

8.2.1. Рівняння параболічного типу і їх застосування до моделювання теплофізичних процесів в технічних системах

Для моделювання процесу теплопровідності необхідно скласти рівняння, що описує передачу теплоти від однієї частини тіла до іншої або від одного тіла

до іншого, сформулювати граничні умови, що описують теплообмін на границях тіл, що контактують, і визначити початкові умови, що описують стан системи в початковий момент часу.

Процес теплопередачі відбувається в просторі і часі. Тому аналітичне дослідження теплопровідності зводиться до вивчення просторово-часового розподілу основної фізичної величини – температури, тобто до знаходження залежності $T = f(x, y, z, t)$, що визначає миттєве значення температури в усіх точках досліджуваного об'єкта. Сукупність цих значень температури називається температурним полем.

Поле, що відповідає неусталеному тепловому режиму, називається нестационарним температурним полем. Якщо тепловий режим є сталим, то температура в кожній точці тіла з плином часу залишається незмінною. Таке температурне поле називається стаціонарним і температура є функцією тільки координат: $T = T'(x, y, z)$.

У тілі, що має температуру $T(x, y, z, t)$, можна виділити поверхню, в усіх точках якої в деякий момент часу температура однакова – ізотермічна поверхня певного рівня температури. Для ізотермічних поверхонь, описуваних рівнянням $T(x, y, z, t) = C$, характерно те, що теплота не поширюється уздовж поверхні, а направляєється від однієї поверхні до іншої.

Розглянемо дві нескінченно близькі ізотермічні поверхні з температурами T і $(T + \Delta T)$, ($\Delta T > 0$) і точку M , що лежить на одній з них (рис. 8.16).

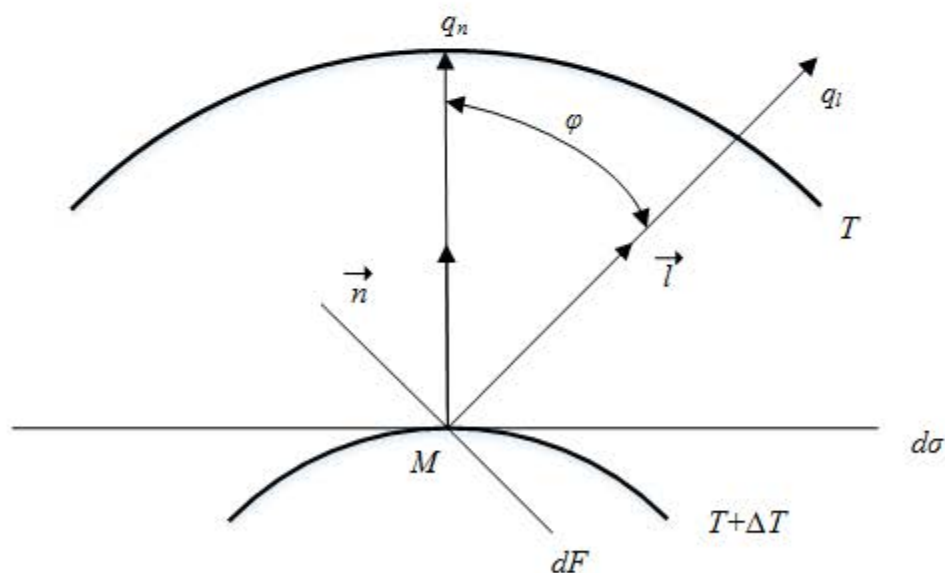


Рисунок 8.16 – Розрахункова схема до виведення рівняння теплопровідності

Переміщаючись з точки M уздовж будь-яких напрямків, можна виявити, що інтенсивність зміни температури в різних напрямках неоднакова. Швидкість зміни температури T в точці M в напрямку \vec{l} обчислюється за формулою:

$$\frac{\partial T}{\partial l} = \frac{\partial T}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial T}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial T}{\partial z} \cos \gamma,$$

де α, β, γ – кути між напрямком \vec{l} і нормаллю \vec{n} .

Найбільша різниця температури на одиницю довжини вектора переміщення спостерігається в напрямку нормалі \vec{n} до ізотермічної поверхні. Таким чином, в будь-якій точці M ізотермічної поверхні максимальна швидкість зміни температури відбувається в напрямку нормалі \vec{n} , тобто:

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \vec{n} \overrightarrow{grad}(T) = \left(\frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k} \right) \vec{n} = \vec{\nabla} T \vec{n}.$$

Температурний градієнт показує, наскільки інтенсивно змінюється температура всередині тіла. Температурний градієнт є основним фізичним параметром, що визначає умови виникнення теплового процесу, тобто при $\overrightarrow{grad}(T) \neq 0$ всередині тіла виникає тепловий потік. Тепловий потік має певний напрям, а саме: від точок тіла з більшою до точок з меншою температурою. Інакше, тепловий потік можна розглядати як вектор, спрямований у бік зменшення температур, а поле теплових потоків – векторним.

Під вектором теплового потоку в точці M температурного поля будемо розуміти вектор, напрям якого збігається з напрямком перенесення теплоти Q , а абсолютна величина виражає тепловий потік або інтенсивність перенесення теплоти, тобто вимірювану кількість теплоти, що проходить в одиницю часу t через одиницю площі поверхні $d\sigma$, перпендикулярної до напрямку потоку в розглянутій точці, тобто:

$$q = \frac{dQ}{d\sigma dt}.$$

Вектори щільності теплового потоку \vec{q} і $\overrightarrow{grad}(T)$ спрямовані по нормалі до ізотермічної поверхні, але в протилежні сторони. Зі збільшенням температур, тобто зростанням температурного градієнта, збільшується і щільність теплового потоку. Вираз

$$\vec{q} = -\lambda \overrightarrow{grad}(T)$$

є законом теплопровідності Фур'є у векторному вигляді. Він описує механізм теплопровідності і використовується при виведенні рівняння теплопровідності, що лежить в основі побудови математичних моделей теплофізичних процесів.

Коефіцієнт пропорційності λ називається теплопровідністю і є константою, що характеризує теплопровідні властивості матеріалу даного тіла.

Диференціальне рівняння теплопровідності

В основу виведення диференціального рівняння теплопровідності покладено закон збереження енергії, що поєднується з законом Фур'є.

Виділимо в тілі деяку частину об'єму V , обмежену замкнутою поверхнею S , через яку відбувається тепла взаємодія виділеної частини з навколишнім середовищем – іншою частиною тіла. Має місце таке твердження: кількість теплоти Q , отримана виділенням об'ємом за час dt внаслідок теплопровідності, а також від внутрішніх джерел теплоти, дорівнює зміні внутрішньої енергії речовини, що міститься у виділеному об'ємі:

$$Q = Q_1 + Q_2,$$

де Q – зміна внутрішньої енергії речовини, що міститься у виділеному об'ємі V за час dt ; Q_1 – кількість теплоти, введеної в виділений об'єм шляхом теплопровідності за час dt ; Q_2 – кількість теплоти, яка виділилася в об'ємі V за час dt внаслідок внутрішніх джерел теплоти.

Для обчислення Q_1 скористаємося законом Фур'є в скалярній формі:

$$dQ_1 = \lambda \frac{\partial T}{\partial n} d\sigma dt = \lambda \vec{n} \overrightarrow{\text{grad}}(T) d\sigma dt = -q_n d\sigma dt,$$

де $\vec{q} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T)$ – вектор щільності теплового потоку.

Кількість теплоти, що протікає за час dt через площу поверхні S , виражається поверхневим інтегралом

$$Q_1 = -dt \int_S \vec{q} \vec{n} d\sigma = -dt \int_S q_n d\sigma.$$

Цей інтеграл можна перетворити в об'ємний за формулою Остроградського-Гаусса

$$\int_S q_n d\sigma = \iiint_V \text{div}(\vec{q}) dV.$$

Таким чином

$$Q_1 = -dt \iiint_V \text{div}(\vec{q}) dV.$$

Виділення або поглинання теплоти всередині об'єму V зручно характеризувати за допомогою щільності $F(M, t)$ потужності теплових джерел

$$dQ_2 = F(M, t)dVdt.$$

За проміжок часу dt в тілі об'ємом dV виділиться кількість теплоти

$$Q_2 = dt \iiint_V F(M, t)dV.$$

Тут $F(M, t) > 0$. Якщо $F(M, t) < 0$, то теплота не виділяється, а поглинається.

Загальна кількість теплоти, отримана виділенням об'ємом,

$$Q = dt \iiint_V F(M, t)dV - dt \iiint_V \operatorname{div}(\vec{q})dV.$$

З іншого боку, ця кількість теплоти дорівнює зміні внутрішньої енергії речовини, що міститься в об'ємі V , $Q = CdT$, де C – теплоємність тіла V ; dT – зміна його температури.

В точці $M(x, y, z) \in V$ за інтервал часу dt температура $T(x, y, z, t)$ зміниться на $T(x, y, z, t + dt) - T(x, y, z, t) = \frac{\partial T}{\partial t} dt$.

Елементу об'єму dV масою ρdV для такої зміни температури потрібна кількість теплоти, рівна $\rho C \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) dV dt$, а всьому об'єму V –

$$CdT = dt \iiint_V c\rho \frac{\partial T}{\partial t} dV,$$

де C – питома теплоємність, [Дж/кг·град]; ρ – щільність речовини, [кг/м³]; c – об'ємна теплоємність, [Дж/м³·град].

Таким чином,

$$\begin{aligned} -Q_2 - Q_1 + Q &= \iiint_V \left[F(M, t) + \operatorname{div}(\vec{q}) + c\rho \frac{\partial T}{\partial t} \right] dV = \\ &= \iiint_V \left[c\rho \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{q}) - F(M, t) \right] dV = 0. \end{aligned}$$

Остання рівність має виконуватися для будь-якої частини тіла об'ємом V . Це можливо тільки тоді, коли в кожній точці всередині тіла

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{q}) - F(M, t) = 0.$$

Оскільки $\vec{q} = -\lambda \overrightarrow{\operatorname{grad}}(T)$, то останню рівність можна записати так:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda \overrightarrow{\operatorname{grad}}(T)) + F(M, t)$$

Це рівняння називається диференціальним рівнянням теплопровідності, або рівнянням Фур'є.

Для ізотропного гомогенного тіла параметри c, ρ, λ постійні: $\operatorname{div}[\operatorname{grad}(T)] = \Delta T$, де Δ – оператор Лапласа. Остаточно після ділення на $c\rho$ отримаємо

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\Delta T(M, t) + \frac{1}{c\rho}F(M, t)$$

Тут: $a = \frac{\lambda}{c\rho}$ – коефіцієнт пропорційності (температуропровідність). На відміну від λ , яка характеризує теплопровідну здатність тіла, коефіцієнт a характеризує теплоінерційні властивості тіла і є мірою швидкості вирівнювання температурного поля в розглянутому середовищі.

В декартових координатах рівняння теплопровідності має такий вигляд

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \frac{1}{c\rho}F(M, t), \quad (8.52)$$

в циліндричних координатах (r, φ, z) , пов'язаних з декартовими координатами співвідношеннями $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z$; $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $-\infty < z < \infty$, рівняння записується так:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{c\rho}F(r, z, \varphi, t)$$

Рівняння теплопровідності відносять до диференціальних рівнянь параболічного типу.

Якщо температура розглянутого тіла в будь-якій його точці не змінюється в часі, тобто $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$, то рівняння набуває вигляду

$$\Delta T(M) + \frac{1}{\lambda}F(M) = 0.$$

Це рівняння називається рівнянням Пуассона.

Якщо всередині тіла відсутні теплові джерела і температурне поле стаціонарне, то маємо рівняння

$$\Delta T(M) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0,$$

яке називається рівнянням Лапласа і належить до диференціальних рівнянь еліптичного типу.

Математична постановка крайових задач рівняння теплопровідності

Диференціальне рівняння теплопровідності (8.52) є математичною моделлю цілого класу явищ теплопровідності і само по собі не відображає розвиток процесу теплопереносу в тілі. Математично це пояснюється неединістю розв'язку диференціальних рівнянь в частинних похідних, до яких належить і рівняння теплопровідності. Щоб отримати з множини розв'язків один окремий розв'язок, що відповідає певній конкретній задачі, необхідно мати додаткові дані, що не містяться у вихідному диференціальному рівнянні теплопровідності.

Для однозначного розв'язання задачі необхідно враховувати нижченаведене.

1. Геометрію твердого тіла, в якому протікає процес теплообміну. Наприклад, якщо розглядати тіла (рис. 8.17), то їх геометрію можна математично описати відповідними нерівностями: $0 \leq x \leq a$, $0 \leq x \leq \infty$.

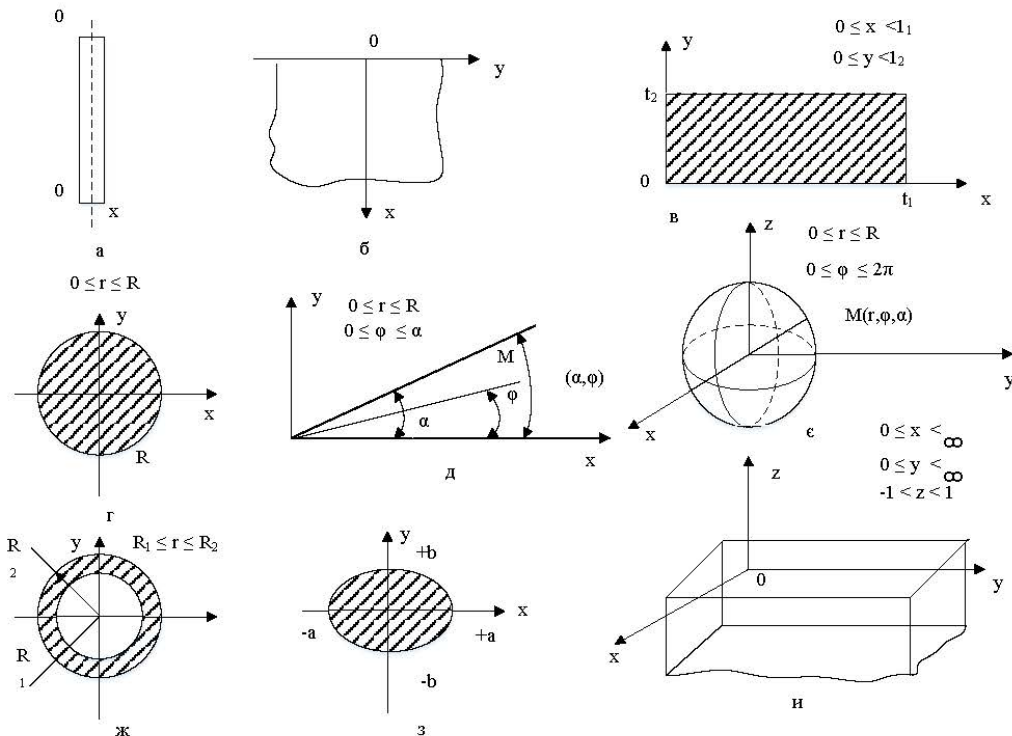


Рисунок 8.17 - Крайові геометричні умови при постановці крайових задач

2. Фізичні умови, що характеризують фізичні властивості (тепло – температуропровідність), а також закон розподілу внутрішніх джерел теплоти.

3. Граничні умови, що характеризують особливості теплової взаємодії граничної поверхні тіла з навколишнім середовищем.

4. Часові (початкові) умови, що характеризують стан тіла в вихідний момент часу чи інакше визначають розподіл температури в будь-якій точці тіла в деякий момент часу, який для досліджуваного процесу теплообміну приймається за початковий.

Перераховані умови в сукупності визначають одне (конкретне) явище теплопровідності і в цьому сенсі можуть бути названі *умовами єдиності*. Для тіла певної геометричної форми з певними фізичними властивостями умови однозначності зводяться до завдання початкових і граничних умов. Ці умови в сукупності називаються крайовими. Диференціальне рівняння теплопровідності разом з крайовими умовами є крайовою задачею рівняння теплопровідності (так званою тепловою задачею). Для усталеного теплового процесу необхідність у заданні початкових умов відпадає, і в цьому випадку крайова задача буде складатися з рівняння теплопровідності і граничних умов.

Перейдемо до формулювання початкової і граничної умови, які повинна задовольняти функція $T(x, y, z, r) = \theta(M, \tau)$, що описує розподіл температури в деякому тілі.

Нехай V – кінцева область тривимірного простору, де відбувається процес теплопровідності, і S – межа області, яку будемо вважати кусково-гладкою поверхнею. Областю задання початкової умови є V , що відповідає геометричній формі і розміру тіла, а S – область задання граничних умов, G – область і її границя S (рис 8.17).

Початкова умова рівняння теплопровідності полягає в заданні температури в усіх точках області V в момент $t = 0$, від якого і ведеться відлік часу:

$$T(M, t)_{t=0} = f_0(M); M \in V, \quad (8.53)$$

де $f_0(M)$ – задана функція, неперервна в точках V .

У випадку рівномірного розподілу температури в тілі початкова умова спрощується: $T(M, t) = \theta_0 = \text{const}, M \in V$.

Умова (8.53) означає, що слід знайти такий розв'язок $\Theta(M, t)$ теплової задачі, який з наближенням часу до початкового значення прямував би в усіх точках області до заданої величини $f_0(M)$:

$$\lim_{t \rightarrow 0} T(M, t) = f_0(M). \quad (8.54)$$

Розуміння початкової умови (8.53) в граничному значенні (8.54) пояснюється виключно тими класами конкретних функцій, якими описуються розв'язки крайових задач рівняння теплопровідності. Ці функції в багатьох випадках не мають сенсу при $t = 0$, проте допускають граничний перехід при $t \rightarrow 0$.

Наприклад, функція

$$T(x,t) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi at} \int_0^{\infty} f_0(\xi) \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right] d\xi \quad (8.55)$$

є розв'язком рівняння теплопровідності $\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ з початковою умовою $T(x,0) = f(x)$. З самого подання виразу (8.55) видно, що його права частина не визначена при $t = 0$, але можна показати, що

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sqrt{\pi at} \int_0^{\infty} f_0(\xi) \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right] d\xi = f_0(x).$$

Якщо початковий розподіл температури $f_0(M)$ розривний в деяких точках області V (або поверхні S), то розв'язки $T(M,t)$ теплової задачі будуть мати таку властивість, що ці розриви повинні зникнути з моменту часу $t \geq t_{\xi} > 0$ (t_{ξ} – дуже короткий час), і тоді отриманий розв'язок повинен прагнути до заданої початкової температури в усіх точках тіла, де початковий розподіл неперервний.

Граничні умови – умови теплової взаємодії тіла з навколишнім середовищем – можуть бути задані в різній формі залежно від характеру процесу. У тих випадках, коли на границі тіла не відбувається ніяких процесів з поглинанням або виділенням теплоти і відсутній теплообмін випромінюванням, граничні умови на поверхні зіткнення двох середовищ в найзагальнішому вигляді полягають у рівності температур і теплових потоків:

$$T_T = T_C; \quad \lambda_T = \frac{\partial T(M,T)}{\partial n} = \lambda_C \frac{\partial T_C(M,t)}{\partial n},$$

де T_T, T_C – температура відповідно тіла і середовища; λ_T, λ_C – теплопровідність відповідно тіла і середовища, n – нормаль до граничної поверхні тіла і середовища.

Однак у практичних завданнях така форма граничних умов надзвичайно незручна, тому що для розрахунку температур твердого тіла необхідно розв'язувати спряжену задачу, тобто відшукувати температурне поле в навколишньому середовищі. Тому в ряді практично важливих завдань бажано перейти до простіших граничних умов.

У математичній теорії теплопровідності в більшості випадків використовуються основні умови, що є ідеалізацією дійсних фізичних процесів. Наприклад, гранична умова I роду полягає в заданні поверхневого розподілу температури для будь-якого моменту часу:

$$T(M,t) = f(M,t); \quad M \in S; \quad t > 0,$$

де M – точка, що знаходиться на поверхні S ; $f(M,t)$ – задана безперервна функція координат $M(x,y,z)$ і часу t в точках області S .

В окремому випадку, якщо температура на поверхні однакова і з часом не змінюється, граничні умови мають вигляд $T(M, t) = \theta_n$. Це може бути здійснено при штучному підтриманні постійної температури або при особливих умовах теплообміну між поверхнею тіла і навколишнім середовищем.

Граничні умови II роду полягають у заданні щільності теплового потоку для кожної точки поверхні тіла як функції координат і часу:

$$-\lambda \frac{\partial T(M, t)}{\partial n} = \Phi(M, t); \quad M \in S; \quad \tau > 0, \quad (8.56)$$

де $\Phi(M, t)$ – задана неперервна функція координат $M(x, y, z)$ і часу t в області S ; n – нормаль до поверхні S в точці M .

Тут слід розрізняти процеси охолодження і нагрівання. Для процесу охолодження $\frac{\partial T}{\partial n} < 0$; тепловий потік при цьому вважається додатним, так що умова (8.56) стосується процесу охолодження. Для процесу нагрівання $\frac{\partial T}{\partial n} > 0$; тепловий потік від’ємний і необхідно записати, якщо вважати, що $\Phi(M, t) \geq 0$,

$$\lambda \frac{\partial T(M, t)}{\partial n} = \Phi(M, t); \quad M \in S; \quad t > 0. \quad (8.57)$$

У найпростішому випадку щільність теплового потоку через поверхню може бути постійною на поверхні і за часом

$$\left. \frac{\partial T(M, t)}{\partial n} \right|_{M \in S = \frac{q_0}{\lambda} = const}$$

(наприклад, при нагріванні металевих виробів у високотемпературних печах, при механічній обробці).

Якщо у виразі (8.57) $\Phi(M, t) = 0$, то це означає, що поверхня тіла S теплоізольована. За означенням, теплоізольованою поверхнею називається поверхня, через яку не проходить потік теплоти. У цьому випадку рівняння (8.56) має наступний вигляд:

$$\frac{\partial T(M, t)}{\partial n} = 0; \quad M \in S; \quad t > 0.$$

При граничних умовах III роду задаються температура навколишнього середовища і закон T_c конвективного теплообміну між поверхнею тіла і навколишнім середовищем. Для опису процесу теплообміну використовується закон Ньютона-Ріхмана. Згідно з цим законом кількість теплоти, що віддається одиницею площі поверхні S з температурою T_π в одиницю часу в навколишнє

середовище з температурою T_C в процесі охолодження $T_\pi > \Theta_C$, пропорційна різниці температур поверхні тіла T_π та навколишнього середовища T_C

$$q = \gamma [T_\pi - T_C] = \gamma [T(M, t)|_{M \in S^{T_C}}],$$

де γ – коефіцієнт пропорційності, що називається коефіцієнтом тепловіддачі.

Коефіцієнт γ характеризує інтенсивність теплообміну між поверхнею тіла і навколишнім середовищем. Чисельно він дорівнює кількості теплоти, що віддається (або сприймається) одиницею площі поверхні з різницею температури тіла і навколишнього середовища в один градус. На відміну від теплопровідності коефіцієнт λ не є фізичною константою, характерною для тієї чи іншої речовини. У загальному випадку він відображає спільну дію конвекції і випромінювання і залежить від багатьох факторів: геометрії і розмірів тіла, фізичних властивостей середовища, що оточує тіло, теплоємності, щільності, температури поверхонь нагріву тощо. Для спрощення завдання в розрахункових схемах як перше наближення приймають $\gamma = const$.

Граничні умови сполучення застосовуються у разі контакту двох твердих тіл. Якщо між граничними поверхнями тіл є ідеальний тепловий контакт, то їх температури на поверхні контакту повинні бути однаковими. Крім того, тепловий потік, що виходить з одного тіла через контактну поверхню, повинен дорівнювати тепловому потоку, що входить в інше тіло. Таким чином, якщо T_1 і T_2 – температура тіл, що знаходяться в умовах щільного теплового контакту, то для точки контактної поверхні граничні умови сполучення мають вигляд

$$T_1(M, t) = T_2(M, t)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1(M, t)}{\partial n} \Big|_{S_k} = \lambda_2 \frac{\partial T_2(M, t)}{\partial n} \Big|_{S_k},$$

де n – загальна нормаль до контактної поверхні S_k в точці M .

У разі неідеального теплового контакту між двома тілами (контактні поверхні розділені тонким прошарком) зазвичай вводиться поняття контактної опору R (або контактної провідності $1/R$). Рівність теплових потоків має місце, але з'являється пропорційна їм різниця між двома поверхневими температурами. Відповідні граничні умови мають вигляд

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1(M, t)}{\partial n} \Big|_{S_k} = 1/R [T_2(M, t) \Big|_{S_k} - T_1(M, t) \Big|_{S_k}];$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1(M, t)}{\partial n} \Big|_{S_k} = \lambda_2 \frac{\partial T_2(M, t)}{\partial n} \Big|_{S_k}.$$

Граничні умови сполучення можуть бути використані при знаходженні наближеного розв'язку рівняння теплопровідності в неоднорідному середовищі. Перераховані вище граничні умови в більшості практичних випадків задаються в кожній точці S – граничної поверхні тіла. Проте можливі випадки (наприклад, обробка з охолоджувальним середовищем), коли та чи інша гранична умова має місце не на всій поверхні S , а на якійсь кусково-гладкій її ділянці. У цьому випадку мають місце так звані різнірідні умови. Наприклад, у півплощині $y \geq 0$, $-\infty < x < \infty$ задаються довільні величини: на одній частині граничної поверхні ($x > 0$) – нестационарна температура, на іншій ($x < 0$) – тепловий потік. Якщо $T(x, y, z)$ – температурне поле в цій півплощині, то на поверхні ($y = 0$) маємо різнірідні граничні умови вигляду

$$\begin{aligned} T(x, y, z) \Big|_{y=0} &= \phi_1(x, t); \quad x > 0; \quad t > 0; \\ -\lambda \frac{\partial T(x, y, z)}{\partial y} \Big|_{y=0} &= \phi_2(x, t); \quad x < 0; \quad t > 0. \end{aligned}$$

Як зазначалося, диференціальне рівняння теплопровідності (8.51) пов'язує часовий і просторовий розподіли температури всередині тіла в будь-який момент часу $t > 0$. Для однозначного визначення температури всередині тіла необхідно задати її в початковий момент часу (початкові умови), геометричну форму і розміри тіла, закон взаємодії між поверхнею тіла і навколишнім середовищем (граничні умови).

Основні крайові задачі для рівняння теплопровідності формулюються так: потрібно знайти в області V безперервно двічі диференційовне за просторовими координатами, неперервно диференційовне за часом t і неперервне аж до границі розв'язку $T(M, t)$ рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \nabla^2 T(M, t) + f(M, t); \quad M \in V; \quad t > 0,$$

де Δ – оператор Лапласа за координатами точки. Цей розв'язок в області V при $t = 0$ неперервний і має задовольняти початкову умову

$$T(M, t) \Big|_{t=0} = \phi_0(M); \quad M \in V, \quad (8.58)$$

а на границі – якусь одну з перерахованих вище граничних умов.

Передбачається також виконання умов узгодження: у разі граничних умов I роду

$$\phi_0(M) \Big|_{M \in S} = f(M, t) \Big|_{t=0}; \quad M \in S; \quad (8.59)$$

у разі граничних умов II роду:

$$\lambda \frac{\partial \phi_0(M)}{\partial n} \Big|_{M \in S} = \Phi(M, t) \Big|_{t=0}; \quad M \in S; \quad (8.60)$$

у разі граничних умов III роду:

$$\frac{\partial \phi_0(M)}{\partial n} \Big|_{M \in S} = -h[\phi_0(M) - \phi(M, t)] \Big|_{t=0}. \quad (8.61)$$

Таким чином, для рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\Delta T(M, t) + f(M, t); \quad M \in V; \quad t > 0, \quad \left[f = \frac{F}{c\rho} \right] \quad (8.62)$$

маємо згідно із заданням граничних умов: першу крайову задачу (8.57); другу крайову задачу (8.58), третю крайову задачу (8.61).

Для рівняння стаціонарної теплопровідності

$$\Delta^2 T(M) + f(M) = 0; \quad M \in S; \quad \left[f = \frac{F}{\lambda} \right]$$

мають місце крайові задачі, що описані нижче.

Перша крайова задача: потрібно знайти розв'язок $T(M)$, що задовольнить в G умову

$$T(M) = \phi(M); M \in S.$$

Це і є так звана задача Діріхле.

Друга крайова задача, або задача Неймана: потрібно знайти розв'язок $T(M)$ рівняння теплопровідності в кожній точці на поверхні, який має граничне значення нормальної похідної та задовольняє умову

$$-\lambda \frac{\partial T(M)}{\partial n} = \phi(M); M \in S.$$

Третя крайова задача: необхідно знайти розв'язок $T(M)$ рівняння теплопровідності неперервний в Δ , граничне значення нормальної похідної якого задовольняє умову

$$-\lambda \frac{\partial T(M)}{\partial n} = \gamma[T(M) - \phi(M)]; M \in S.$$

В усіх випадках $\phi(M)$, задана на S , неперервна функція.

Крайові умови $\phi(M)$; $f(M, t)$ $\Phi(M, t)$ зазвичай визначаються з досвіду і тому не можуть бути знайдені абсолютно точно. Завжди неминуча деяка похибка у визначенні початкових або граничних умов. Ця похибка буде

позначатися і на розв'язанні завдання, а оскільки крайова задача описує реальний фізичний процес, то розв'язок цього завдання має характеризуватися функціями, неперервно залежними від крайових функцій завдання.

Аналітичні методи розв'язання задач теплопровідності

Метод Фур'є

Найефективнішим з аналітичних методів теорії теплопровідності є метод Фур'є. Його ідея: розв'язання крайової задачі для рівняння в частинних похідних зводиться до розв'язання допоміжних крайових задач спеціального типу для диференціальних рівнянь, методика розв'язання яких розроблена досить добре. Потім для вихідного рівняння у частинних похідних будуються окремі розв'язки у вигляді множення знайдених розв'язків допоміжних крайових задач і береться їх лінійна комбінація з постійними коефіцієнтами у вигляді нескінченного ряду, який дає загальний розв'язок крайової задачі. Для застосовності методу істотним є: 1) лінійність рівняння в частинних похідних; 2) лінійність граничних умов у вихідній задачі.

Типовими задачами теплопровідності, для розв'язання яких на практиці застосовується метод Фур'є, є крайові задачі в обмежених областях, хоча цей метод може бути застосований і в необмежених, і в напівобмежених областях.

В основу методу покладено подання шуканого розв'язку задачі у вигляді ряду Фур'є за деякою системою ортогональних функцій, знайдених при розв'язанні допоміжної задачі для звичайного диференціального рівняння – так званої задачі Штурма-Ліувілля.

Розглянемо застосування методу Фур'є до одновимірної теплової задачі для нескінченного стрижня, бокова поверхня якого теплоізолювана. Температура $T(x, t)$ точок цього стрижня при відсутності теплових джерел задовольняє рівняння

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (8.63)$$

Оскільки стрижень дуже довгий, то на процеси, що протікають в його середній частині, головний вплив здійснює початковий розподіл температури, а вплив температурних умов на кінцях стрижня протягом досить тривалого часу майже не буде позначатися. Граничні умови при цьому відпадають. На шукану функцію $T(x, t)$ накладається тільки початкова умова

$$T(x, t) \Big|_{t=0} = f(x), \quad (8.64)$$

де функція $f(x)$ визначена на всій числовій осі. Завдання розв'язання рівняння (8.63) з початковими умовами (8.64) називається задачею з початковою умовою, або задачею Коші.

Для спрощення вихідної задачі введемо замість часу нову змінну $t^1 = a^2 t$.
Тоді

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial T}{\partial t^1},$$

і вихідне рівняння (8.58) набуде вигляду

$$\frac{\partial T}{\partial t^1} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (8.65)$$

Для розв'язання задачі (8.64) – (8.65) застосуємо метод розділення змінних і суперпозиції окремих розв'язків Фур'є. Подамо розв'язки у вигляді множення функцій, що залежать тільки від однієї з незалежних змінних $T(x, t^1) = X(x)U(t^1)$.

Підставляючи добуток функцій замість $T(x, t^1)$ в рівняння (8.65), отримуємо

$$X(x)U'(t) = X''(x)U(t^1) \quad (8.66)$$

або

$$\frac{U'(t^1)}{U(t^1)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Обидві частини останнього рівняння повинні бути постійними, оскільки його ліва частина не залежить від x , а права – від t^1 , тобто ні ліва, ні права частини не можуть залежати ні від x , ні від t^1 . У цьому міркуванні – ключ до методу Фур'є. Позначивши постійну, якій повинні бути рівні і ліва і права частини рівності (8.61), через C маємо рівняння:

$$\frac{U'(t^1)}{U(t^1)} = C; \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = C. \quad (8.67)$$

Перше з них має загальний розв'язок $U'(t^1) = Ce^{Ct^1}$. Оскільки ні в одному перерізі стрижня (тобто ні при якому фіксованому x) температура $T(x, t^1) = X(x)U(t^1)$ не може необмежено зростати за абсолютною величиною при $t^1 \rightarrow \infty (t \rightarrow \infty)$, C_1 повинно бути від'ємним. Позначимо $C_1 = -\lambda^2$ тоді $U(t^1) = Ce^{-\lambda^2 t^1}$.

Друге з рівнянь (8.67) набуває вигляду $X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$ і має загальний розв'язок $X(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x$.

Таким чином отримуємо окремий розв'язок рівняння (8.64)

$$T(x, t^1) = (AC \cos \lambda x + BC \sin \lambda x) e^{-\lambda^2 t^1}$$

або

$$T(x, t^1) = (\alpha \cos \lambda x + \beta \sin \lambda x) e^{-\lambda^2 t^1}. \quad (8.68)$$

Тут $\alpha = AC, \beta = BC, \lambda$ – довільні постійні. Функція (8.68) є при будь-якому фіксованому λ – розв'язок рівняння (8.64). Це означає, що α і β можуть бути довільними функціями від $\lambda: \alpha = \alpha(\lambda); \beta = \beta(\lambda)$, так що остаточно маємо сім'ю окремих розв'язків рівняння (8.64) $T_\lambda(x, t^1) = [\alpha(\lambda) \cos \lambda x + \beta(\lambda) \sin \lambda x] e^{-\lambda^2 t^1}$, залежного від параметра λ , який може приймати всі значення на проміжку $[-\infty; +\infty]$. Тому функція

$$T(x, t^1) = \int_{-\infty}^{+\infty} T_\lambda(x, t^1) d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} [\alpha(\lambda) \cos \lambda x + \beta(\lambda) \sin \lambda x] e^{-\lambda^2 t^1} d\lambda \quad (8.69)$$

також є розв'язком рівняння (8.63). Залишається тільки підібрати невідомі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ так, щоб розв'язок задовольняв початкову умову (8.64), тобто щоб

$$T(x, t^1) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\alpha(\lambda) \cos \lambda x + \beta(\lambda) \sin \lambda x] e^{-\lambda^2 t^1} d\lambda = f(x).$$

Остання рівність означає, що функцію $f(x)$ треба розкласти в інтеграл Фур'є. Це розкладання можливе, якщо $f(x)$ абсолютно інтегровна по всій осі

ОХ, тобто інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ збігається. Ця умова означає скінченність теплової енергії стрижня. Тому, розкладаючи функцію $f(x)$ в інтеграл Фур'є

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda(x - \xi) d\xi$$

і враховуючи, що $\cos \lambda(x - \xi) = \cos \lambda x \cos \lambda \xi + \sin \lambda x \sin \lambda \xi$, отримуємо

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi d\xi \right) \cos \lambda x \right\} + \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \sin \lambda \xi d\xi \right) \sin \lambda x \right\} d\lambda.$$

Невідомі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ визначаються за формулами

$$\alpha(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi d\xi;$$

$$\beta(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \sin \lambda \xi d\xi.$$

Підставляючи вирази для $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ в розв'язок (8.69), отримуємо функцію

$$\begin{aligned}\theta(x, t^1) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \{ \cos \lambda x \cos \lambda \xi + \sin \lambda x \sin \lambda \xi \} e^{-\lambda^2 t^1} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2 t^1} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda(x - \xi) d\xi,\end{aligned}$$

що задовольняє одночасно і рівняння (8.63), і початкову умову (8.64).

Для того щоб розв'язок (8.69) можна було фізично пояснити, перетворимо його, змінюючи порядок інтегрування:

$$T(x, t^1) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \lambda(x - \xi) e^{-\lambda^2 t^1} d\lambda \right\} d\xi.$$

Зробивши заміну змінної $\lambda = \sigma\sqrt{t}$, і вводячи позначення $\frac{x - \xi}{\sqrt{t}} = \varpi$,

$$\text{отримуємо } \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \lambda(x - \xi) e^{-\lambda^2 t^1} d\lambda = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma^2} \cos \sigma \varpi d\sigma = \frac{1}{\sqrt{t}} I(\varpi).$$

Інтеграл $I(\varpi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma^2} \cos \sigma \varpi d\sigma$ називається інтегралом Пуассона.

Його значення дає вираз $I(\varpi) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{\varpi^2}{4}}$ або

$$T(x, t^1) = \frac{1}{2a} \sqrt{t} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{(x - \xi)^2}{4t^1}} d\xi.$$

Повертаючись до вихідної задачі (8.58) – (8.59), отримуємо

$$T(x, t) = \frac{1}{2a} \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \exp \left[-\frac{(x - \xi)^2}{4a^2 t} \right] d\xi.$$

Розглянемо фізичний зміст отриманого розв'язку.

Функція

$$\Phi_{\xi}(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \exp \left[-\frac{(x - \xi)^2}{4a^2 t} \right],$$

яка є розв'язком вихідного рівняння, називається фундаментальним розв'язком рівняння теплопровідності. Він має важливий фізичний зміст; пов'язаний з поняттям фізичного імпульсу. Фізичним тепловим імпульсом називається такий

початковий розподіл температури, при якому в стрижень введено деяку кількість теплоти на відрізку від $(x_0 - \xi)$ до $(x_0 + \xi)$ так, що температура цього відрізка в момент часу $t = 0$ піднімається до значення U_0 , кількість теплоти Q_0 пропорційна заштрихованій на рис. 8.18 площі $2\xi U_0$. Спрямовуючи $\xi \rightarrow 0$ перейдемо від фізичного теплового імпульсу до точкового. Тоді

$$T(x,t) = \left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \right) \exp \left[-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2 t} \right].$$

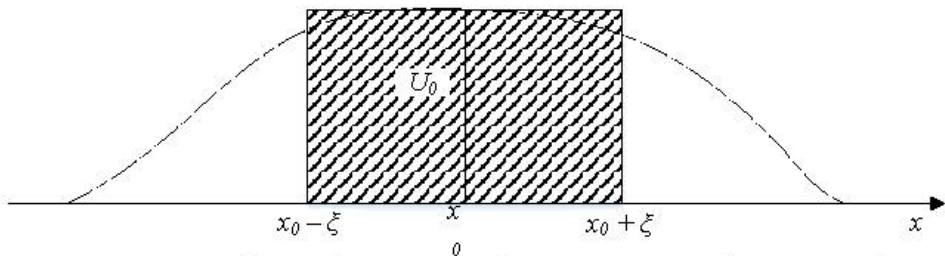


Рисунок 8.18 – Фізична інтерпретація розв'язку задачі теплопровідності

Поширення теплоти в стрижні після точкового імпульсу здійснюється за кривими Гауса. Максимальна температура буде в тій точці стрижня, де прикладений імпульс $(x - x_0)^2$. У фіксований момент $t > 0$ максимальна температура обернено пропорційна коефіцієнту теплопровідності $a = \sqrt{\frac{\lambda^2}{c\rho}}$. Якісно це очевидно з фізичних міркувань: у кожен момент часу, максимальна температура у стрижні буде тим менша, чим більший коефіцієнт теплопровідності λ і чим менша питома теплоємність C і щільність ρ матеріалу стрижня (рис. 8.18).

У кожній фіксованій точці $x \neq x_0$ функція $T(x,t)$ часу t спочатку зростає від $t=0$ до деякого максимального значення $T(x)$, а потім монотонно спадає, прагнучи до нуля при $t \rightarrow \infty$ (рис. 8.19). Максимально досяжна температура в точці $x = x_0$ стрижня обернено пропорційна відстані від точки прикладання імпульсу, а час, необхідний для досягнення максимальної температури, прямо пропорційний квадрату вказаної відстані (рис. 8.20.)

Метод Фур'є формально непридатний для неоднорідного рівняння теплопровідності і неоднорідності граничних умов. Застосування цього методу стане можливим, якщо перетворити задачу шляхом приведення граничних умов до однорідних.

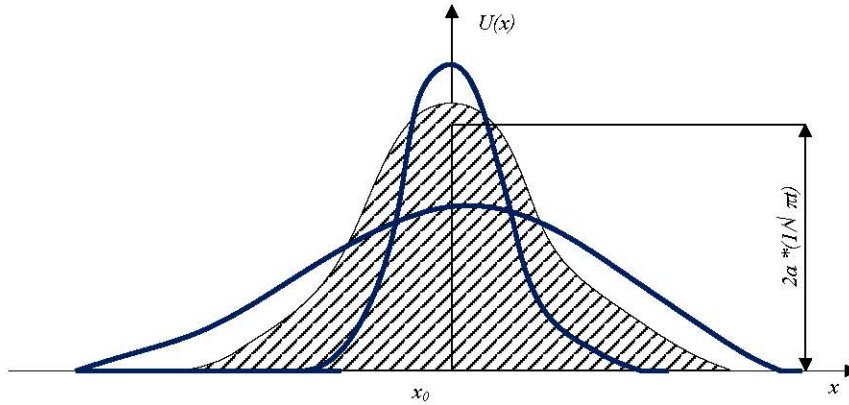


Рисунок 8.19 - Поширення теплоти в стержні після впливу теплового імпульсу

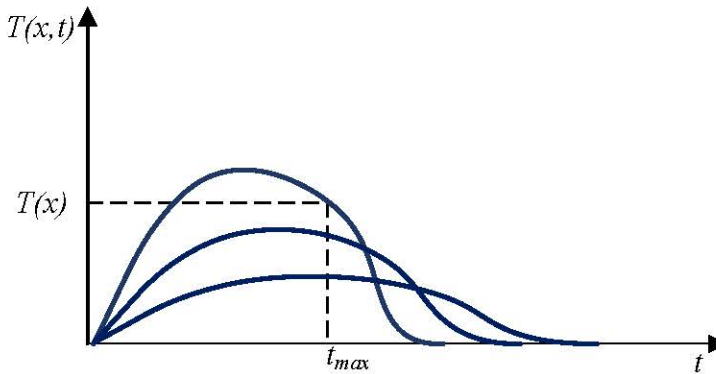


Рисунок 8.20 – Залежність температури від часу у фіксованій точці

Метод інтегральних перетворень

До переваг методу інтегральних перетворень слід віднести можливість безпосереднього застосування методу як до однорідних, так і до неоднорідних крайових задач, однаковість методики і значне спрощення у зв'язку з простішою технікою обчислення, що властива саме інтегральним методам. При наявності прямих і обернених для даного виду перетворень техніка розв'язання спрощується до застосування стандартних прийомів, що ведуть до розв'язання задачі коротким шляхом і в простішому вигляді, ніж у методі розділення змінних.

Метод інтегральних перетворень застосовується тільки до лінійних диференціальних рівнянь з лінійними граничними умовами.

Суть методу інтегральних перетворень.

Нехай потрібно визначити функцію $T(x, y, z, t)$, що задовольняє в області $\Omega = (a < x < b)$, $y, z \in G$; $t > 0$ диференціальне рівняння теплопровідності (нестационарне або стаціонарне) із заданими початковими і граничними умовами. Розв'язання задачі помітно спрощується, якщо замість

безпосереднього визначення функції шукати попередньо її інтегральне перетворення, обумовлене формулою

$$T(\xi, y, z, t) = \int_a^b T(x, y, z, t) k(x, \xi) dx, \quad (8.70)$$

де $c < \xi < d$; $k(x, \xi)$ – обрана функція, визначена в області ($a < x < b$, $c < \xi < d$), яка зветься ядром інтегрального перетворення.

В результаті інтегрального перетворення отримуємо деяку нову функцію $T(\xi, y, z, t)$, яка вже не залежить від x та називається інтегральною трансформантою, зображенням або образом функції $T(x, y, z, t)$. Початкова функція $T(x, y, z, t)$ називається оригіналом трансформанти $T(\xi, y, z, t)$, змінна x називається змінною перетворення. Межі a й b (відповідно c і d) можуть бути як скінченними, так і нескінченними. У першому випадку перетворення (8.70) називається інтегральним перетворенням із скінченними межами, а у другому застосування перетворення еквівалентно деякому перетворенню за декількома змінними

$$T(\xi, y, v, \eta) = \int_a^b \int_{G_0}^{\infty} R(x, \xi, z, v, t, \eta) T(x, y, z, t) dx dz dt,$$

що називається кратним інтегральним перетворенням.

Перетворення, коли деяка функція $T(\xi, y, z, t)$ знову перетвориться у функцію $T(x, y, z, t)$, називається зворотним інтегральним перетворенням до (8.70). Відповідна формула, яка дає перехід від зображень до оригіналів, називається формулою зворотання:

$$T(x, y, z, t) = \int_c^d R(x, \xi) T(\xi, y, z, t) d\xi.$$

Основна ідея застосування інтегрального перетворення (8.70) до задач з диференціальними рівняннями у частинних похідних полягає у виборі ядер $k(x, \xi)$ і $R(x, \xi)$ таким чином, щоб диференціальні операції за змінною перетворення у вихідній задачі змінити алгебраїчними операціями в перетвореній задачі. При цьому вибір ядра $R(x, \xi)$ інтегрального перетворення здійснюється відповідно до диференціального рівняння і граничних умов задачі, тобто з урахуванням геометричної форми тіла і закону його теплової взаємодії з навколишнім середовищем.

Інтегральні перетворення, що застосовуються для розв'язання задач теплопровідності, можна розділити на два класи: інтегральні перетворення за часом t та інтегральні перетворення за просторовими змінними. Це обумовлено

тим, що рівняння теплопровідності є рівнянням першого порядку щодо змінної t , тоді як відносно просторових координат – це рівняння другого порядку. Причому час змінюється в межах від нуля до нескінченності ($0 \leq t < \infty$), що дає можливість застосувати по змінній t інтегральне перетворення одного вигляду незалежно від геометрії розглянутого тіла і вигляду граничних умов. Цей клас перетворень становить операційне числення. Трансформанта температури по t визначається за формулою:

$$\bar{T}(M, p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} T(M, t) dt, \quad p = \sigma + iw, \quad (8.71)$$

або

$$\bar{T}(M, p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} T(M, t) dt. \quad (8.72)$$

Перетворення (8.71) називається перетворенням Лапласа. Перетворення Лапласа – Карсона (8.72) відрізняється від першого лише множником p перед інтегралом.

Для того, щоб зображення $T(M, p)$ існувало, інтеграли (8.71)– (8.72) повинні збігатися. Це накладає певні обмеження на функцію температури $T(M, t)$, властивості якої в більшості поширених на практиці випадків задовольняють умови існування зазначених інтегралів.

Якщо задачу розв'язано в зображеннях, то зворотне перетворення у загальному випадку виконується за формулою зворотання:

$$T(M, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{pt} \bar{T}(M, p) dp. \quad (8.73)$$

Інтегрування відбувається в комплексній площині $p = \sigma + iw$ вздовж прямої $\sigma = const$, паралельної уявній осі. Дійсні числа σ вибираються так, щоб всі особливі точки підінтегрального виразу розташовувалися в лівій півплощині комплексної площини p .

Знаходження оригіналу функції за її зображенням може бути отримано в елементарних функціях, якщо трансформанта подана у вигляді ряду за від'ємними степенями p :

$$\bar{T}(M, p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k(M)}{p^{k+1}}.$$

Тоді оригінал $T(M, t)$ також подається у вигляді ряду

$$\bar{T}(M, p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k(M)t^k}{k!}.$$

Якщо зображення є дробовою функцією

$$T(M, p) = \frac{T_1(M)\Phi(p)}{\psi(p)} = T_1(M) \frac{a_0 + a_1p + a_2p^2 + \dots}{b_0 + b_1p + b_2p^2 + \dots},$$

то за теоремою розкладання маємо

$$T(M, t) = \sum_{n=1}^k \frac{\Phi(p)}{\psi(p)} T_1(M) e^{-P_n t},$$

де P_n – прості корені функції $\psi(p)$, при цьому знаменник має зліченну кількість простих коренів.

Якщо степінь полінома $\Phi(p)$ менше степені полінома $\psi(p)$ і серед коренів $\psi(p)$ існують кратні в точках $\psi(p_m)$, то

$$T(M, t) = \sum_{m=1} \frac{T_1(M)}{(k-1)!} \lim_{p \rightarrow p_m} \left\{ \frac{d^{k-1}}{dp^{k-1}} \left[\frac{\Phi(p)(p-p_m)^k}{\psi(p)} e^{-Pt} \right] \right\},$$

де сума береться за всіма коренями $T(m, p)$.

В найзагальнішому випадку оригінал $T(M, t)$ може бути знайдено за формулою

$$T(M, t) = \sum_m \operatorname{res} \left\{ e^{P\tau}, \bar{T}(M, p) \right\} \Big|_{P=P_m},$$

де додавання виконується за всіма особливими точками P_m функції $\bar{T}(M, p)$.

У тих випадках, коли не можна отримати аналітичний вираз для оригіналу, використовують наближені формули згортання перетворення Лапласа, серед яких можна виділити співвідношення

$$T(t) \approx \frac{(-1)^n (n+k)^{n+k+1}}{\Gamma(n+k+1)(t-t_0)^{n+1}} \left\{ T(p) e^{-Pt} \right\}^n \Big|_{P=\frac{n+k}{t-t_0}},$$

де $n \in N$; $k \in R$; $\Gamma(z)$ – гамма-функція.

Приклад. Знайти розподіл температур $T(M, t)$ в напівобмеженому тілі по глибині x ($0 \leq x \leq \infty$), $M(x)$, якщо на границі його підтримується задана температура $q(t)$, а початкова температура тіла дорівнює нулю, тобто знайти розв'язок рівняння

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a^2 \left[\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \right],$$

що задовольняє умови $x \geq 0, \quad t \geq 0$.

Нехай $T(x,0) = 0, \quad T(0,t) = q(t)$. Шукана функція $T(x,t)$ і її похідні є оригіналами (за змінною t).

Введемо позначення

$$\bar{T}(x,p) = L[T(x,t)] = \int_0^{\infty} T(x,t) e^{-pt} dt.$$

Тоді за правилом диференціювання оригіналів отримуємо з урахуванням початкових умов

$$L\left[\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}\right] = p\bar{T}(x,p),$$

$$L\left[\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}\right] = \frac{\partial^2 \bar{T}(x,p)}{\partial x^2};$$

$$\bar{T}(0,p) = Q(p) = L[q(t)].$$

Переходимо до наступної задачі відносно трансформанти шуканої функції:

$$p\bar{T}(x,p) = a^2 \left[\frac{\partial^2 \bar{T}(x,p)}{\partial x^2} \right]; \quad (8.74)$$

$$\bar{T}(0,p) = Q(p). \quad (8.75)$$

З урахуванням того, що в рівнянні (8.74) p – параметр, знаходимо розв'язок звичайного диференціального рівняння зі змінною x . Оскільки характеристичне рівняння $a^2 k^2 - p = 0$ має корені $k_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{p}{a}}$, то

$$T(x,p) = c_1 \exp\left(\sqrt{\frac{p}{a}}x\right) + c_2 \exp\left(-\sqrt{\frac{p}{a}}x\right) \text{ є загальним розв'язком рівняння (8.74).}$$

Функція $T(x,p)$ повинна бути обмежена при $x \rightarrow \infty$, тому $c_1 = 0$. З умови (8.75) знаходимо постійну

$$T(0,p) = Q(p) = c_2.$$

Отже, розв'язком рівняння (8.74), що задовольняє умову (8.75), буде функція $T(x, p) = Q(p)e^{-\left(\sqrt{\frac{p}{a}}\right)x}$. Запишемо отриманий розв'язок у вигляді

$$T(x, p) = pQ(p)\frac{1}{p}e^{-\left(\sqrt{\frac{p}{a}}\right)x}.$$

Тоді з застосуванням інтеграла Дюамеля

$$\frac{1}{p}e^{-\left(\sqrt{\frac{p}{a}}\right)x} = L\left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right] \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right),$$

отримуємо для $T(x, t)$ вираз

$$T(x, t) = q(t)\operatorname{erfc}(\infty) + \int_0^1 \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \right]_t^1 q(t - \tau) d\tau.$$

Тут

$$\operatorname{erfc}(\infty) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-U^2} du = 0$$

$$\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{\tau}}\right) \right]_{\tau}^1 = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{\tau}}} e^{-U^2} du = \frac{\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)\left(\frac{x}{2a}\right)}{2} \sqrt{t^3} e^{\frac{-x}{4a^2\tau}} \dots$$

Таким чином, шуканий розв'язок має вигляд

$$T(x, \tau) = \frac{1}{2} a \sqrt{\pi} \int_0^{\frac{t}{\varepsilon^2}} \frac{q(t - \tau)}{\varepsilon^2} e^{\frac{-x}{4a^2\tau}} d\tau.$$

Інтегральні перетворення за просторовими змінними обираються залежно від геометричної форми тіла і граничних умов вихідної задачі. При цьому з диференціального рівняння теплопровідності вилучаються другі частинні похідні за просторовими змінними шляхом заміщення лінійним виразом відносно шуканої функції і граничними функціями задачі.

Послідовне застосування інтегральних перетворень за всіма просторовими змінними перетворює вихідне диференціальне рівняння в частинних похідних в звичайне лінійне диференціальне рівняння.

Найбільш уживаним в теорії теплопровідності є інтегральні перетворення, наведені в табл. 8.1. Особливістю інтегральних перетворень, окрім перетворень Фур'є, є наявність нескінченної верхньої границі. Тому їх можна застосовувати

тільки до крайових задач теплопровідності для тіл з напівобмеженою протяжністю. При цьому вибір відповідного інтегрального перетворення при розв'язанні крайової задачі визначається виглядом граничної умови при $x=0$. Перетворення Хенкеля застосовується для симетричних тіл; перетворення Мелліна використовується при розв'язанні стаціонарних крайових задач теплопровідності в секторальних областях; перетворення Меллера-Фока дає можливість розв'язувати теплові задачі, пов'язані з інтегруванням рівняння Лапласа і Пуассона для області, що обмежена двома сферами, що перетинаються, і областей, які обмежені одним або двома співфокусними гіперболоїдами обертання; перетворення Канторовича-Лебедева і його різноманітні модифікації можна використовувати для областей, що обмежені поверхнею двогранного кута або конуса.

Практичне застосування названих інтегральних перетворень суттєво полегшується наявністю таблиць прямих і обернених перетворень різних функцій, які часто зустрічаються в конкретних задачах.

Розглянемо техніку застосування інтегральних перетворень до розв'язання задачі теплопровідності для напівнескінченного стрижня:

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}; 0 < x < \infty; 0 \leq \tau < \infty \\ T(x, t)|_{(t)=0} = \psi(t); \left. \frac{\partial^k T}{\partial x^k} \right|_{x=0} = 0; k = 0, 1 \\ T(x, t)|_{(t)=0} = \Phi(x) \end{cases} \quad (8.76)$$

Тут для виключення x необхідно скористатися одним з перетворень, визначених на напівнескінченному інтервалі. Таких перетворень декілька (див. табл. 8.1). Однак, враховуючи відмічену вище характерну властивість перетворень Фур'є, увагу слід звернути на відзначену вище характерну особливість перетворення Фур'є. Із двох названих перетворень слід використати перетворення похідних (див. табл. 8.1), що містить окрім трансформанти граничне значення похідної.

Множення виразу (8.76) на $k(\alpha, x) = \sin(\alpha x)$ і інтегрування за x на інтервалі $(0; \infty)$, дає

$$\frac{\partial}{\partial t} T(\alpha, t) = a^2 \left[-\alpha^2 T(\alpha, t) + \alpha T(x, t) \Big|_{x=0} \right].$$

Враховуючи тут граничну умову (8.76) отримуємо крайову задачу

$$\frac{\partial}{\partial \tau} T(\alpha, \tau) + a^2 \alpha^2 T(\alpha, \tau) = a^2 \alpha \psi(\tau); \quad (8.77)$$

$$T(\alpha, \tau) = \Phi(\alpha); \quad (8.78)$$

$$[T(\alpha, \tau)\Phi(\alpha)] = \int_{-\infty}^{\infty} [T(x, \tau)\Phi(x)] \sin(\alpha x) dx. \quad (8.79)$$

Таблиця 8.1 Основні інтегральні перетворення

Найменування	Проміжок інтегрування (a, b)	Ядро перетворення $k(\alpha, x)$	Формула перетворення $L^{-1}[F(\alpha)]$	Перетворення операцій $L[f(x)]$ ы
Фур'є: exp	$(-\infty, \infty)$	$e^{i\alpha x}$	$f(x) = \frac{1}{2} \pi \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{i\alpha x} dx$	$\int_{-\infty}^{\infty} f^{(k)}(x) e^{i\alpha x} dx = F(\alpha)$; $f^{(k)}(x)_{x \rightarrow \pm\infty} = 0$; $k \in N$
exp обмежене	$(-\pi, \pi)$	e^{inx}	$f(x) = \frac{1}{2} \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n) e^{inx}$	$\int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(x) e^{inx} dx = (-in)^k F(n) + (-1)^k \sum_{k=0}^{m-1} (-in)^{m-1-k} \left[f^{(k)} \left(\frac{\pi}{-f^{(k)}(-\pi)} \right) \right]$
cos	$(0, \infty)$	$\cos \alpha x$	$f(x) = \frac{1}{2} \pi \int_0^{\infty} F(\alpha) \cos \alpha x dx$	$\int_0^{\infty} f''(x) \cos \alpha x dx = -d^2(F(\alpha) - f(x)) \Big _{x=0}$ $f^{(k)}(x)_{x \rightarrow 0} = 0$
cos обмежене	$(0, \pi)$	$\cos nx$	$f(x) = \frac{f(0)}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cos nx$	$\int_0^{\pi} f''(x) \cos nx dx = -n^2 F(n) + (-1)^n f'(\pi) - f'(0)$
sin	$(0, \infty)$	$\sin \alpha x$	$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F(\alpha) \sin \alpha x dx$	$\int_0^{\pi} f''(x) \sin \alpha x dx = -dF(\alpha) + \alpha f(x) \Big _{x=0}$; $f^{(k)}(x) \Big _{x \rightarrow \infty} = 0$
sin обмежене	$(0, \pi)$	$\sin nx$	$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sin nx$	$\int_0^{\pi} f''(x) \sin nx dx = -n^2 F(n) + n \left[(-1)^{n+1} f(\pi) + f(0) \right]$

Лапласа	$(0, \infty)$	$e^{-\lambda x}$	$f(x) = \frac{1}{2} \pi i \int_{\gamma_0 - j\infty}^{\gamma_0 + j\infty} F(\alpha) e^{\alpha x} d\alpha$	$f^{(m)}(x) e^{-\alpha x} dx = \alpha^m F(\alpha) - \sum_{k=0}^{m-1} \alpha^{m-k-1} f(x) _{x=0};$ $ f(x) < M e^{\gamma_0 x}$
Ханкеля	$(0, \infty)$	$x T(\alpha, x)$	$f(x) = \int_0^{\infty} \alpha F(\alpha) I_\nu(\alpha x) d\alpha$	$\int_0^{\infty} \left[f''(x) + \frac{1}{x} f'(x) - \frac{\nu^2}{x^2} f(x) \right] x I_\nu(\alpha x) dx =$ $= \alpha^2 F(\alpha), \quad \nu > -1$
Мелліна	$(0, \infty)$	$x^{\alpha-1}$	$f(x) = \frac{1}{2} \pi i \int_{\gamma_0 - j\infty}^{\gamma_0 + j\infty} F(\alpha) x^{-\alpha} d\alpha$	$\int_0^{\infty} [x^2 f''(x) + x f'(x)] x^{\alpha-1} dx = \alpha^2 f(\alpha), \quad \gamma_1 < \gamma < \gamma_2$
Канторо- вича- Лебедєва	$(0, \infty)$	$K i \tau$	$T(x \nu \varphi) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\infty} \bar{T}(\tau, \varphi) \tau \operatorname{sh} \tau x$ $x \pi \mathcal{K}_{i\tau}(\gamma x) d\tau$	$\int_0^{\infty} T(x \gamma \varphi) \frac{K_{i\tau}(\gamma x)}{x} dx = \frac{d^2 \bar{T}}{d\varphi^2} - \tau^2 \bar{T}$
Меллера – Фока	$(1, \infty)$	$P \frac{1}{2} + i \tau(x)$	$f(x) = \int_1^{\infty} \bar{f}(\tau) \tau d\tau P \frac{1}{2} + i \tau(x)$	$\int_1^{\infty} f(x) P \frac{1}{2} + i \tau(x) dx = \left(\tau^2 + \frac{1}{4} \right) \bar{f}(\tau)$
Лапласа – Карсона	$(0, \infty)$	e^{-Pt}	$f(x) = \frac{1}{2} \pi i \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} e^{-Pt} \frac{F(p)}{P} dP$	$\int_0^{\infty} P e^{-Pt} f^{(k)}(t) dt = F(p) - \sum_{n=1}^{k-1} P^{k-1-n} f(t) _{t=0}$

Загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (8.77) запишемо у вигляді

$$T(\alpha, \tau) = a^2(\alpha) \int_0^\tau e^{-a^2 \alpha^2 (\tau - \tau')} \psi(\tau') d\tau', \quad (8.80)$$

де $C(\alpha)$ довільна функція параметра перетворення; окремий розв'язок неоднорідного рівняння (8.80)

$$T(\alpha, \tau) = a^2 \alpha \int_0^\Phi e^{-a^2 \alpha^2 (\tau - \tau')} \psi(\tau') d\tau' \quad (8.81)$$

Підставляючи (8.80) в (8.79), знаходимо $C(\alpha) = \Phi(\alpha)$. Розв'язок вихідної крайової задачі отримуємо, застосовуючи до виразу (8.81) обернене перетворення Фур'є

$$T(x, \tau) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \Phi(\alpha) e^{-a^2 \alpha^2 x} \sin \alpha x dx + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty T(x, \tau) e^{-a^2 \alpha^2 x} \sin \alpha x dx. \quad (8.82)$$

Отриманий розв'язок виразимо через задані функції $\Phi(x)$ і $\psi(x)$. Для цього підставимо в формулу (8.82) інтегральні представлення (8.79) і (8.81) функцій $\Phi(x)$ і $T(\alpha, \tau)$.

Замінивши в отриманому виразі порядки інтегрування і скориставшись формулою

$$\sin ax \sin a\xi = \frac{1}{2} [\cos a(x - \xi) - \cos a(x + \xi)],$$

а також значеннями інтегралів

$$\int_0^\infty e^{-\beta y^2} \cos by dy = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} e^{-\frac{b^2}{4\beta}}; \quad \int_0^\infty ye^{-\beta y^2} \sin by dy = \frac{b}{4\beta} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} e^{-\frac{b^2}{4\beta}},$$

отримаємо кінцеве

$$T(x, t) \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \psi(\xi) \exp \left[-\frac{(x - \xi)^2}{4a^2 t} \right] - \exp \left[-\frac{(x + \xi)^2}{4a^2 t} \right] d\xi \right\} + x \int_0^\infty \psi(t) \exp \left[-\frac{x^2}{4a^2(t-t')} \right] \frac{dt}{\sqrt{(t-t')^3}}.$$

Якщо початкова температура стрижня дорівнює нулю, а на кінці підтримується постійна температура $\varphi(x) = 0$; $\psi(t) = T_0 = const$, то розв'язок має вигляд $T(x, t) = \frac{xT_0}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \exp \left[\frac{x^2}{4a^2(t-t')} \right] \frac{dt'}{\sqrt{(t-t')^3}}$; чи після заміни $\varepsilon = \frac{x^2}{4a^2(t-t')}$

$$T(x, t) = \frac{2T_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^\infty e^{-\varepsilon} dx = T_0 \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right), \quad (8.83)$$

де $\operatorname{erfc}(z)$ – функція, додаткова до інтегралу вірогідності і визначається співвідношенням $\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_z^\infty e^{-u^2} du$.

Метод функцій Гріна

Цей метод, як і всі попередні, застосуємо до рівнянь теплопровідності з лінійною крайовою умовою, але суттєво відрізняється від методу розділення і методу перетворення. Метод функцій Гріна універсальний – його можна застосовувати для розв'язання крайових задач при достатньо загальній постановці в одно-, дво-, і тривимірних випадках, в обмежених, напівобмежених і необмежених областях, при початкових і граничних умовах неоднорідних рівнянь, причому як для нестационарної, так і для стаціонарної теплопровідності. Ідея методу функцій Гріна достатньо проста: на початку знаходиться спеціальний розв'язок крайової задачі теплопровідності того ж типу (так звана функція Гріна $G(M, P, (t - t'))$), але більш простий, і через нього дається інтегральне подання розв'язку вихідної задачі.

При викладанні методу функцій Гріна будемо використовувати розв'язок, що відповідає миттєвому точковому джерелу теплоти та потужності $Q = c\rho$ в необмеженій області (x, y, z) . Такий розв'язок в теорії теплопровідності називається фундаментальним. Фундаментальний розв'язок рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\nabla^2 T(x, y, z, t), \quad |x|, |y|, |z| < \infty, t > 0$$

має вигляд

$$G(x, y, z, x', y', z', t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi at})^3} \exp\left[-\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}{4at}\right].$$

Воно дає розподіл температури в точці (x, y, z) необмеженої області в момент часу t , викликаний миттєвим точковим джерелом теплоти потужністю $Q = c\rho$, що діє в точці (x', y', z') в момент часу $t = 0$.

Очевидно, що функція має властивість симетрії

$$G(x, y, z, x', y', z', t) = G(x', y', z', x, y, z, t),$$

яка відбиває принцип взаємності: дія в точці $M(x, y, z)$ джерела теплоти, що знаходиться в точці $P(x', y', z')$, дорівнює дії в точці $P(x', y', z')$. Однак відносно змінної t така симетрія не спостерігається, що є наслідком незворотного теплового процесу у часі.

Математично миттєве точкове джерело теплоти, яке діє в момент часу $t=0$, записується за допомогою імпульсної дельта-функції Дірака.

Розглянемо розподіл миттєвих точкових джерел постійної потужності Q вздовж лінії $(x=x', y=y')$, паралельній осі z . Температуру, що є наслідком дії всіх цих джерел, визначимо шляхом інтегрування за змінною z виразу

$$G(x, y, z, x', y', z', t) = \frac{Q}{c\rho(\sqrt{\pi at})^3} \times \exp\left[-\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}{4at}\right].$$

Після інтегрування отримуємо

$$G(x, y, x', t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, z, x', y', z', t) dz = \frac{2Q}{c\rho at} \exp \left[-\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{4at} \right],$$

де Q – кількість теплоти, що виділяється на одиниці довжини цієї прямої.

Для миттєвого шуканого джерела потужністю Q , що діє в момент часу $t=0$, розміщено в площині, паралельній площині $x=0$, і проходить через точку, розподіл лінійних джерел потужністю Q дає наступний фундаментальний розв'язок:

$$G(x, x', t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, x', y', t) dy = \frac{Q}{c\rho(\sqrt{\pi at})^3} \exp \left[-\frac{x-x'}{4at} \right],$$

де Q – кількість теплоти, що виділяється на одиницю площі цієї площі.

Покажемо, що розв'язок крайової задачі нестационарної теплопровідності при достатньо загальній її постановці, в кінцевому результаті може бути зведений до розв'язання простішої задачі, а саме до знаходження відповідної функції Гріна.

Нехай $T(M, t)$ – температура деякого тіла, що займає область G , яка повинна бути знайденою в результаті розв'язання крайової задачі теплопровідності вигляду

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\nabla^2 T(M, t) + f(M, t); M \in G_0; (t > 0); \quad (8.84)$$

$$T(M, t) = \Phi_0 = \Phi_0(M); M \in G_0 \quad (8.85)$$

$$\frac{\beta_1 \partial T(M, t)}{\partial \vec{n}} - \beta_2 T(M, t) = -\phi(M, t); M \in S; t \geq 0;$$

де \vec{n} – зовнішня нормаль до $\beta_1^2 \beta_2^2 > 0$; $f(M, t) \in G$.

Розглянемо розподіл температури в даній області G_0 , спричинений дією миттєвого точкового джерела теплоти потужності $Q=c\rho$, розміщеного в точці $P(x', y', z')$ області G_0 в момент часу $(t - t')$. Вираз для температури, що описується функцією Гріна $G(M, P, (t - t'))$ в точці M області G_0 , такий

$$G(M, P, (t - t')) = \frac{1}{[2\sqrt{\pi a(t-t')}]^3} \exp \left[\frac{-(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}{4a(t-t')} \right] + q(M, P(t - t')). \quad (8.86)$$

Перший доданок правої частини цієї рівності характеризує собою дію миттєвого точкового джерела теплоти потужністю $Q=c\rho$ в точці $P(x', y', z')$ в момент часу $(t - t')$, але для нескінченної області. Для задоволення відповідних граничних умов на границі S області G_0 додамо функцію $q(M, P, (t - t'))$. Будемо вважати, що функція є розв'язком однорідного рівняння теплопровідності в області G_0 , $t > t'$ двічі неперервно диференційовна за координатами точки, неперервно диференційовна за часом і неперервна в

замкнутій області G_0 , і, окрім того, при $(t'=0)$ перетворюється в нуль в точках області G_0 .

Таким чином, функція $G(M, P, (t - t'))$ визначається рівністю (8.86) і задовольняє рівняння

$$\frac{\partial G}{\partial t} = a\Delta G; M \in G_0.$$

Завдяки тому, що t входить в формі $(t - t')$, то

$$\frac{\partial G}{\partial t} = a\Delta G(M, P, (t - t')); M \in G_0; t > t'.$$

Припустимо, що функція $G(M, P, (t - t'))$ має властивість симетрії відносно точок M, P тобто $G(M, P, (t - t')) = G(P, M, (t - t'))$, що визначає еквівалентність властивостей цієї функції за координатами точок M і P .

Розглянемо рівність

$$\frac{\partial}{\partial t} [T(M, t)G(M, P, (t - t'))] = \frac{\partial T}{\partial t} G + T \frac{\partial G}{\partial t} = a(G\Delta T - T\Delta G) + Gf. \quad (8.87)$$

Проінтегруємо її за областю G_0 (за координатами точки M):

$$\iiint_{G_0} \frac{\partial}{\partial t} [T, G] dv_M = \iiint_{G_0} (G\Delta T - T\Delta G) dv_M + \iiint_{G_0} Gf dv_M. \quad (8.88)$$

З використанням формули Гріна для оператора Лапласа, отримуємо

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

$$\iiint_{G_0} \frac{\partial}{\partial t} [T, G] dv_M = -a \iiint_S \left[T \left(\frac{\partial G}{\partial n_M} \right) - G \left(\frac{\partial T}{\partial n_M} \right) \right] dy_M + \iiint_{G_0} Gf d\vartheta_M.$$

Ці співвідношення мають місце при всіх $t' < t$ і, відповідно, їх можна проінтегрувати по t'

$$a \iiint_{G_0}^t \left[G \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right) - T \left(\frac{\partial G}{\partial n} \right) \right] \partial t' d\Omega + \iiint_{G_0}^t f(P, t) G(M, P, (t - t')) \partial t' d\vartheta + \iiint_{G_0} \Phi_0(P) G(M, P, t) d\Omega = T(M, t) \quad (8.89)$$

Отримана основна інтегральна формула для функції $T(M, t)$ дає подання довільних розв'язків рівнянь теплопровідності (8.84). Із формули (8.89) випливає, що будь-який розв'язок рівняння теплопровідності, двічі неперервно диференційовний за площинними координатами і неперервно диференційовний за часом t , буде аналітичною функцією площинних координат, а за часом мати похідну першого порядку.

Формула (8.89) не дає розв'язку крайової задачі (8.84), (8.85), оскільки для обчислення правої частини потрібно знати значення підінтегральної функції на поверхні S . Вимагатимемо тепер, щоб функція $G(M, P, (t - t'))$ на поверхні S задовольняла граничні умови типу (8.85)

$$\frac{\nu_1 \partial G(M, P, (t - t'))}{\partial \vec{n}} - \nu_2 G(M, P, (t - t')) = 0; M \in S; t > t'.$$

Звідси і з рівняння (8.84) отримуємо явні формули для розв'язку згідно вигляду граничних умов

$$T(M, t) = \iiint_{G_0} \Phi_0(P) G(M, P, (t - t')) dH + \iiint_{0, S}^t [T(M, P, t, t') dt' dy] + \\ + \iiint_{0, S}^t f(P, t') G(M, P, (t - t')) dt' dH,$$

де $T(M, P, t, t') = \phi(P, t)$ і для $\frac{\partial G}{\partial H}$ на всій частині граничної поверхні S має місце гранична умова:

I роду

$$T(M, t) = \varphi(M, t); M \in S; T \geq 0; G(M, P, (t - t')) = 0; t > t';$$

$$T(M, P, t, t') = \pm \frac{1}{2} \varphi(M, t') G(M, P, (t - t'));$$

II роду

$$\frac{\partial T(M, t)}{\partial H} = \left(\frac{1}{\gamma}\right) \varphi(M, t); M \in S; t > 0;$$

$$\frac{\partial G(M, P, (t - t'))}{\partial H} + \left(\frac{1}{\gamma}\right) G(M, P, (t - t')) = 0;$$

III роду

$$\frac{\partial T(M, t)}{\partial H} + \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right) T(M, t) = \left(\frac{1}{\lambda}\right) \psi(M, t); M \in S; t' \geq 0; t \geq 0;$$

$$\frac{\partial G(M, P, (t - t'))}{\partial H} + \left(\frac{1}{\lambda}\right) G(M, P, (t - t')) = 0.$$

Тут $G(M, P, (t - t'))$ – функція Гріна відповідної крайової задачі. Таким чином, для кожної із крайових задач встановлена інтегральна формула розв'язання і з'ясовано, які умови повинна задовольняти функція $T(M, P, (t - t'))$.

Нехай $q(M, P, (t - t'))$ як функція точки M і часу t є розв'язком однорідного рівняння теплопровідності. Тоді, якщо функція $G(M, P, (t - t'))$ у вигляді (8.86) при $t \rightarrow t'$ поза точкою перетворюється в нуль, а на боковій поверхні S області G_0 задовольняє нульову крайову умову якоїсь із крайових задач для рівняння теплопровідності, то вона називається функцією Гріна відповідної крайової задачі в області G_0 . Із попереднього стає зрозумілим і фізичний зміст функції Гріна $G(M, P, (t - t'))$. В кожній з крайових задач вона є

температурою в точці P в момент t' , що виникла внаслідок дії миттєвого точкового джерела теплоти потужності cp , що діє в точці M у момент часу t (до цього моменту часу температура тіла дорівнювала нулю) за умови, що на границі розглянутого тіла у всі наступні моменти часу виконуються однорідні умови, що відповідають нульовим значенням граничних функцій крайової задачі.

Звідси випливає друге найменування функції – функція впливу миттєвого точкового теплового джерела. З точки зору фізичного змісту функції Гріна, маємо для $G(M, P, (t - t'))$ крайову задачу, що відповідає заданій у (8.84) – (8.85):

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial t} &= a \nabla^2 G(M, P, (t - t')); \quad M \in S; \quad t > t' \\ G|_{t=t'} &= d(M, P); \quad M \in G_0 \\ \left(\mathbf{v} \frac{\partial G}{\partial n} - \mathbf{v}_2 G \right) \Big|_{M \in S} &= 0; \quad t > t', \end{aligned}$$

де $d(M, P)$ – дельта-функція. В декартових координатах ця функція має вигляд $d(M, P) = d(x - x')d(y - y')d(z - z')$.

Метод функцій Гріна широко застосовується також і для розв'язання крайових задач стаціонарної теплопровідності. В цьому випадку метод розглядається як частина добре розробленої теорії, відомої як теорія потенціалу.

Приклад. По поверхні напівнескінченного тіла в додатному напрямі осі рухається нескінченно довге смугове джерело теплоти шириною $2h$. Щільність теплового потоку рівномірно розподілена по всій поверхні джерела. Вважаємо поверхню $x=0$ теплоізолюваною. Математичне формулювання задачі таке:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right);$$

$$l \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = q(x, t); \quad (-h < z < h); \quad T(x, z, 0) = 0.$$

Розв'яжемо задачу методом функції Гріна.

Дія елементарного джерела описується функцією Гріна

$$T(x, y, z, t, x', y', z') = \left(\frac{2Q}{cc(4\pi at)^{\frac{3}{2}}} G(x - x'; y - y', z - z', t) \right), \quad (8.90)$$

де Q – кількість теплоти, що виділяється в точці з x', y', z' ; c – питома теплоємність; s – густина.

Функція Гріна

$$G((x - x'), (y - y'), (z - z'), t) = \exp \left[-\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}{4at} \right].$$

Оскільки джерело рухається в додатному напрямку осі z , то координата z' змінюється на величину vt . Тому при інтегруванні виразу (8.90) за y' від $-\infty$ до ∞ і по часу від 0 до ∞ , отримуємо

$$T(x, y, z, t) = \int_0^{2h} dz \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_0^t \left[\frac{2Q}{cc(4\pi at)^{\frac{3}{2}}} \right] \exp \left[-\frac{(x^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 + vt)^2}{4at} \right] dt.$$

Такий розв'язок описує температурне поле смугового джерела в процесі насичення. Перетворимо цей вираз до простішого вигляду. Для цього введемо нові змінні $z = z - z'$:

$$dz_1 = -dz', \quad \frac{z_1 V t}{2\sqrt{at}} = u; \quad du = \frac{dz_1}{2\sqrt{at}};$$

$$u_1 = z + \frac{vt}{2\sqrt{at}}; \quad u_2 = \frac{z + 2h + vt}{2\sqrt{at}}.$$

Проінтегруємо по змінній y , при $x=0$, що відповідає значенню температури $T(0, y, t)$ на поверхні напівнескінченного тіла. Отримуємо

$$T = \frac{q}{2\pi\lambda} \int_0^t \sqrt{\frac{pa}{t}} [\Phi(u) - \Phi(u_1)] dt,$$

де Φ – функція Лапласа. Аргументи u_1 і u_2 завжди додатні. За великих аргументів можна вважати, що $\Phi(u) = 1$. Тому температурне поле в процесі насичення може бути розраховане за формулою:

$$T = \frac{q}{2\pi\lambda} \int_0^t \sqrt{\frac{pa}{t}} [1 - \Phi(u_1)] dt.$$

8.2.2. Рівняння гіперболічного типу і їх роль в моделюванні динамічних процесів

Гіперболічні рівняння описують ряд важливих задач, що виникають при моделюванні технічних систем. Велика кількість вузлів і деталей працює в різко нестаціонарних режимах внаслідок швидкої зміни в часі збурювальних сил. При цьому в конструкціях виникають динамічні напруги, які повинні враховуватися при виборі оптимальних умов функціонування елементів.

Аналіз перехідних явищ в електро- і радіотехнічних системах також приводить до вивчення закономірностей, описуваних рівняннями гіперболічного типу. Особливо великою мірою даний тип рівнянь використовується при розгляді таких явищ, як коливання, вібрація, хвильові процеси. Характерною особливістю згаданих процесів є скінченна швидкість їх поширення. Завдяки цьому дані явища можуть бути описані диференціальними рівняннями гіперболічного типу.

Рівняння малих поперечних коливань струни

Кожну точку струни довжини l можна охарактеризувати значенням її абсиси x . Опис процесу коливання струни може бути проведено за допомогою задання положення точок струни в різні моменти часу. Для визначення положення струни в момент часу t достатньо задати компоненти вектора зміщення $\{U_y(x, t), U_z(x, t)\}$ точки x в момент t . Розглянемо просту задачу про коливання струни. Будемо припускати, що зміщення струни лежать в одній площині (x, U) і що вектор зміщення U перпендикулярний в будь-який момент до осі x ; тоді процес коливання можна описати однією функцією $U(x, t)$, що характеризує вертикальне переміщення струни. Будемо розглядати струну як гнучку пружну нитку. Математичний вираз поняття гнучкості полягає в тому, що напруги, які виникають у струні, завжди спрямовані по дотичних до її миттєвого профілю (рис. 8.21). Ця умова відображує те, що струна не чинить опір вигину.

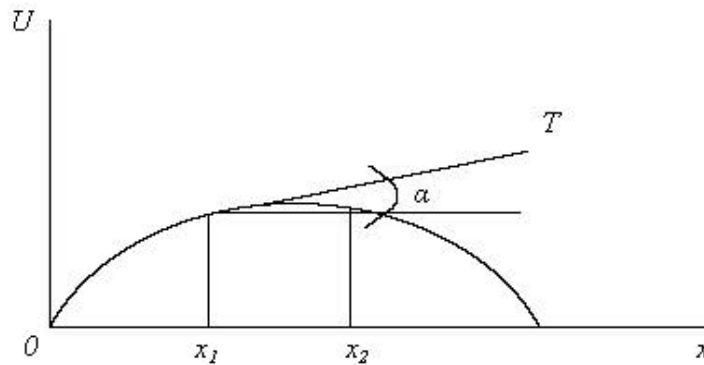


Рисунок 8.21 - Розрахункова схема для виведення рівняння коливань струни

Натяг, що виникає в струні внаслідок пружності, може бути обчислено за законом Гука. Будемо розглядати малі коливання струни і вважати, що $(U_x)^2 \approx 0$. Користуючись цією умовою, підрахуємо подовження на ділянці струни (x_1, x_2) . Довжина дуги цієї ділянки

$$S = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + U_x^2} dx = x_2 - x_1 = S.$$

Таким чином, в межах точності подовження ділянок струни в процесі коливання не відбувається, звідси в силу закону Гука випливає, що натяг T в кожній точці не змінюється з часом. Покажемо, що натяг не залежить від x , тобто $T(x) = T_0 = \text{const}$.

Знайдемо проєкції натягу на осі x і U (позначимо їх T_x і T_U).

$$T_x(x) = T(x) \cos \alpha = \frac{T}{\sqrt{1 + U_x^2}} \cong T(x);$$

$$T_U(x) = T(x) \sin \alpha = T(x) \operatorname{tg} \alpha = T(x) U_x,$$

де α – кут дотичної до кривої $U(x, t)$ з віссю x . На ділянку (x_1, x_2) діють сили натягу, зовнішні сили і сили інерції. Сума проєкцій всіх сил на вісь x повинна дорівнювати нулю (розглядаємо тільки поперечні коливання). Оскільки сили інерції і зовнішні сили за припущенням спрямовані уздовж осі, то

$$T(x) - T_x(x_1) = 0 \quad \text{або} \quad T(x) = T(x_2).$$

Звідси в силу довільності x_1 і x_2 випливає, що натяг не залежить від x , тобто для всіх значень x і t

$$T(x) = T_0.$$

Після зроблених попередніх зауважень перейдемо до виведення рівняння поперечних коливань струни. Skorистаємося другим законом Ньютона. Складова кількості руху ділянки струни (x_1, x_2) по осі x $\int_{x_1}^{x_2} U_t(\xi, t) c(\xi) d\xi$. Прирівнюємо зміну кількості руху за проміжок часу $\Delta t = t_2 - t_1$

$$\int_{x_1}^{x_2} c(\xi) [U_t(\xi, t_2) - U_t(\xi, t_1)] d\xi$$

імпульсу діючих сил, що складаються з натягу

$$T_0 U_x|_{x=x_2} - T_0 U_x|_{x=x_1}$$

в точках x_1 і x_2 та зовнішньої сили, яку будемо вважати безперервно розподіленою щільністю (навантаженням) $F(x, t)$, розрахованої на одиницю довжини. В результаті одержимо рівняння поперечних коливань елемента струни в інтегральній формі:

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_2} [U_t(\xi, t_2) - U_t(\xi, t_1)] c(\xi) d\xi = \\ & = \int_{t_1}^{t_2} T_0 [U_x(x_2, \phi) - U_x(x_1, \phi)] d\phi + \iint_{x_1 t_1}^{x_2 t_2} F(\xi, \phi) d\xi d\phi. \end{aligned} \quad (8.91)$$

Для переходу до диференціального рівняння припустимо існування і неперервність других похідних від $U(x, t)$. Тоді формула (8.91) після дворазового застосування теореми про середнє та переходу до границі при $x_2=x$, $t_2=t$ дасть диференціальне рівняння поперечних коливань струни

$$U_{xx} = c U_{xx} = F(x, t), \quad (8.92)$$

де ρ – лінійна щільність струни.

У разі постійної щільності $\rho = const$ цьому рівнянню зазвичай надають вигляд

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + f(x, y); \quad a = m \sqrt{\frac{T_0}{c}},$$

де $f(x, t) = \frac{1}{c} F(x, t)$ – щільність сили на одиницю маси.

За відсутності зовнішньої сили отримаємо одомірне рівняння $U_{tt} = a^2 U_{xx}$, або $U_{xx} - U_{yy} = 0$; $y = at$, що описує вільні коливання струни. Це рівняння є найпростішим прикладом рівняння гіперболічного типу. Якщо в точці x_0 ($x_1 < x_0 < x_2$) прикладена зосереджена сила $f_0(t)$ (рис. 8.22), то рівняння (8.86) запишеться у вигляді:

$$\int_{x_1}^{x_2} c(\xi)[U_t \xi, t_2] U_x(\xi, t_1)] d\xi = \iint_{x_1 t_1}^{x_2 t_2} f(\xi, \phi) d\xi d\phi = \int_{t_1}^{t_2} T_0 [U_x(x_2, \phi) - U_x(x_1, \phi)] d\phi + \int_{t_1}^{t_2} f_0(\phi) d\phi.$$

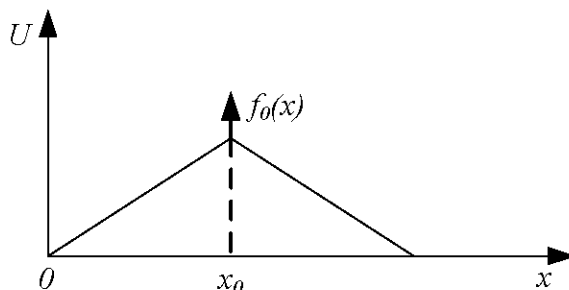


Рисунок 8.22 - До виводу рівняння поперечних коливань струни

Оскільки швидкості точок струни обмежені, то при $x_1 > x_0$ і $x_2 > x_0$ інтеграли в лівій та правій частинах цієї рівності прямують до нуля, що призводить до

$$\int_{t_1}^{t_2} [U_x(x_0 + 0, \phi) - U_x(x_0 - 0, \phi)] d\phi = - \int_{t_1}^{t_2} f_0(\phi) d\phi.$$

Користуючись теоремою про середнє, при скороченні обох частин рівності на Δt , і переходу до границі при $t_2 \rightarrow t_1$, отримуємо

$$U_x(x, t) \Big|_{x_0-0}^{x_0+0} = -\frac{1}{T} f_0(t).$$

Звідси видно, що в точці прикладання зосередженої сили перші похідні зазнають розрив і диференціальне рівняння втрачає сенс. У цій точці повинні виконуватися дві умови сполучення

$$\begin{cases} U(x_0 + 0, t) = U(x_0 - 0, t); \\ U(x_0 + 0, t) - U(x_0 - 0, t) = \frac{1}{T} f_0(t) \end{cases}$$

перша з яких виражає неперервність струни, друга визначає величину перелому в точці x_0 , що залежить від $f_0(t)$ та натягу T_0 .

Рівняння повздовжніх коливань стрижнів і струн

Рівняння повздовжніх коливань для струни, стрижня і пружини записуються однаково. Розглянемо стрижень, розташований на відрізку $(0,1)$ осі x . Процес повздовжніх коливань може бути описаний однією функцією $U(x, t)$, що показує в момент t зміщення точку, яка мала в положенні рівноваги абсцису x . При повздовжніх коливаннях це зміщення відбувається вздовж стрижня. При виведенні рівняння будемо припускати, що натяг, який виникає в процесі коливання, описується за законом Гука.

Підррахуємо подовження елемента $(x, x + \Delta t)$ в момент t . Координати кінців цього елемента в момент t мають значення $x+U(x, t)$, $x + \Delta x + U(x+\Delta x, t)$, а відносно подовження $U_x(x + \Delta x, t)$. Тоді за законом Гука натяг

$$T(x, t) = k(x)U_x(x, t),$$

де $k(x)$ – модуль Юнга в точці x , $(k(x) > 0)$.

Користуючись теоремою про зміну кількості руху, отримуємо інтегральне рівняння коливань

$$\int_{x_1}^{x_2} [U_t(\xi, t_2) - U_t(\xi, t)] c(\xi) d\xi = \\ \int_{t_1}^{t_2} [k(x_2)U_x(x_2, \phi) - k(x_1)U_x(x_1, \phi)] d\phi + \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} F(\xi, \phi) d\xi d\phi,$$

де $F(x, t)$ – щільність зовнішньої сили, розрахованої на одиницю довжини.

Припустимо існування і неперервність других похідних функцій $U(x, t)$. З застосуванням теореми про середнє, здійснюючи граничний перехід при $\Delta x = x_2 - x_1 \rightarrow 0$ і $\Delta t = t_2 - t_1 \rightarrow 0$, приходимо до диференціального рівняння повздовжніх коливань стрижня

$$[k(x)U_x]_x = cU_{tt} - F(x, t).$$

Якщо стержень однорідний $k(x) = const$, $\rho = const$, то це рівняння записують так:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + f(x, t), \quad a = \sqrt{\frac{k}{c}}$$

де $f(x, t) = \frac{F(x, t)}{c}$ – щільність сили відносно маси.

Рівняння електричних коливань в дротах

Проходження електричного струму по дроту з розподіленими параметрами характеризується силою струму і напругою, які є функціями положення x та часу t . Застосовуючи закон Ома до ділянки довжиною dx , можна записати, що спад комплексної напруги на елементі дроту dx дорівнює сумі електрорушійних сил:

$$-V_x = iRdx + \frac{di}{dt}Ldx, \quad (8.93)$$

де R і L – опір та коефіцієнт самоіндукції, розраховані на одиницю довжини.

Кількість електрики, що приходить на елемент дроту dx за час dt

$$i(x, t) - i(x + dx, t + dt) = -i_x dx dt, \quad (8.94)$$

дорівнює сумі кількості електрики, необхідної для зарядки елемента dx та кількості, що губиться внаслідок недосконалості ізоляції:

$$i(x, t) - i(x + dx, t + dt) = -i_x(G + C)dx dt, \quad (8.95)$$

де C і G — коефіцієнт ємності і витоку, розраховані на одиницю довжини, причому величину втрат вважаємо пропорційною напруженню в точці дроту, що розглядається.

З формул (8.93)–(8.95), отримуємо систему

$$\begin{cases} ix + CV_t + GV = 0; \\ V_x + Li_t + Ri = 0, \end{cases} \quad (8.96)$$

що називається системою телеграфних рівнянь.

Щоб отримати одне рівняння, що визначає функцію i , продиференціюємо першу рівність по x , другу по t , помноживши їх на C . Після віднімання з припущенням постійності коефіцієнтів, знайдемо

$$i_{xx} + G - CLi_{tt} - CRi_t = 0. \quad (8.97)$$

В результаті рівняння для сили струму

$$i_{xx} = CLi_{tt} + (CR + GL)i_t + GRi. \quad (8.98)$$

Аналогічно виглядає рівняння для напруги:

$$V_{xx} = CLV_{tt} + (CR + GL)V_t + GRV. \quad (8.99)$$

Рівняння (8.98) чи (8.99) називається телеграфним рівнянням. Якщо можна знехтувати втратами через ізоляцію і якщо опір занадто малий $G=R=0$, то приходимо до відомого рівняння коливальних

$$a^2 V_{xx} = V_{tt}; \quad a = \sqrt{\frac{1}{LC}}.$$

Застосування методу характеристик до вивчення малих коливальних струни. Необмежена струна

Рівняння вільних коливальних однорідної струни має вигляд

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a = \sqrt{\frac{T}{c}}. \quad (8.100)$$

Припустимо $0 = x - at$, $z = x + at$. Очевидно, що $x = \frac{\xi + \eta}{2}$, $t = \frac{\eta - \xi}{2a}$.

Тоді рівняння (8.100) в нових змінних запишеться у вигляді $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} = 0$.

Якщо переписати його як $\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0 \right)$, отримаємо

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \varpi(\xi),$$

де $\varpi(\xi)$ – довільна функція. При інтегруванні отриманого рівняння за ξ і вважаючи η параметром, знайдемо, що $u = \int \varpi(\xi) d\xi + u_2(z)$, де $u_2(z)$ – довільна функція. Припустивши, що $\int \varpi(\xi) d\xi = u_1(z)$, отримаємо $u = u_1(z) + u_2(z)$.

Повертаючись до попередніх змінних (x, t) , будемо мати

$$u(x, t) = u_1(x - at) + u_2(x + at). \quad (8.101)$$

Неважко перевірити, що функція $u(x, t)$, яка визначена формулою (8.101), є розв'язком рівняння (8.100), якщо u_2 і u_1 – довільні двічі неперервно диференційовні функції. Розв'язок (8.101) рівняння (8.100) називається розв'язком д'Аламбера.

Визначимо фізичну сутність розв'язку (8.101). Розглянемо спочатку окремий випадок коливання струни, коли $u_2 \equiv 0$, тобто коли зміщення струни визначається формулою

$$u_1 = u_1(x - at). \quad (8.102)$$

Припустимо, що спостерігач, який вийшов в початковий момент часу $t = 0$ з точки $x = c$ струни, рухається в додатному напрямку осі зі швидкістю a , тобто його абсциса змінюється за законом $x = c + at$ або $x - at = c$. Для такого спостерігача зміщення струни, яке визначається формулою (8.102), буде залишатись весь час постійним і дорівнювати $u_1(c)$. Саме явище, яке описується функцією $u_1 = u_1(x - at)$, називається розповсюдженням прямої хвилі. Розв'язок (8.102) являє собою пряму хвилю, яка розповсюджується в додатному напрямку осі X зі швидкістю a . Точно такий же розв'язок $u_2 = u_2(x + at)$ являє собою зворотну хвилю, яка розповсюджується у від'ємному напрямку осі X зі швидкістю a .

Таким чином, розв'язок (8.101) являє собою суму прямої і зворотної хвилі. Це веде до графічного способу побудови форми струни в будь-який момент часу t .

Будуємо криві $u_1 = u_1(x)$, $u_2 = u_2(x)$, що зображають пряму і зворотну хвилі в початковий момент часу $t = 0$ і потім, не змінюючи їх форми, переміщуємо одночасно зі швидкістю a в різні сторони: $u_1 = u_1(x)$ – вправо, $u_2 = u_2(x)$ – вліво. Щоб отримати тепер форму струни у заданий момент часу t , достатньо побудувати алгебраїчні суми ординат розсунених кривих.

Розглянемо верхню півплощину xOt , в якій вісь Ox відповідає положенню струни в початковий момент часу $t = 0$. Будь-яка точка

півплощини характеризує визначену точку x струни у визначений момент часу t . Неважко при цьому знайти графічно ті точки струни, початкові збурення яких дійшли в момент часу t_0 до точки x_0 . Це будуть, згідно з попереднім, точки с абсцисами $x + at$. Для знаходження їх на осі достатньо провести через точку (x_0, t_0) дві характеристики

$$x - at = x_0 - at_0, \quad x + at = x_0 + at_0. \quad (8.103)$$

На перетині їх з віссю Ox і отримуються шукані точки (рис. 8.23).

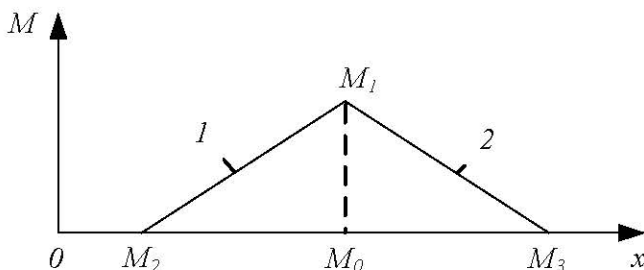


Рисунок 8.23 - Пряма (1) і зворотна (2) хвилі при коливанні струни

Вздовж першої характеристики хвиля $u_1(x - at)$ зберігає постійне значення, тобто пряма дає значення (x, t) , при яких пряма хвиля дає ті ж відхилення, що й при значеннях (x_0, t_0) . Друга характеристика з рівняння (8.103) відіграє ту ж роль для зворотної хвилі $u_2(x + at)$.

Задача Коші. Необхідно знайти розв'язок рівняння (8.100), що задовольняє початковим умовам

$$u \Big|_{t=0} = \phi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \phi_1(x). \quad (8.104)$$

Виходячи з необмеженості струни, функції $\phi_0(x)$ і $\phi_1(x)$ задані в $(-\infty; \infty)$.

В розв'язку (8.101) необхідно обрати функції $u_1(x)$, $u_2(x)$ так, щоб задовольнити початкові умови (8.104).

З початкових умов (8.104) маємо

$$\phi_0(x) = [u_1(x) + u_2(x)] \quad \phi_1(x) = -a[u_1'(x) - u_2'(x)].$$

Звідки шляхом інтегрування другої рівності, отримуємо

$$u_1(x) + u_2(x) = \phi_0(x), \quad u_1(x) - u_2(x) = -\frac{1}{2} \int_0^x \phi_1(z) dz + C, \quad (8.105)$$

де C – довільна константа.

З рівності (8.105) знаходимо

$$u_1(x) = \frac{1}{2} \phi_0(x) - \frac{1}{2} \int_0^x \phi_1(z) dz + \frac{C}{2},$$

$$u_2(x) = \frac{1}{2} \phi_0(x) - \frac{1}{2} \int_0^x \phi_1(z) dz - \frac{C}{2}.$$

Підставивши в розв'язок (8.95), отримаємо

$$u(x, t) = \frac{\phi_0(x - at)}{2} - \frac{1}{2} \int_0^{x-at} \phi_1(z) dz + \frac{C}{2} + \frac{\phi_0(x + at)}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{x+at} \phi_1(z) dz - \frac{C}{2}$$

або остаточно

$$u(x, t) = \frac{\phi_0(x-at) + \phi_0(x+at)}{2} + \frac{1}{2} a \int_{x-at}^{x+at} \phi_1(z) dz. \quad (8.106)$$

Формула (8.106) дає розв'язок задачі Коші (8.100), (8.104), якщо $\phi_0(x)$ має неперервні похідні до другого порядку включно, а $\phi_1(x)$ – до першого.

Задача Коші (8.100), (8.104) поставлена коректно. Дійсно, отриманий розв'язок єдиний, що впливає зі способу виведення формули (8.106). Безсумнівно, є неперервна залежність розв'язку (8.106) від початкових даних. Справді, для будь-якого $\epsilon > 0$ можна вказати таке $\delta > 0$, що якщо замінити $\phi_1(x)$ на $\bar{\phi}_0(x)$ і $\bar{\phi}_1(x)$ так, що $|\phi_0(x) - \bar{\phi}_0(x)| < \delta$, $|\phi_1(x) - \bar{\phi}_1(x)| < \delta$, ($-\infty < x < \infty$), різниця між новим розв'язком $u(x, t)$ і початковим $u(x, t)$ буде за абсолютною величиною меншою за ϵ на будь-якому кінцевому відрізку часу.

Обмежена струна

Розглянемо тепер струну довжиною l , закріплену на кінцях. Задача про коливання такої струни зводиться до знаходження розв'язку хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (8.107)$$

при граничних умовах

$$u \Big|_{x=0} = 0, \quad u \Big|_{x=l} = 0 \quad (0 < x < l) \quad (8.108)$$

і початкових умовах

$$u \Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x=0} = \phi_1(x). \quad (8.109)$$

Розв'язок д'Аламбера

$$u(x, t) = u_1(x - at) + u_2(x + at) \quad (8.110)$$

прийнятний в цьому випадку, але визначення u_1 , u_2 по формулах

$$u_1(x) = \frac{1}{2} \phi_0(x) - \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \phi_1(z) dz$$

$$u_2(x) = \frac{1}{2} \phi_0(x) - \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \phi_1(z) dz$$

зустрічає тут ту заваду, що функції $\phi_0(x)$, $\phi_1(x)$ і $и_1(x)$, $и_2(x)$ визначені лише на інтервалі відповідно до фізичної суті задачі, а аргументи $x \pm at$ в формулі (8.110) можуть лежати за межами цього інтервалу. Отже, для можливого використання розв'язку (8.110) необхідно продовжити функції $и_1(x)$ і $и_2(x)$ або, що цілком еквівалентно, функції $\phi_0(x)$, $\phi_1(x)$ за межами інтервалу $(0; l)$. З фізичної точки зору це продовження зводиться до визначення такого початкового збурення нескінченної струни, як ніби вона була закріплена на кінцях, а решта струни була б відкинута.

Для продовження функцій $\phi_0(x)$, $\phi_1(x)$ скористаємось граничними умовами (8.108). Підставляючи в праву частину рівняння (8.110) $x = 0$ і $x = l$ і беручи до уваги умови (8.108), отримуємо $и_1(-at) + и_2(at) = 0$, $и_1(l - at) + и_2(l + at) = 0$ або, позначаючи at через x ,

$$и_1(-x) + и_2(x) = 0, \quad и_1(l - x) + и_2(l + x) = 0. \quad (8.111)$$

Коли x замінюється на інтервалі $(0; l)$, то перша з формул визначає функцію $и_1(x)$ на інтервалі $(-l; 0)$, а друга – функцію $и_2(x)$ на інтервалі $(l; 2l)$. Отже, обидві функції цілком визначаються на проміжку $2l$. Далі з рівності (8.111) випливає, що $и_2(2l + x) = -и_1(-x) = и_2(x)$, $и_1(2l + x) = и_1(x)$, тобто функції $и_1(x)$ і $и_2(x)$ є періодичними з періодом $2l$. Отже, функції $и_1(x)$ і $и_2(x)$ визначені при всіх дійсних x .

Беручи до уваги, що $\phi_0(x) = и_1(x) + и_2(x)$, $\phi_0(x) = a[и'_2(x) - и'_1(x)]$, знайдемо

$$\begin{aligned} \phi_0(-x) &= и_1(x) + и_2(-x) = -и_2(x) - и_1(x) = -\phi_0(x) \\ \phi_1(-x) &= a[и'_1(x) - и'_2(x)] = a[и'_1(x) - и'_2(x)] = \phi_1(x) \\ \phi_0(x + 2l) &= \phi_0(x); \quad \phi_1(x + 2l) = \phi_1(x). \end{aligned}$$

Ці формули показують, що функції $\phi_0(x)$ і $\phi_1(x)$ продовжуються з проміжку $(0; l)$ в проміжок $(-l; 0)$ непарним чином, а потім з періодом $2l$.

Щоб отриманий розв'язок мав неперервні похідні до другого порядку включно, необхідно крім умов диференційовності функцій $\phi_0(x)$ і $\phi_1(x)$ ще й узгодження початкових і граничних умов

$$\phi_0(0) = \phi_0(l) = 0, \quad \phi'_0(0) = \phi'_0(l), \quad \phi_1(0) = \phi_1(l) = 0.$$

Визначимо, як впливають закріплені кінці струни на її коливання. Виходячи з обмеженості струни необхідно розглядати лише смугу верхньої півплощини $t > 0$ між прямими $x = 0$ і $x = L$ (рис. 8.24).

Проведемо через точки O і L характеристики до зустрічі з протилежними границями площини і т.д. Таким чином, розіб'ємо смугу на ділянки I, II, III, ... Точки ділянки I відповідають тим моментам часу t , коли до точок струни

доходять пряма і зворотна хвилі, які вийшли в початковий момент часу з внутрішніх точок струни. Відповідно, фіктивно додані нескінченні частини струни на процес коливання ще не впливають. Точки M_2' за межами ділянки I відповідають тим моментам часу, коли до точок струни доходять вже хвилі, які вийшли в початковий момент часу з фіктивної частини струни. Візьмемо, наприклад, точку $M_0(x_0, t_0)$ з ділянки II.

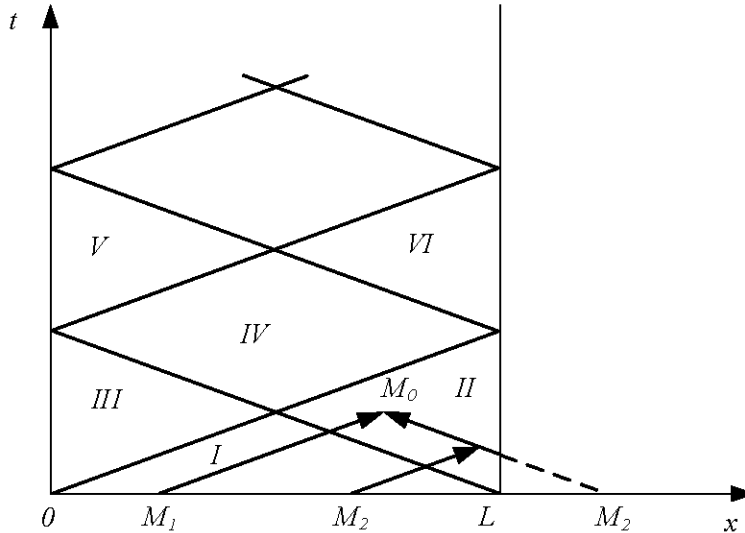


Рисунок 8.24 - Характер коливань струни із закріпленими кінцями

Оскільки $u(x_0, t_0) = u_1(x_0 - at_0) + u_2(x_0 + at_0)$, то в цій точці є дві хвилі: одна – пряма, яка прийшла від початково збудованої M_1 струни з абсцисою $x = x_0 - at$, друга – зворотна з точки M_2 з абсцисою $x = x_0 + at$, причому в даному випадку M_1 – це реальна точка струни, M_2 – фіктивна. Неважко замінити її реальною точкою, помітивши, що в силу залежності (8.111):

$$u_2(x_0 + at_0) = u_2(l + x_0 + at_0 - l) = -u_1(2l - x_0 - at_0)$$

і, таким чином, зворотна $u_2(x_0 + at_0)$ є не що інше, як пряма хвиля, $u_1(2l - x_0 - at_0)$, яка вийшла в початковий момент часу з точки M_2' ($2l - x_0 - at_0$) симетричної M_2 відносно точки L , яка, дійшовши до кінця струни L в момент $t = \frac{l - (2l - x_0 - at_0)}{2} = \frac{x_0 + at_0 - l}{a}$, змінила свій напрямок і знак на обернений до моменту часу t_0 дійшла в такому виді до точки M_0 .

Таким чином, дія закріпленого кінця $x = L$ звелась до відображення хвилі зміщення, пов'язаної зі зміною знака зміщення зі збереженням його абсолютної величини.

Те ж саме явище виявлене і для хвиль, які дійшли до кінця $x = 0$. В точках ділянки III маємо дві хвилі: зворотну і пряму, відбиту від кінця $x = 0$. В точках

ділянок IV, V, VI і т.д. отримаємо хвилі, які пройшли декілька таких відбивань від обох кінців струни.

З попередніх міркувань випливає, що коливання струни, закріпленої на кінцях, буде періодичним з періодом $\frac{2l}{a}$.

Моделювання хвильових процесів

Сучасні технічні пристрої працюють в різко нестационарних режимах внаслідок швидкої зміни в часі зовнішніх впливів, при цьому в конструкціях виникають динамічні напруги, які повинні враховуватись при оцінюванні міцності і працездатності, а також при виборі оптимальних умов функціонування тих чи інших пружних елементів. Останнє особливо важливе для технічних пристроїв, принцип дії яких базується на використанні нестационарних хвильових полів і пов'язаних з ними механічних ефектів. Науковою основою такого розрахунку являється теорія нестационарних коливань і хвиль в пружних тілах. Визначимо, які задачі механіки і чому варто віднести до класу нестационарних задач.

Характер напружено-деформованого стану пружного тіла багато в чому визначається швидкістю зміни в часі прикладених до нього сил. Якщо сили не змінюються з часом, механічні напруги і деформації також незмінні. Таке механічне поле називається статичним. Для його визначення використовуються рівняння рівноваги суцільного середовища.

Схожою за постановкою зі статичною є квазістатична задача, в умовах якої зовнішні сили можуть змінюватись, але настільки повільно, що можна знехтувати впливом прискорень і розглядати рух як послідовність станів рівноваги. Переміщення і напруга, як і в статистиці, визначаються з розв'язків рівняння рівноваги. Однак час входить в граничні умови, а, відповідно, і в вирази для напруг і деформацій як параметр.

Зрештою, при швидкій зміні навантажень в пружному тілі відбуваються процеси, які носять яскраво виражений хвильовий характер. В цьому випадку адекватною за фізикою явища є динамічна задача теорії пружності. Поряд з силами пружності великий вплив на розподіл напруг мають сили інерції, які необхідно враховувати при теоретичному аналізі. Важливим окремим випадком динамічної задачі є задача про гармонічні коливання, в якій зовнішні навантаження є тригонометричними функціями часу, що змінюються з круговою частотою ω , а механічний процес розглядається на нескінченному інтервалі часу ($0 < t < \infty$). Початкові умови в гармонічній задачі не ставляться. Механічні переміщення, напруги і деформації подаються функціями координат, помноженими на ту ж функцію часу, яка входить у вираз для джерел.

Нестационарна динамічна задача зазвичай формулюється для механічних систем з імпульсним збудженням. Повна постановка цієї задачі передбачає задання початкового стану (переміщення і швидкостей точок) пружного тіла, доповнених відповідними граничними умовами.

Інтегральна теорема Фур'є дозволяє описати загальний нестационарний випадок набором гармонічних складових. Однак відновлення нестационарного руху за його гармонічними складовими є математично не менш, а найчастіше більш складним, ніж розв'язання гармонічної задачі.

Разом з тим задачі нестационарної динаміки з нульовими початковими умовами, математично більш складні, можуть бути достатньо глибоко проаналізовані аналітичними методами. Зусилля, які витрачаються на такого роду аналіз, відшкодовуються отриманням порівняно простих математичних залежностей.

Рівняння поздовжніх коливань і характеристики розповсюдження імпульсів в нескінченному стрижні

Пружні стрижні є найбільш простою і досить часто використовуваною моделлю вивчення розповсюдження хвиль в тілах, поперечні розміри яких малі порівняно з розміром в напрямку розповсюдження. Простота отримання результатів і фізична наочність розв'язків граничних задач роблять модель стрижня початковим кроком на шляху до дослідження складних закономірностей хвильового розповсюдження імпульсів в протяжних тілах.

Розглядаємо лише поздовжні коливання, для яких зміщення частин паралельно осі стрижня. Поєднуючи цей напрямок з віссю декартових координат, введемо рівняння руху пружного стрижня в загальному випадку змінної площі поперечного перерізу стрижня.

Виділимо в стрижні елемент $(x, x + dx)$ довжиною dx (рис. 8.25).

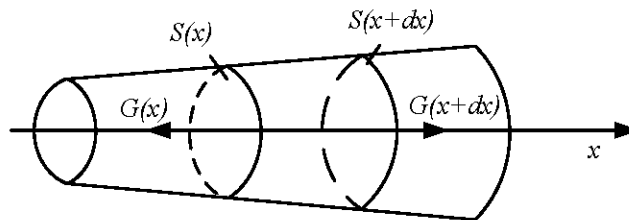


Рисунок 8.25 - Розрахункова схема для вивчення поздовжніх коливань стрижня

Вважаючи, що в напрямках, перпендикулярних до x , напруги малі порівняно з Δx , запишемо рівняння закону Гука для стрижня:

$$y_x = E e_x, \quad (8.112)$$

де $e_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ – поздовжня деформація; E – модуль Юнга.

Рівняння руху впливає з другого закону Ньютона, що застосовується до елемента стрижня:

$$y(x + dx)S(x + dx) - y(x)S(x) = cS(x)dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (8.113)$$

де зліва записана рівнодійна пружних сил, справа – сила інерції; $S(x)$ позначає площу перетину x ; c – щільність матеріалу.

Розділивши рівняння (8.113) на dx отримаємо при $dx \rightarrow 0$ рівняння коливання стрижня зі змінними по довжині як площею поперечного перерізу, так і модулем пружності.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(ES \frac{\partial u}{\partial x} \right) = cS \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} . \quad (8.114)$$

Обмежуючись випадком $E = const$ переписемо вираз (8.114) у вигляді

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{S} \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (8.115)$$

де $c = \sqrt{\frac{E}{c}}$ – швидкість розповсюдження пружних хвиль в стрижні. Варто розрізнити швидкість розповсюдження хвиль і швидкість руху частинок $\frac{\partial u}{\partial t}$. Остання, зазвичай, набагато менша за c . Рівняння (8.115) описує коливання стрижня з однорідного матеріалу, але змінної площі поперечного перерізу.

Для стрижня постійного перетину залежність (8.115) переходить в звичайне хвильове рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (8.116)$$

Хвильове рівняння задовольняє вираз вигляду

$$u = f(ct - x) + g(ct + x), \quad (8.117)$$

де f і g – довільні неперервні функції.

Будь-який розв'язок рівняння (8.116) можна привести до виду (8.117). Вираз (8.117) є найбільш загальним розв'язком одновимірного хвильового рівняння.

Розглянемо перший доданок в цьому рівнянні. Припустимо, що функція $f(a)$ відмінна від нуля на проміжку $(0 < b < a)$ (рис. 8.26, а), $f(ct-x)$ буде відмінна від нуля при $(ct-a < x < ct)$. В першому записі для будь-якого вибраного значення t можна побудувати $f(ct-x)$ як функцію x (рис. 8.26, б), в другому – для фіксованого x як функцію t (рис. 8.26, в). Таким чином, імпульс $f(ct-x)$ є незмінним розподілом переміщень, що рухається зі швидкістю c в сторону збільшення x .

Визначимо, яку енергію має такий імпульс. Щільність кінетичної енергії в одиниці об'єму стрижня $T = \frac{1}{2} c \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2$, щільність потенціальної енергії $U = \frac{1}{2} ye$, де $e = \frac{\partial u}{\partial x}$, а $y = Ee$, так що $U = \frac{1}{2} E \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2$.

Оскільки u відмінне від нуля на інтервалі $ct - a < x < ct$, то повні енергії отримуються інтегруванням за об'ємом збудованої частини стрижня:

$$T = \frac{1}{2} cS \int_{ct-a}^{ct} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx; U = \frac{1}{2} ES \int_{ct-a}^{ct} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx.$$

Підставивши в останнє $u = f(ct - x)$ і зробивши заміну змінної $ct - x = \alpha$, отримаємо

$$T = U = \frac{1}{2} ES \int_0^a [f'(\alpha)]^2 d\alpha. \quad (8.118)$$

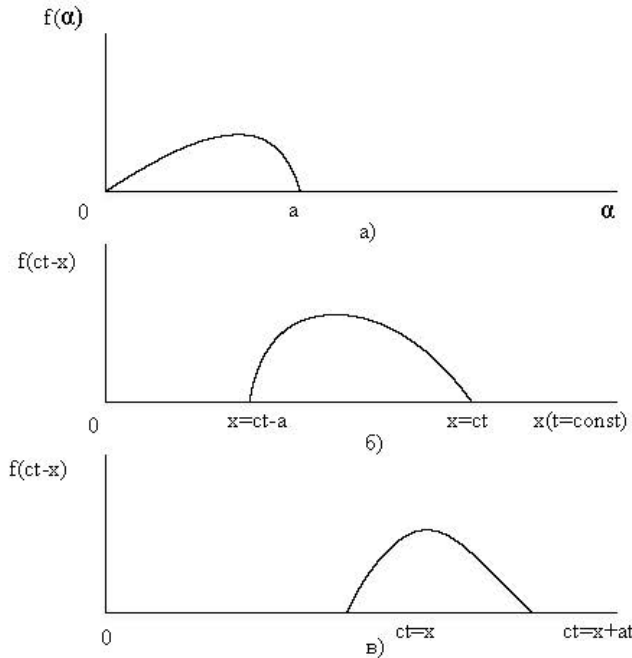


Рисунок 8.26 - Просторовий і часовий опис одновимірної хвилі

Ідеальність результату (8.118) полягає в тому, що, по-перше, кінетична чи потенціальна енергія імпульсу виявились однаковими, а по-друге, що вони не змінюються з часом, оскільки права частина залежить лише від форми імпульсу.

Аналогічно можуть бути розглянуті імпульси, які рухаються в сторону зменшення, що подані другим доданком в формулі (8.117).

Хвилі напруги в стрижні кінцевої довжини при навантаженні імпульсом тиску. Розв'язок задачі про нестационарні коливання стрижня кінцевої довжини може бути отриманий, як розглянуто вище, простим визначенням констант в наперед відомій формі розв'язку. Тут необхідно безпосередньо інтегрувати рівняння коливання при заданих початкових і граничних умовах.

Розглянемо пружний стрижень довжиною h , закріплений на торці $x = 0$. До другого торця $x = h$, починаючи з моменту часу $t = 0$, прикладається

направлений по осі змінний тиск $p(t)$ (рис. 8.27). Вважаємо, що стрижень знаходиться в стані спокою, тобто при $t = 0$ зміщення і швидкості в усіх внутрішніх точках дорівнюють нулю:

$$u \Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0}; \quad 0 < x < h. \quad (8.119)$$

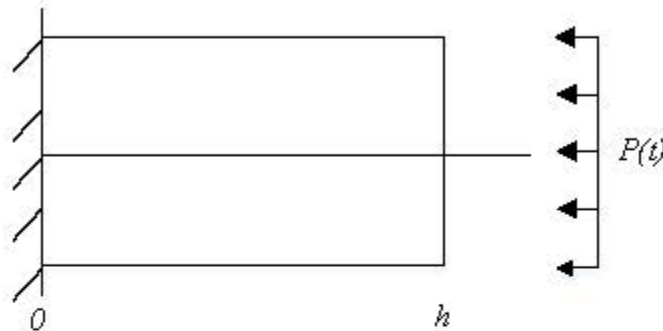


Рисунок 8.27 – Навантаження стрижня імпульсом тиску

Оскільки на лівому торці стрижень закріплений, а на правому механічні напруги рівні за величиною їм, протилежні за знаком прикладеному навантаженню, граничні умови задаються у виді

$$u \Big|_{t=0} = 0, \quad y = E \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=h} = -c(t). \quad (8.120)$$

Зміни під час навантаження $c(t)$ задамо неперервною функцією, що зростає від нуля за лінійним законом до певного моменту часу ϕ , а при $t > \phi$ зберігає постійне значення P_0 (рис. 8.28).

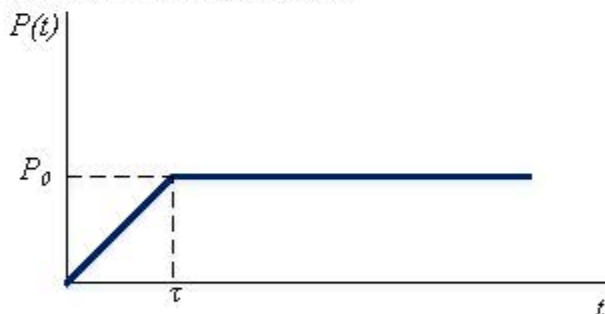


Рисунок 8.28 - Тиск на торці стрижня як функція часу

Аналітично така функція описується формулою

$$P(t) = P_0 \left[\frac{t}{\phi} H(t) - \frac{t-\phi}{\phi} H(t-\phi) \right], \quad (8.121)$$

$$h(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

де $H(t)$ – одинична функція Хевісайда.

Для розв'язання граничної задачі використовується комплексне перетворення Фур'є за часом, яке визначається формулами

$$f^F(x, w) = \int_0^\infty f(x, t) e^{-iwt} dt, \quad (8.122)$$

$$f(x, t) = \frac{1}{2\pi} \oint_L f(x, w) e^{-iwt} dt. \quad (8.123)$$

Як контур L в формулі згортки (8.123) можна обрати будь-яку пряму, паралельну дійсній осі, яка проходить вище всіх особливих точок w_1, w_2, \dots, w_n функції f^F , причому якобіан $J_m w > 0$. Остання умова забезпечує збіжність інтеграла (8.123) для функцій, що зростають не швидше експоненти.

Помноживши обидві частини хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (8.124)$$

на e^{-iwt} , після інтегрування частинами отримаємо

$$\frac{1}{c^2} \int_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} e^{-iwt} dt = \frac{e^{-iwt}}{c^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - iwu \right) \Big|_0^\infty - \left(\frac{w}{c} \right)^2 \int_0^\infty u e^{-iwt} dt.$$

Позаінтегральний член зникає при $t = 0$ завдяки початковим умовам (8.119), а при $t = \infty$ внаслідок перетворення в нуль експоненціального співмножника. Виносячи в лівій частині проінтегрованого рівняння (8.124) диференціювання по x за знак інтегралу, маємо звичайне диференційне рівняння

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \left(\frac{w}{c} \right)^2 U^F = 0 \quad (8.125)$$

з загальним розв'язком

$$U^F = A \sin \frac{wx}{c} + B \cos \frac{wx}{c}. \quad (8.126)$$

Для визначення невідомих A і B , які є функціями параметра, використовуються граничні умови (8.119). Застосувавши до останніх перетворення (8.122), маємо

$$\begin{aligned} u^F \Big|_{x=0} &= 0, \quad \frac{\partial u^F}{\partial x} \Big|_{x=h} = P_1^F(w) - P_2^F(w), \\ P_1^F(w) &= \frac{P_0}{E} \frac{1}{w^2 \Phi}; \quad P_2^F(w) = \frac{P_0}{E} \frac{e^{iwt}}{w^2 \Phi}. \end{aligned}$$

Тут P_1^F відповідає доданку з $H(t)$, P_2^F що додається з $H(t - \Phi)$. Відповідно з виглядом правої частини граничних умов зручно подати $u = u_1^F + u_2^F$ так, щоб u_1^F і u_2^F задовольняли рівняння (8.125) і умови

$$\begin{aligned} u_1^F \Big|_{x=0} &= 0, \quad u_2^F \Big|_{x=0} = 0; \\ \frac{\partial u_1^F}{\partial x} \Big|_{x=h} &= P_1^F(w); \quad \frac{\partial u_2^F}{\partial x} \Big|_{x=h} = P_2^F(w). \end{aligned} \quad (8.127)$$

Оскільки $P_2^F = \exp(iwt)P_1^F$, в силу лінійності задачі маємо $u_2^F = \exp(iwt)u_1^F$, використовуючи останню рівність, маємо

$$U_2(x, t) = \frac{1}{2p} \oint_L u_2^F e^{-iwt} dw = \frac{1}{2p} \oint_L u_2^F e^{-iw(t-\phi)} dw = u_1(x, t - \phi).$$

Таким чином, розв'язок задачі подається у виді

$$u = u_1(x, t) - u_2(x, t - \phi),$$

$$y = y_1(x, t) - y_1(x, t - \phi)E \frac{\partial}{\partial x} [u_1(x, t) - u_2(x, t - \phi)]. \quad (8.128)$$

Визначаючи сталі в рівнянні (8.127) за допомогою формули (8.128), отримуємо

$$u_1^F = \frac{P_0 c}{E \phi} \frac{\sin \frac{wx}{c}}{w^3 \cos \frac{wh}{c}}; \quad y_1^F = E \frac{\partial u_1^F}{\partial x} = P_0 \frac{l}{\phi} \frac{\cos \frac{wx}{c}}{w^2 \cos \frac{wh}{c}}. \quad (8.129)$$

Для знаходження оригіналів u_1 і y_1 розкладемо величину, обернену знаменникам виразів (8.129), в ряд, що збігається при $J_m w > 0$:

$$\frac{1}{\cos \frac{wh}{c}} = \frac{2}{e^{\frac{iwh}{c}} + e^{-\frac{iwh}{c}}} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{(2n+1)\frac{iwh}{c}}. \quad (8.130)$$

Враховуючи залежність (8.130) і подаючи тригонометричні функції через експоненціальні, запишемо вираз для (8.130) у вигляді:

$$y_1^F = \frac{P_0}{\phi} \left[\frac{1}{w^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{\frac{iwx}{c}} e^{(2n+1)\frac{iw}{c}} + \frac{l}{w^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{\frac{iwx}{c}} e^{(2n+1)\frac{iwh}{c}} \right].$$

Підставляючи в формулу згортки і змінюючи порядок інтегрування й підсумовування, знаходимо

$$y_1^F = \frac{P_0}{\phi} \left[\frac{1}{w^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2p} \oint_L \frac{1}{w^2} e^{-iw \left[t - \frac{x}{c} - (2n+1)\frac{h}{c} \right]} dw + \frac{1}{w^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2p} \oint_L \frac{1}{w^2} e^{-iw \left[t + \frac{x}{c} - (2n+1)\frac{h}{c} \right]} dw \right]. \quad (8.131)$$

Особливою точкою підінтегрального виразу є полюс другого порядку $w = 0$. Відмітимо, що при $t - t_n > 0$ контур інтегрування замикається півколом великого радіуса в нижній півплощині і інтеграл дорівнює πi , помноженому на обрховане в точці $w = 0$ (напрямок обходу від'ємний) (рис. 8.29):

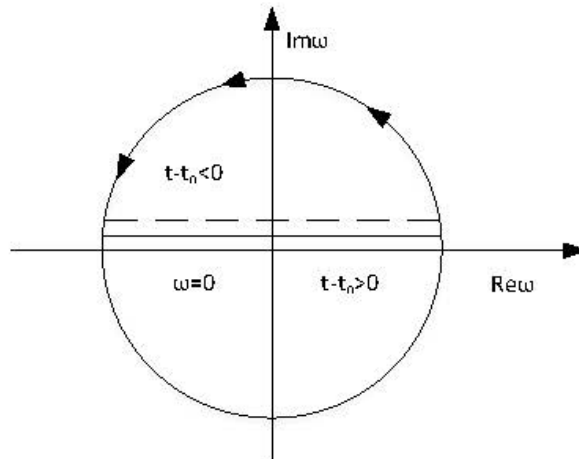


Рисунок 8.29 – Контур інтегрування

$$J_n = -2\pi i \frac{1}{p} \frac{1}{dw} \exp[-i w(t - t_n)] \Big|_{w=0} = -(t - t_n).$$

Для виконання умов леми Жордана при $t - t_n < 0$ контур замикається півколом у верхній півплощині i , відповідно, $J_n = 0$.

Об'єднання обох виразів дає

$$J_n = -(t - t_n)H(t - t_n).$$

Вираз для y_1 набуває вигляду

$$y_1 = \frac{P_0}{\Phi} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(t - \frac{x}{c} - (2n+1)\frac{h}{c} \right) H \left(t - \frac{x}{c} - (2n+1)\frac{h}{c} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(t + \frac{x}{c} - (2n+1)\frac{h}{c} \right) H \left(t + \frac{x}{c} - (2n+1)\frac{h}{c} \right) \right].$$

Механічна напруга у визначається по формулі (8.131):

$$y_1 = \frac{P_0}{\Phi} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(t - \frac{x}{c} - \frac{h}{c}(2n+1) \right) H \left(t + \frac{x}{c} - \frac{h}{c}(2n+1) \right) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(t + \frac{x}{c} - (2n+1)\frac{h}{c} \right) H \left(t + \frac{x}{c} - (2n+1)\frac{h}{c} \right) - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(t - \Phi - (2n+1)\frac{h}{c} \right) H \left(t - \Phi - \frac{x}{c} - (2n+1)\frac{h}{c} \right) - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(t - \Phi + \frac{x}{c} - (2n+1)\frac{h}{c} \right) H \left(t - \Phi - \frac{x}{c} - (2n+1)\frac{h}{c} \right) \right].$$

Розглянемо напругу в точці закріплення $x = 0$:

$$y(0, t) = \frac{P_0}{\Phi} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(t - (2n+1)\frac{h}{c} \right) H(t - (2n+1)T) - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(t - \Phi - (2n+1)T \right) H \left(t - \Phi - \frac{x}{c} - (2n+1)T \right) \right], \quad (8.132)$$

де $T = \frac{h}{c}$ – час, необхідний для проходження хвилею повної довжини стрижня.

З урахуванням $y(0, t)$ в залежно від величини параметра τ отримаємо уявлення про ступінь динамічності поля напруг в стрижні.

Перш за все, вивчимо реакцію на навантаження, що має нульовий час зростання до значення P_0 (нульової довжини переднього фронту). Графічно таке навантаження зображується «сходінкою» висоти P_0 .

Переходячи у формулі (8.132) до границі $\phi \rightarrow 0$ знаходимо

$$y(0, t) = -2P_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n H(t - (2n + 1)T).$$

Зобразимо графічно перші доданки цієї суми з відповідними знаками на рис. 8.30, *a-z*. Їх алгебраїчна сума при $t < \phi$ дорівнює нулю. В момент часу ν напруга миттєво стає рівною подвоєному прикладеному тиску і зберігає це значення аж до $t = 3T$. Від $3T$ до $5T$ $y(0, t) = 0$ потім знову стрибком зменшується до P_0 і т. д., так що $y(0, t)$ – періодична функція часу з періодом $5T$. Для пояснення такої поведінки $y(0, t)$ запишемо механічну напругу в довільному перетині стрижня, припускаючи в формулі (8.132) $\phi \rightarrow 0$:

$$y(x, t) = -P_0 \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(t - \frac{x}{c} - (2n + 1)T \right) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n H \left(t + \frac{x}{c} - (2n + 1)T \right) \right].$$

Аналіз цієї формули спрощується тією обставиною, що при фіксованому значенні в кожній із сум відмінне від нуля кінцеве число перших доданків. Для моменту часу $t = T$ тотожно не рівний нулю лише перший член другої суми і розподіл напруг

$$y(x, t) = -P_0 H \left(t + \frac{x}{c} - T \right),$$

так що $y = -P_0$ при $x > c(T - t)$ і рівний нулю лівіше точки $x = c(T - t)$ – (рис. 8.30, *a*); відповідно на ділянці $x > c(T - t)$ деформації дорівнюють $\left(-\frac{P_0}{E}\right)$ – за її межами $\epsilon = 0$. Деформована ділянка розширюється вліво зі швидкістю c .

В інтервалі часу $T < t < 2T$ напруги рівні:

$$y(x, t) = -P_0 \left[H \left(t + \frac{x}{c} - T \right) + H \left(t - \frac{x}{c} - T \right) \right].$$

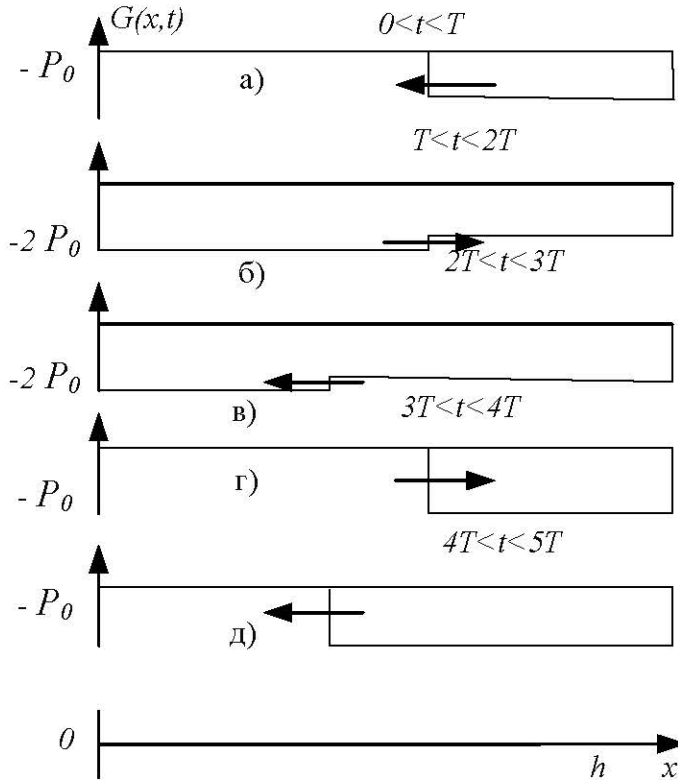


Рисунок 8.30 - Хвилі напруги в стрижні при навантаженні ступінчастим імпульсом тиску амплітуди

Імпульс стиснення відбивається від закріпленого торця $x = 0$ також у вигляді імпульсу стиснення. Перший доданок являє собою спадну хвилю і тотожно дорівнює одиниці, а другий – відбиту хвилю і дорівнює одиниці для $x < c(T - t)$ і нулю при $x > c(T - t)$. Лівіше фронту імпульсу, в тому числі і у закріпленні, $y = -2P_0$, правіше $y = -P_0$ (див. рис. 8.30, б).

Зрештою, при $3T < t < 4T$ цей імпульс, відбившись у незмінному виді від закріпленого торця і рухаючись вправо, залишає ділянку $z < c(t - 3T)$ позаду себе незбуреною (див. рис. 8.30, в). В момент $t = 4T$ стрижень знаходиться в стані спокою при нульових напругах і деформаціях по всій довжині. З моменту $t = 4T$ картина повторюється (див. рис. 8.30, г).

Нехай $t = T$. Формулу (8.132) запишемо у виді

$$y(0, t) = y_1(0, t) - y(0, t - 1),$$

$$y_1(0, t) = -2P_0[(t - 1)H(t - 1) - (t - 3)H(t - 3) + (t - 5)H(t - 5) - \dots].$$

Для послідовних інтегралів часу

$$\begin{aligned}
0 < t < 1, & \quad y_1 = 0; \\
1 < t < 3 & \quad y_1 = -2P_0(t - 1); \\
3 < t < 5 & \quad y_1 = -4P_0; \\
5 < t < 7 & \quad y_1 = -2P_0(t - 3)u
\end{aligned}$$

і т. д., отримуємо графік $y_1(0, t)$ (рис. 8.31, *a*), де додатний напрям ординат відповідає від'ємним напругам. Побудувавши $-y_1(0, t - 1)$ і склавши ординати обох графіків, в результаті отримуємо графік $y(0, t)$. Штриховою лінією зображений відповідний зовнішній тиск, взятий з протилежним знаком.

Аналогічно будуються графіки $y(0, t)$ при $t = 2T, 3T, 4T, 6T, 10T$. Штрихові лінії відповідають прикладеному навантаженню. Для значення $\phi = 4T$, починаючи з моменту встановлення постійного навантаження, хвильовий рух відстуній: стрижень статично стиснений тиском P_0 .

Динамічність поля напруг, тобто максимальне, стосовно часу, відхилення $y(0, t)$ від значення P_0 , як видно з графіків, зменшується зі зростанням t . Починаючи з $\phi = 10T$ можна вважати напруги практично постійними, що дорівнюють для будь-яких моментів часу прикладеному зусиллю, тобто такими, які змінюються лише квазістатично. Останнє означає, що прискорення частинок стрижня, як і амплітуди хвиль напруг, є малими. Якщо характерний час зміни зовнішніх навантажень t набагато більший часу проходження пружною хвилею найбільшого лінійного розміру тіла, замість динамічної можна розв'язувати квазістатичну задачу як в даному, так і в більш складних випадках. При цьому відшукується розв'язок рівняння рівноваги, а час входить в цей розв'язок як параметр граничних умов.

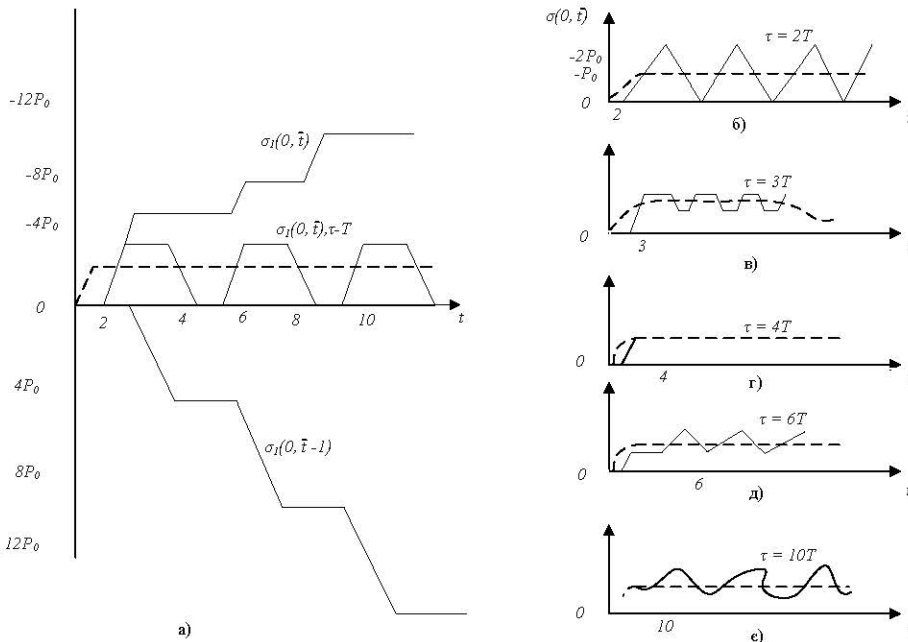


Рисунок 8.31 - Механічна напруга в закріпленні для різних значень довжини переднього фронту навантаження

8.2.3 Рівняння еліптичного типу в застосуванні до моделювання стаціонарних процесів

Рівняння Лапласа і Пуассона

Розглянемо стаціонарне теплове поле. В 8.2.1 було показано, що температура нестационарного теплового поля задовольняє диференціальне рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u, \left(a = \frac{k}{cc} \right).$$

Якщо процес стаціонарний, то встановлюється розподіл температури $u(x, y)$, який не змінюється з плином часу i , відповідно, задовольняє рівняння Лапласа

$$\Delta u = 0. \tag{8.133}$$

При наявності джерел тепла отримуємо рівняння

$$\Delta u = f, \tag{8.134}$$

де $f = \frac{F}{k}$ – щільність теплових джерел, а k – коефіцієнт теплопровідності. Неоднорідне рівняння (8.134) часто називають рівнянням Пуассона.

Розглянемо деякий об'єм T , обмежений поверхнею Σ . Задача про стаціонарний розподіл температури $U(x, y, z)$ всередині тіла формулюється так:

знайти функцію $U(x, y, z)$, що задовольняє всередині тіла T рівняння $\Delta u = -f(x, y, z)$ і граничну умову, яка може бути задана в одному з виглядів:

$$u = f_1 \text{ на } \Sigma \text{ (перша крайова задача);}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = f_2 \text{ на } \Sigma \text{ (друга крайова задача);}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + h(u - f_3) = 0 \text{ на } \Sigma \text{ (третя крайова задача);}$$

де f_1, f_2, f_3, h – задані функції; $\frac{\partial u}{\partial n}$ – похідна по зовнішній нормалі до поверхні.

Першу крайову задачу для рівняння Лапласа часто називають задачею Діріхле, а другу задачу – задачею Неймана.

Якщо відшукується розв'язок в області T_0 , внутрішній (чи зовнішній) відносно до поверхні Σ , то відповідну задачу називають внутрішньою (чи зовнішньою) крайовою задачею.

Як другий приклад розглянемо потенціальний потік рідини без джерел. Нехай всередині певного об'єму T з границею Σ має місце нестационарний потік нестискуваної рідини, що характеризується швидкістю $v(x, y, z)$. Якщо потік рідини не вихровий, то швидкість є потенціальним вектором, тобто

$$v = -grad(\Phi), \quad (8.135)$$

де Φ – скалярна функція, що називається потенціалом швидкості. Якщо відсутні джерела, то

$$div(v) = 0. \quad (8.136)$$

Підставляючи сюди вираз (8.135) для v , отримуємо $div[grad(\Phi)] = 0$ або:

$$\Delta \Phi = 0, \quad (8.137)$$

тобто потенціал швидкості задовольняє рівняння Лапласа.

Нехай в однорідному середовищі тече стаціонарний струм з об'ємною щільністю $j(x, y, z)$. Якщо в середовищі немає об'ємних джерел струму, то

$$div(j) = 0. \quad (8.138)$$

Електричне поле E визначається через щільність струму з диференціального закону Ома

$$E = \frac{j}{\lambda}, \quad (8.139)$$

де λ – провідність середовища.

Оскільки процес стаціонарний, то електричне поле є безвихровим або потенціальним, тобто існує така скалярна функція $\Phi(x, y, z)$, для якої:

$$E = -grad\Phi \quad \text{або} \quad j = -\lambda grad\Phi, \quad (8.140)$$

тобто потенціал електричного поля стаціонарного струму задовольняє рівняння Лапласа.

Розглянемо електричне поле стаціонарних зарядів. Із стаціонарності процесу випливає, що

$$rotE = 0,$$

тобто поле є потенціальним і $E = -grad\Phi$.

Нехай $c(x, y, z)$ – об’ємна щільність зарядів, які наявні в середовищі, що характеризується діелектричною постійною $\epsilon = 1$. Виходячи з основних законів електродинаміки

$$\iint_S E_n dS = 4\pi \sum e_i = 4\pi \iiint_T c d\Phi,$$

де T – деякий об’єм; S – поверхня, що його обмежує, $\sum e_i$ – сума всіх зарядів всередині T , і, користуючись теоремою Остроградського

$$\iint E_n dS = \iiint_T div E d\Phi,$$

отримуємо

$$div E = 4\pi c$$

З урахуванням виразу (8.140) для E , маємо

$$\Delta\Phi = -4\pi c,$$

тобто електростатичний потенціал задовольняє рівняння Пуассона. Якщо об’ємних зарядів немає ($c = 0$), то потенціал повинен задовольняти рівняння Лапласа $\Delta\Phi = 0$. Основні крайові задачі для розглянутих процесів відносять до трьох типів, наведених вище.

Деякі окремі розв’язки рівнянь Лапласа. Гармонічні функції і їх застосування до розв’язання рівнянь Лапласа

Розглянемо розв’язки рівняння Лапласа, що мають сферичну або циліндричну симетрію, тобто залежать лише від однієї змінної r або s .

Розв’язок рівняння Лапласа $u = U(r)$, що має сферичну симетрію, буде визначатись зі звичайного диференціального рівняння

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU}{dr} \right) = 0.$$

Інтегруючи це рівняння, знаходимо $U = \frac{C_1}{r} + C_2$, де C_1 і C_2 – довільні сталі. Припускаючи, наприклад, $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, отримуємо функцію:

$$U_0 = \frac{1}{r},$$

яку часто називають фундаментальним розв’язком рівняння Лапласа в просторі. Аналогічно, з урахуванням $u = U(s)$, знаходимо розв’язок, що має циліндричну або кругову симетрію (у випадку двох незалежних змінних), у вигляді $U(s) = C_1 \ln s + C_2$.

Обираючи $C_1 = -1$, $C_2 = 0$ будемо мати:

$$U_0 = \ln \frac{1}{s}.$$

Функцію $U(s)$ часто називають фундаментальним розв’язком рівняння Лапласа на площині для двох незалежних змінних. Функція $U_0 = \frac{1}{r}$ задовольняє рівняння $\Delta u = 0$ всюди, крім точки $r = 0$, де вона перетворюється в нескінченність. З точністю до множника пропорційності вона збігається з полем

точкового заряду, що розміщується на початку координат. Потенціал цього поля $u = \frac{1}{r}$. Аналогічно, функція $\ln \frac{1}{c}$ задовольняє рівняння Лапласа всюди, крім точки $c = 0$, де вона перетворюється в додатну нескінченність, і з точністю множника збігається з полем зарядженої лінії, потенціал якого $u = 2e_1 \ln \frac{1}{c}$, де e – щільність заряду, розрахована на одиницю довжини. Ці функції мають велике значення в теорії гармонічних функцій.

Нехай $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ – деяка функція комплексної змінної $z = x + iy$, причому u і v є дійсними функціями змінних x і y . Найбільший інтерес викликають так звані аналітичні функції, для яких існує похідна

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Приріст $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, очевидно, може прямувати до нуля багатьма способами. Для кожного із способів прямування до нуля може бути своє значення границі. Однак, якщо функція аналітична, то границя $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = f'(z)$ знаходиться за умови $z \rightarrow 0$ якщо $x \rightarrow 0$ або $i\Delta y \rightarrow 0$.

Необхідними і достатніми умовами аналітичності функції $w = f(z)$ є так звані умови Коші-Рімана

$$\left. \begin{aligned} u_x &= v_x \\ u_y &= -v_x \end{aligned} \right\} \quad (8.141)$$

Ці умови можна отримати так.

Нехай $w = u + iv = f(z)$ – аналітична функція. Обчислюючи похідні

$$w_x = u_x + iv_x = \frac{dw(z)}{dz} z_x = \frac{dw}{dz}; \quad w_y = u_y + iv_y = \frac{dw(z)}{dz} z_y = \frac{dw}{dz} i;$$

і вимагаючи рівність значень $\frac{dw}{dz}$, визначених на цих двох співвідношеннях, отримуємо $u_x + iv_x = v_y - iu_y = \frac{dw}{dz}$, звідки і випливають умови Коші-Рімана.

В теорії функцій комплексного змінного доводиться, що функція, аналітична в певній області G площини $z = x + iy$, має в цій області похідні всіх порядків і розкладається в степеневий ряд. Зокрема, для такої функції $u(x, y)$ і $v(x, y)$ мають неперервні похідні 2-го порядку за x і y .

Диференціюючи першу рівність формули (8.141) по x , а другу по y отримуємо $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

Так само, змінюючи порядок диференціювання, знаходимо

$$v_{xx} + v_{yy} = 0.$$

Таким чином, дійсна і уявна частина аналітичної функції задовольняють рівняння Лапласа.

Розглянемо перетворення:

$$\left. \begin{aligned} x &= x(u, v), u = u(x, y) \\ y &= y(u, v), v = v(x, y) \end{aligned} \right\}, \quad (8.142)$$

яке взаємно однозначно відображає певну область площини (x, y) на область площини G , так що кожній точці області (x, y) відповідає визначена точка області G і навпаки, кожній точці області G відповідає визначена точка області (x, y) .

Нехай $U = U(x, y)$ – певна дійсна функція, двічі неперервно диференційовна, визначена всередині області G .

Визначимо, як змінюється при цьому перетворенні оператор Лапласа функції $U = U[x(u, v), y(u, v)] = \tilde{U}(u, v)$.

Обчислимо похідні функції

$$\begin{aligned} U_x &= \tilde{U}_u u_x + \tilde{U}_v v_x = \tilde{U}_u u_y + \tilde{U}_v v_y, \\ U_{xx} &= \tilde{U}_{uu} u_x^2 + \tilde{U}_{vv} v_x^2 + 2\tilde{U}_{uv} u_x v_x + \tilde{U}_u u_{xx} + v_y v_{xx}, \\ U_{yy} &= \tilde{U}_{uu} u_y^2 + \tilde{U}_{vv} v_y^2 + 2\tilde{U}_{uv} u_y v_y + \tilde{U}_u u_{yy} + v_y v_{yy}, \end{aligned}$$

звідки отримаємо

$$\begin{aligned} U_{xx} + U_{yy} &= \\ &= \tilde{U}_{uu}(u_x + v_y) + \tilde{U}_{vv}(v_x + v_y) + 2\tilde{U}_{uv}(u_x v_x + u_y v_y) + \\ &\quad + \tilde{U}_u(u_{xx} + u_{yy}) + (v_{xx} + v_{yy}). \end{aligned} \quad (8.143)$$

Якщо u і v є спряженими гармонічними функціями, то перетворення (8.142) еквівалентне перетворенню, здійсненому аналітичною функцією

$$W = f(z) = u + iv \quad (z = x + iy). \quad (8.144)$$

В цьому випадку в силу умов Коші-Рімана (8.141) для функцій u і v повинні виконуватись співвідношення

$$\begin{aligned} u_x^2 + u_y^2 &= u_x^2 + v_x^2 = v_y^2 + v_x^2 = |f'(z)|^2, \\ u_x v_x + u_y v_y &= 0. \end{aligned}$$

Формула (8.143) набуває вигляду

$$U_{xx} + U_{yy} = (\tilde{U}_{uu} + \tilde{U}_{vv})|f'(z)|^2 \quad (8.145)$$

або $\Delta_{uv} U_{yy} = \frac{1}{|f'(z)|^2}$.

Звідси випливає, що в результаті перетворення (8.144) гармонічна в області G функція $U(x, y)$ переходить у функцію $U = U(u, v)$, гармонічну в області G , якщо тільки $|f'(z)|^2 \neq 0$.

При вивченні рівнянь еліптичного типу будемо користуватись формулами Гріна, які виходять з формули Остроградського.

Формула Остроградського в найпростішому випадку має вигляд

$$\iiint_T \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\Sigma} R \cos \gamma dy, \quad (8.146)$$

де T – певний об'єм, обмежений достатньо гладкою поверхнею, $\Sigma R(x, y, z)$ – довільна функція, неперервна всередині $T + \Sigma$ і така, що має неперервні похідні всередині T ; γ – кут між напрямом осі і зовнішньою нормаллю κ . В справедливості цієї формули неважко впевнитись, виконуючи інтегрування за z .

Формулу Остроградського зазвичай записують у вигляді

$$\iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \iint_{\Sigma} \{P \cos \beta + Q \cos \alpha + R \cos \gamma\} dy, \quad (8.147)$$

де $dv = dx dy dz$ – елемент об'єму; $\beta = (\vec{n}, \vec{x})$, $\alpha = (\vec{n}, \vec{y})$, $\gamma = (\vec{n}, \vec{z})$ – кути зовнішньої нормалі до поверхні з координатними осями, P, Q, R – довільні функції, які диференціюються.

Якщо P, Q, R розглядати як компоненти деякого вектора, то формулу Остроградського (8.141) можна записати таким чином:

$$\iiint_T \operatorname{div} \vec{A} dv = \iint_{\Sigma} \vec{A} \vec{n} dy,$$

де

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

і $(\vec{A} \cdot \vec{n}) = P \cos \beta + Q \cos \alpha + R \cos \gamma$ – складова вектора \vec{A} вздовж зовнішньої нормалі.

Перейдемо тепер до виведення формули Гріна. Нехай разом зі своїми першими похідними всередині $T + \Sigma$ існують і ті, які мають безперервні другі похідні всередині T .

Вважаючи, що $P = u \frac{dv}{dx}$, $Q = u \frac{dv}{dy}$, $R = u \frac{dv}{dz}$ і користуючись формулою Остроградського (8.146), приходимо до так званої першої формули Гріна:

$$\iiint_T u \Delta v d\phi = \iint_{\Sigma} u \frac{dv}{dn} dy - \iiint_T \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) dy, \quad (8.148)$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ оператор Лапласа; $\frac{\partial}{\partial n} = \cos \beta \frac{\partial}{\partial x} + \cos \alpha \frac{\partial}{\partial y} + \cos \gamma \frac{\partial}{\partial z}$ – похідна у напрямку зовнішньої нормалі. Якщо врахувати співвідношення $\operatorname{grad} u \operatorname{grad} v = \nabla u \nabla v = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z}$, то формулу Гріна можна записати у вигляді $\iiint_T u \Delta v d\phi = - \iiint_{\Sigma} \nabla u \nabla v d\phi + \iint_{\Sigma} u \frac{dv}{dn} dy$.

Міняючи місцями функції, отримуємо

$$\iiint_T v \Delta u \, d\phi = - \iiint_\Sigma \nabla u \nabla v \, d\phi + \iint_\Sigma v \frac{du}{\partial n} \, dy. \quad (8.149)$$

Віднімаючи з рівності (8.147) рівність (8.148), знаходимо другу формулу Гріна

$$\iiint_T (u \Delta v - v \Delta u) \, d\phi = \iint_\Sigma \left(u \frac{dv}{\partial n} - v \frac{du}{\partial n} \right) \, dS. \quad (8.150)$$

Для функцій двох змінних $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ мають місце аналогічні формули Гріна. Друга формула Гріна в області S з границею C має вигляд $\iint_S (u \Delta v - v \Delta u) \, dS = \int_C \left(u \frac{dv}{\partial n} - v \frac{du}{\partial n} \right) \, dt$, де $dS = dx dy$; dt - елемент дуги уздовж C ; $\Delta_2 v_2 = v_{xx} + v_{yy}$ - похідна у напрямку до зовнішнього контуру нормалі \vec{n} .

Функція $M = \frac{1}{R}$, де $R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ - відстань між точками $M(x, y, z)$ і $M_0(x_0, y_0, z_0)$ задовольняє рівняння Лапласа при $M \neq M_0$.

Нехай гармонічна функція, безперервна разом з першими похідними в області $T + \Sigma$, має другі похідні в області T і функція має всередині області T розрив неперервності в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Тому безпосередньо застосовувати другу формулу Гріна в області до функцій не можна.

Функція $v = \frac{1}{R}$ обмежена в області T границею $T - K_e$, де K_e - куля радіуса e з центром в точці M_0 і поверхнею Σ_e (рис. 8.32).

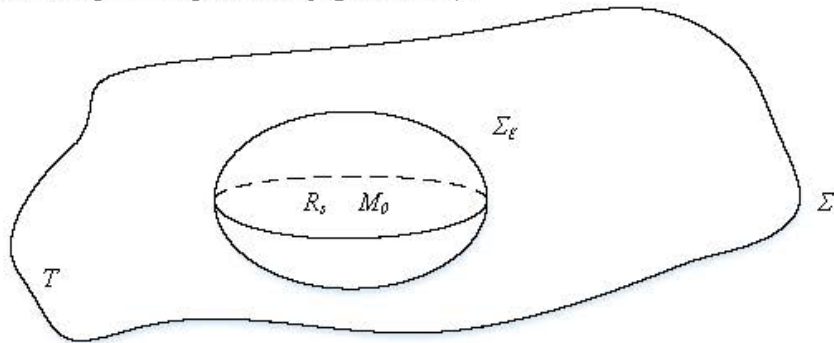


Рисунок 8.32 - Розрахункова схема для виведення формули Гріна

Застосовуючи другу формулу Гріна (8.144) до функцій u і $v = \frac{1}{R}$ в області, $T - K_e$, отримуємо

$$\begin{aligned} \iiint_{T-K_e} \left(u \Delta \frac{1}{R} - \frac{1}{R} \Delta u \right) \, d\phi &= \iint_{\Sigma_e} \left(u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} \right) \, dy + \\ &+ \iint_{\Sigma_e} u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) \, dy - \iint_{\Sigma_e} \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} \, dy. \end{aligned} \quad (8.151)$$

Обчислюючи похідну за зовнішньою нормаллю до області $T - K_e$ на Σ_e , знаходимо, що $\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) \Big|_{\Sigma_e} = - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{R} \right) \Big|_{r=e} = \frac{1}{e^2}$, звідки:

$$\iint_{\Sigma_e} u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) dy = \frac{1}{e^2} \iint_{\Sigma_e} u dy = -4\pi e^2 \left(\frac{\partial u^*}{\partial n} \right) = 4\pi e \left(\frac{\partial u^*}{\partial n} \right), \quad (8.152)$$

де u^* – середнє значення функції $u(M)$ на поверхні. Перетворимо третій інтеграл:

$$\iint_{\Sigma_e} u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) dy = \frac{1}{e^2} \iint_{\Sigma_e} u dy = -4\pi e^2 \left(\frac{\partial u^*}{\partial n} \right) = 4\pi e \left(\frac{\partial u^*}{\partial n} \right), \quad (8.153)$$

де $\left(\frac{\partial u^*}{\partial n} \right)$ – середнє значення нормальної похідної $\frac{\partial u}{\partial n}$ на сфері Σ_e . Підставляючи вирази (8.150) і (8.151) у формулу (8.149) і враховуючи, що $\Delta \frac{1}{R} = 0$ в $T - K_e$, знаходимо:

$$\iiint_{T-K_e} \left(-\frac{1}{R} \right) \Delta u d\Phi = \iint_{\Sigma} \left[u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dy + 4\pi u^* - 4\pi e \left(\frac{\partial u^*}{\partial n} \right). \quad (8.154)$$

Спрямуємо тепер радіус до нуля. Тоді:

1) $\lim_{e \rightarrow 0} u^* = u(M_0)$, оскільки $u(M)$ неперервна функція, а u^* – її середнє значення на сфері радіуса з центром в точці M_0 ;

2) $\lim_{e \rightarrow 0} 4\pi e \left(\frac{\partial u^*}{\partial n} \right) = 0$, оскільки з неперервності перших похідних функцій всередині $u(M)$ одразу ж впливає обмеженість нормальної похідної в околі M_0 ;

3) за означенням невластного інтеграла маємо:

$$\lim_{e \rightarrow 0} \iiint_{T-K_e} \left(-\frac{1}{R} \Delta u \right) d\Phi = \iiint_T \left(-\frac{1}{R} \Delta u \right) d\Phi.$$

В результаті зазначеного граничного переходу $e \rightarrow 0$ переходимо до основної інтегральної формули Гріна

$$4\pi u(M_0) = \iint_{\Sigma} \left[u(P) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{M_0-P}} \right) - \frac{1}{R_{M_0-P}} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dy - \iiint_T \frac{\Delta u(P)}{R_{M_0-P}} d\Phi, \quad (8.155)$$

де $P = P(o, z, ж)$ – точка з координатами $(o, z, ж)$ на поверхні Σ .

Якщо точка M_0 знаходиться поза межами області T , то зліва у формулі (8.155) отримаємо нуль.

Розглянемо випадок, коли M_0 належить поверхні Σ . Припустимо, що в точці M_0 поверхня має дотичну площину з неперервними кутовими коефіцієнтами. Сфера Σ_e радіуса e центром в M_0 перерізає поверхню Σ і ділить її на дві частини Σ_1 і Σ_2 , частина у розташована всередині кулі K_e . Формулу Гріна (8.150) застосуємо до u і $v = \frac{1}{R}$ в області $T - T_1$, де T_1 – область, обмежена Σ_1 і частиною сфери Σ_e , що лежить всередині області T . Загальна схема міркувань, що привели до формули (8.154), залишається незмінною, при цьому слід лише врахувати, що інтеграл прямує до $\Sigma_1 + \Sigma_e$, і внести відповідні зміни до виразів (8.152), (8.153) і (8.154). В результаті переходимо до формули, яка отримана з рівняння (8.155) при заміні 4π на 2π .

Об'єднуючи всі випадки, запишемо основну формулу Гріна у вигляді:

$$\Omega u(M_0) = \iint_{\Sigma} \left[\frac{1}{R_{M_0P}} \frac{\partial u}{\partial n_p}(P) - u(P) \frac{\partial u}{\partial n_p} \left(\frac{1}{R_{M_0P}} \right) \right] dy_p - \iiint_T \frac{\Delta u(P)}{R_{M_0P}} d\Phi_p, \quad (8.156)$$

де $\Omega = \begin{cases} 4\pi, & \text{якщо точка } M_0 \text{ лежить всередині } T, \\ 2\pi, & \text{якщо точка } M_0 \text{ лежить на границі } \Sigma, \\ 0, & \text{якщо точка } M_0 \text{ лежить поза межами } T. \end{cases}$

Відзначимо, що якщо точка M_0 є кінчною вершиною поверхні Σ , то $\Omega = \beta$, де β – величина тілесного кута, утвореного дотичними до Σ в точці M_0 .

Для гармонічної функції $\Delta u = 0$ і формула (8.156) набуває вигляду

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[\frac{1}{R_{M_0P}} \frac{\partial u}{\partial n_p}(P) - u(P) \frac{\partial}{\partial n_p} \left(\frac{1}{R_{M_0P}} \right) \right] dy_p, \quad (8.157)$$

де M_0 всередині T .

Таким чином, значення гармонічної функції в будь-якій внутрішній точці області виражається через значення цієї функції і її похідної на поверхні області. При цьому передбачається неперервність функцій $u(M)$ і її перших похідних аж до границі. Відзначимо відразу ж, що кожен з інтегралів

$$\iint_{\Sigma} m(P) \frac{1}{R_{M_0P}} dy_p \quad \text{і} \quad \iint_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial n_p} \frac{1}{R_{M_0P}} v(P) dy_p, \quad (8.158)$$

де m і v – неперервні функції, є гармонічними функціями поза межами поверхні Σ . Справді, оскільки підінтегральні функції і всі їх похідні неперервні поза межами поверхні Σ , то похідні функцій (8.157) будь-якого порядку можна обчислювати за допомогою диференціювання під знаком інтеграла.

Оскільки, крім того, функції

$$\frac{1}{R_{MP}} u \frac{\partial u}{\partial n_p} \left(\frac{1}{R_{MP}} \right) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{R} \right) \cos \beta_p + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{R} \right) \cos \nu_p + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{1}{R} \right) \cos \gamma_p$$

задовольняють рівняння Лапласа за $M(x, y, z)$, то в силу узагальненого принципу суперпозиції функції (8.157) також задовольняють рівняння Лапласа за змінними x, y, z .

Аналогічні формули мають місце і для гармонічних функцій двох незалежних змінних.

Нехай S – деяка область на площині, (x, y) обмежена контуром C , а n – напрям нормалі до цього контуру, зовнішній відносно до області. Вважаючи в другій формулі Гріна $v = \ln \frac{1}{R_{M_0P}}$, де $R_{M_0P} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ – відстань $P(x, y)$ від фіксованої точки $M_0(x_0, y_0)$ і розмірковуючи аналогічно, як це було для тривимірного випадку, отримуємо основну формулу Гріна на площині

$$\Omega u(M_0) = \int \left[\ln \frac{1}{R_{M_0P}} \frac{\partial u}{\partial n_p}(P) - u(P) \frac{\partial}{\partial n_p} \left(\ln \frac{1}{R_{M_0P}} \right) \right] dS_p - \iint \Delta u(P) \ln \frac{1}{R_{M_0P}} dS_p,$$

де $\Omega = \begin{cases} 2\pi, & \text{якщо точка } M_0 \text{ розташована всередині } S, \\ \pi, & \text{якщо точка } M_0 \text{ розташована на кордоні } C, \\ 0, & \text{якщо точка } M_0 \text{ розташована поза межами } S. \end{cases}$

Якщо $u(M)$ гармонічна всередині S функція M_0 і лежить всередині S , то

$$u(M_0) = \frac{1}{2p} \int \left[\ln \frac{1}{R_{M_0P}} \frac{\partial u}{\partial n_p}(P) - u(P) \frac{\partial}{\partial n_p} \left(\ln \frac{1}{R_{M_0P}} \right) \right] dS_p.$$

Встановимо кілька найважливіших властивостей гармонічних функцій.

1. Якщо v – функція, гармонічна в області T , обмеженою поверхнею Σ , то

$$\iint_S \frac{\partial v}{\partial n} dy = 0, \quad (8.159)$$

де S – будь-яка замкнена поверхня, яка повністю лежить в області T . Цю властивість гармонічних функцій можна інтерпретувати як умову відсутності джерел всередині області T .

2. Якщо функція $u(M)$ гармонічна в деякій області T , а M_0 – якась точка, що лежить всередині області, то має місце формула

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{\Sigma_a} u dy, \quad (8.160)$$

де Σ_a – сфера радіуса a з центром в точці M_0 , яка повністю лежить в області T (теорема середнього значення).

Ця теорема стверджує, що значення гармонічної функції в деякій точці M_0 дорівнює середньому значенню цієї функції на будь-якій сфері Σ з центром в M_0 , якщо сфера Σ_a не виходить з області гармонічності функції.

3. Якщо функція $u(M)$, визначена і неперервна в замкненій області, $T + \Sigma$ задовольняє рівняння $\Delta u = 0$ всередині T , то максимальні і мінімальні значення функції досягаються на поверхні Σ (принцип максимального значення).

Метод функції Гріна

Будемо розглядати розв'язання крайових задач, що належать класу функцій, неперервних в досліджуваній області разом зі своїми першими похідними. Це дасть можливість широко використовувати інтегральні формули.

Розглянемо задачу Діріхле:

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \text{коли } x \in V - FV \\ u = \psi, & \text{коли } x \in FV \end{cases}, \quad (8.161)$$

де V – обмежена область; а f і ψ неперервні функції. Припустимо, що

$$G(o, x) = \frac{1}{4p} \left[\frac{1}{r} + \phi(o, x) \right] \quad (r \equiv |o - x|), \quad (8.162)$$

фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа в області V , яка перетворюється в нуль на її границі FV . Для цього функція $\phi(o, x)$ повинна бути розв'язком граничної задачі

$$\begin{aligned} \Delta \phi(o, x) &= 0, & \text{коли } o, x \in V - FV; \\ \phi(o, x) &= -\frac{1}{r}, & \text{коли } o \in FV, x \in V - FV. \end{aligned} \quad (8.163)$$

При підстановці в формулу (8.159) значення величин, які задані в граничній задачі (8.160), отримаємо

$$u(x) = - \iint_{FV} \text{ш} \frac{dG}{dn} dS_0 - \iiint_V fGdV, \quad x \in V - FV. \quad (8.164)$$

Якщо фундаментальний розв'язок $G(o, x)$ і його похідна $\frac{dG}{dn}$ існують, то ця формула дасть розв'язок задачі Діріхле (8.161), що належить розглянутому класу функцій, в інтегральній формі. Тим самим, розв'язок задачі Діріхле загального вигляду для неоднорідного рівняння зможе бути замінено відшукуванням функції $G(o, x)$, для чого потрібно знайти розв'язок задачі Діріхле вигляду (8.163) для однорідного рівняння. Фундаментальний розв'язок $G(o, x)$ називають функцією Гріна задачі (8.161) або функцією Гріна оператора Лапласа.

Отриманий результат безпосередньо поширюється на зовнішню задачу Діріхле для рівняння Лапласа: $\Delta u = 0$. Що ж стосується зовнішньої задачі Діріхле для рівняння Пуассона, то обґрунтування висновків, аналогічних проведеним для внутрішньої задачі, потребує узагальнення задачі на нескінченні області. Останнє можливо для розв'язків рівняння Пуассона, що задовольняють на нескінченності нерівності

$$u < \frac{A}{c}, \quad \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right| < \frac{A}{r^2}, \quad i = 1, 2, 3; \quad r > r_0, \quad (8.165)$$

де A і r_0 — обмежені числа, при додатковій умові, що інтеграл $\iiint_V fLdV$ має сенс. Нерівності (8.165) носять назву умов регулярності на нескінченності.

Отже, розв'язки розглянутого класу зовнішньої задачі Діріхле для рівняння Пуассона, регулярні на нескінченності, за умови, що інтеграл має сенс, також подамо у формулі (8.164), якщо тільки відповідна функція Гріна існує.

Перейдемо до змішаної задачі:

$$\begin{aligned} \Delta U &= f, \text{ коли } x \in V - FV; \\ \frac{du}{dn} + vU &= \text{ш}, \text{ коли } x \in FV. \end{aligned} \quad (8.166)$$

Скориставшись тотожністю

$$L \left(\frac{du}{dn} + vu \right) - u \left(\frac{dL}{dn} + vL \right) = L \frac{du}{dn} - u \frac{dL}{dn}$$

і ввівши для скорочення позначення $P = \frac{d}{dn} + v$, перетворимо формулу (8.158) до вигляду

$$U(x) = \iint_{FV} (LPu - uPL) dS_0 - \iiint_V L \Delta u dV, \quad x \in V - FV. \quad (8.167)$$

Нехай $G(o, x)$ — фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа в області V , що задовольняє умову $P_o G(o, x) = 0$, коли $o \in FV, x \in V - FV$.

Для цього функція $\Phi(o, x)$ повинна бути розв'язком граничної задачі

$$\begin{aligned} \Delta \Phi_o &= 0, \text{ коли } o, x \in V - FV; \\ P_o \Phi &= -P_o \frac{1}{r}, \text{ коли } o \in FV, x \in V - FV. \end{aligned} \quad (8.168)$$

Підставивши в формулу (8.160) значення величин, задані в граничній задачі (8.160), і поклавши $L = G$, одержимо інтегральне подання розв'язку задачі (8.160):

$$U(x) = \iint_{FV} (LPu - uPL) dS_0 - \iiint_V L \Delta u dV, \quad x \in V - VF. \quad (8.169)$$

Фундаментальний розв'язок $G(o, x)$ називають функцією Гріна задачі (8.160).

Функція Гріна має простий фізичний зміст $u(\xi)$ поля, що створюється точковими джерелами.

Пояснимо це на прикладі поля точкового електричного заряду. За законом Кулона, у вільному просторі потенціал поля одиничного точкового заряду, розташованого в точці x , дорівнює $\frac{1}{4\pi r}$, де $r = |o - x|$. Припустимо, однак, що цей заряд розташований в площині всередині заземленого провідника. При цьому на границі порожнини будуть індуковані заряди, потенціал $\frac{\Phi}{4\pi}$ поля яких поза порожниною повинен компенсувати поле точкового заряду, оскільки потенціал заземленого провідника дорівнює нулю. Внаслідок цього, потенціал на границі порожнини повинен задовольняти граничну умову $\Phi = -\frac{1}{r}$. Звідси зрозуміло, що потенціал повного поля в порожнині $\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r} + \Phi \right)$ є функцією Гріна задачі Діріхле.

Ключові слова

Звичайні диференціальні рівняння, диференціальні рівняння в частинних похідних, моделювання технічних систем і процесів, стійкість, стабілізація, моделювання теплофізичних явищ, моделювання динамічних та стаціонарних процесів, аналітичне моделювання, інтегральна крива, задача Коші, крайова задача, функція Гріна, різницева рівняння, диференціальні рівняння Лагранжа, стаціонарне та нестаціонарне температурне поле, рівняння теплопровідності, метод інтегральних перетворень, коливання струни, рівняння Лапласа, формула Гріна.

Контрольні запитання і завдання для самостійної роботи

1. Дайте означення інтегральної кривої.
2. Чим відрізняється задача Коші від крайової задач для звичайних диференціальних рівнянь?
3. Як звести диференціальне рівняння порядку n до системи з n диференціальних рівнянь першого порядку? Наведіть приклади.
4. Дайте означення функції Гріна.
5. Що є дискретним аналогом диференціального рівняння. Наведіть приклад загальної форми запису різницевих рівнянь.

6. Який вигляд мають диференціальні рівняння Лагранжа другого роду?
7. Наведіть приклади складання диференціальних рівнянь, що описують елементи технічних систем та процесів: різання, коливання, тертя та ін.
8. Наведіть приклади фізичних законів природи, які можна сформулювати мовою рівнянь з частинними похідними.
9. За якими основними ознаками класифікують диференціальні рівняння з частинними похідними?
10. Назвіть типи лінійних рівнянь з частинними похідними другого порядку та охарактеризуйте задачі, що ними описуються.
11. Яка відмінність стаціонарного та нестаціонарного температурних полів?
12. Що є основою виведення диференціального рівняння теплопровідності?
13. Які чинники та умови необхідно враховувати при розв'язанні задачі теплопровідності?
14. Які особливості задання початкових та граничних умов при розв'язанні задачі теплопровідності?
15. Яка відмінність крайових задач Діріхле та Неймана?
16. Охарактеризуйте аналітичні методи розв'язання задач теплопровідності.
17. До яких диференціальних рівнянь застосовується метод інтегральних перетворень?
18. Які особливості застосування методу функцій Гріна?
19. Наведіть розрахункову схему для виведення рівняння коливань струни.
20. Виведіть рівняння поперечних коливань струни.
21. Які особливості рівнянь повздовжніх коливань стрижнів і струн?
22. Охарактеризуйте типи граничних умов задачі коливань струни.
23. Яка особливість застосування методу характеристик до вивчення малих коливань струни?
24. Які відмінності в задачах коливань з обмеженою та необмеженою струни?
25. Сформулюйте задачу Коші для визначення коливань струни.
26. Який розподіл температури задовольняє рівняння Лапласа?
27. Чим характеризуються внутрішні і зовнішні крайові задачі для рівняння Лапласа?
28. Яку функцію називають фундаментальним розв'язком рівняння Лапласа на площині?
29. Як виглядає розрахункова схема для виведення формули Гріна?

Література

1. Абрамовиц М. Справочник по специальным функциям / М. Абрамовиц, И. Стиган. – М. : Наука, 1979. – 486 с.
2. Владимиров В. С. Сборник задач по уравнениям математической физики / Владимиров В. С. И другие – М. : Наука, 2001. – 271 с.

3. Головатий Ю. Д. Диференціальні рівняння / Ю. Д. Головатий, В. М. Кирилич, С. П. Лавренюк. – Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2011. – 470 с.
4. Оборский Г. А. Моделирование систем : монография / Г. А. Оборский, А. Ф. Дащенко, А. В. Усов, Д. В. Дмитришин. – Одесса : Астропринт, 2013. – 664 с.
5. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления.Т.2 / Пискунов Н. С. – М. : Наука, 1976. – 576 с.
6. Самойленко А. М. Диференціальні рівняння / Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О. – Київ : Либідь, 2003 – 600 с.
7. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / Тихонов А. Н., Самарский А. А. – М. : Московский университет, 1999. – 798 с.
8. Вельмисов П. А. Уравнения математической физики / П. А. Вельмисов, Ю. В. Покладова. – Ульяновск : УлГТУ, 2012. – 48 с.
9. Усов А.В. Математическое моделирование и оптимизация в системе компьютерной математики "Maple" / А. В. Усов, А. И. Третьяк, А. П. Коновалов – Одесса : Астропринт, 2016 – 456 с.
10. Усов А. В. Уравнения математической физики в моделировании технических систем / А. В. Усов, А. А. Шпинковский, М. И. Шпинковская – Киев : Освіта України, 2014. –190 с.
11. Усов А. В. Математическое моделирование технических систем / Усов А. В., Вайсман В. А., Дмитришин Д. В., Плотникова Л. И., Оборский Г. А. – К. :Техника, 1995. – 328 с.
12. Якимов А.В. Теплофизика механической обработки / Якимов А. В., Слободяник П. Т., Усов А. В. – К. : Наукова думка, 1991.– 270 с.
13. Усов А. В. Моделирование систем с распределенными параметрами / А. В. Усов, А. Н. Дубров, Д. В. Дмитришин – Одесса : Астропринт, 2002. – 664 с.
14. Усов А. В. Математичні методи моделювання : підручник / А. В. Усов, О. С. Савельева, І. І. Становська – Одеса : Пальміра, 2011.– 500 с.
15. Дмитришин Д. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения и их приложения / Д. В. Дмитришин, А. В. Усов, Ю. А. Морозов, В. В. Перстнева – Одесса : Астропринт, 2008. – 440 с.