МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
та індивідуальні завдання до теми «Невизначений інтеграл» з дисципліни «Вища математика» для студентів I – II курсів усіх спеціальностей

ЗАТВЕРДЖЕНО
на засіданні Вченої ради
академії
Протокол № 1 від 01.02.08

Дніпропетровськ НМетАУ 2008

УДК 517.2

Методичні вказівки та індивідуальні завдання до теми “Невизначений інтеграл” з дисципліни “Вища математика” для студентів I – II курсів усіх спеціальностей / Укл.: В.С. Коноваленков, Т.М. Заборова. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2008. – 44 с.

Наведені основні поняття, властивості та методи знаходження невизначеного інтеграла. Велика кількість прикладів дозволяє добре зрозуміти теоретичні розділи. Також методичні вказівки містять 30 різних варіантів індивідуальних завдань, у кожному з яких є по 28 прикладів, які охоплюють усі розділи програми.

Призначені для студентів усіх спеціальностей.

Укладачі: В.С. Коноваленков, канд. техн. наук, доц.
Т.М. Заборова, ст. викладач

Відповідальний за випуск Г.Г. Швачич, канд. техн. наук, проф.

Рецензент Л.М. Савчук, канд. екон. наук, проф. (НМетАУ)

ЗМІСТ

1. Поняття невизначеного інтеграла та його властивості……………………4

   1.1. Первісна функція……………………………………………………4

   1.2. Невизначений інтеграл…………………………………………….4

   1.3. Основні властивості невизначеного інтеграла……………………4

   1.4. Таблиця інтегралів…………………………………………………..5

   1.5. Теорема про інваріантність формул інтегрування………………….5

   1.6. Найпростіші прийоми інтегрування…………………………….....6

   1.7. Прийоми інтегрування деяких дробів……………………………… .8

   1.8. Виділення цілої частини……………………………………………9

   1.9. Використання тригонометричних формул…………………………..9

2. Інтегрування дрібно-раціональних функцій……………………………….10

   2.1. Інтегрування найпростіших дробів…………………………...……..11

3. Інтегрування частинами……………………………………………...……..13

4. Інтегрування деяких класів тригонометричних функцій…………...…….15

5. Інтегрування деяких ірраціональних виразів…………………...………17

6. Варіанти індивідуальних завдань…………………………..……………20

   Література……………………………………………..………………..44

1. ПОНЯТТЯ НЕВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

1.1. Первісна функція

Нехай функція $f(x)$ є похідною функції $F(x)$, тобто $F'(x)=f(x),$ тоді $f(x)dx$ є диференціалом функції $F(x)$: $dF(x)=F'(x)dx=f(x)dx$.

Функція $F(x)$ називається первісною для функції $f(x)$.

1.2. Невизначений інтеграл

Визначення: Невизначеним інтегралом від даної функції $f(x)$ (або від даного диференціального виразу $f(x)dx$) називається сукупність усіх її первісних:

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

де C - довільна стала. При цьому $f(x)dx$ називається підінтегральним виразом, $f(x)$ - підінтегральною функцією, x - змінною інтегрування.

Будь-яка неперервна функція $f(x)$ має безліч первісних.

Основна задача інтегрального числення полягає у тому, щоб знайти функцію по даному виразу її диференціала.

Підкреслимо роль співвідношення $\int dF(x) = F(x) + C$. Інакше кажучи, інтегрування слід трактувати як операцію обертання по відношенню до операції знаходження диференціалу. Дійсно, використовуючи таблицю диференціалів, а також визначення, які наведені вище, легко одержати таблицю невизначених інтегралів.

Розглянемо приклади:

$$\int \sin x dx = \int d(-\cos x) = -\int d(\cos x) = -\cos x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int d(tgx) = tgx + C.$$

Зауважимо, що існують невизначені інтеграли, які не можна знайти у елементарних функціях. Але ці випадки розглядаються тільки при поглибленому вивченні математики.

1.3. Основні властивості невизначеного інтеграла:

1. $\int [f(x) \pm g(x)] \cdot dx = \int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx;$

2. $\int A \cdot f(x)dx = A\int f(x)dx;$

3. $\int f'(x)dx = f(x) + C \quad \Rightarrow \quad \int d(f(x)) = f(x) + C;$

4. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x), \qquad \Rightarrow \quad d\int f(x)dx = f(x)dx.$

1.4. Таблиця інтегралів

1. $\int x^a\,dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1;$

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C,$

3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C,$

4. $\int e^x dx = e^x + C,$

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C,$

6. $\int \cos x dx = -\sin x + C,$

7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x + C,$

8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}x + C,$

9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C,$

10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C,$

11. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}x + C,$

12. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a}\mathrm{arctg}\dfrac{x}{a} + C,$

13. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C,$

14. $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C.$

1.5. Теорема про інваріантність формул інтегрування

Предмет теореми про інваріантність (незмінність) формул інтегрування легко зрозуміти із очевидних міркувань.

Якщо має місце формула $\int f(x)dx = F(x) + C,$ то вона справедлива у випадку, якщо замість x вона містить будь-яку функцію (від якої можна взяти диференціал), тобто $\int f[\varphi(x)]d\varphi(x) = F[\varphi(x)] + C$. Таким чином, у ролі змінної інтегрування може бути будь-яка функція.

Розглянемо приклад: Очевидно, що $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$, тому $\int \sin^3 x \, d\sin x = \frac{\sin^4 x}{4} + C$.

Корисними при розв'язуванні конкретних прикладів є формули , які випливають з теореми про інваріантність формул інтегрування і які доповнюють основну таблицю інтегралів:

15. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C;$

16. $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + C;$

17. $\int f(ax)dx = \frac{1}{a} F(ax) + C,$

18. $\int f(x+b)dx = F(x+b) + C,$

19. $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C.$

1.6. Найпростіші прийоми інтегрування

Інтегрування у простіших випадках спирається на використання таблиці інтегралів (1-19), властивостей невизначених інтегралів і тотожні перетворення або тільки підінтегральної функції, або диференціала змінної інтегрування, або усього підінтегрального виразу. ***Як у даному розділі, так і в інших, використовуючи різні методи, будемо приводити дані інтеграли до одного чи декількох табличних.***

Розглянемо приклади. **Приклад 1.** $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}} dx$.

Якщо піднести до квадрата чисельник підінтегральної функції, а потім результат почленно поділити на знаменник, одержимо три інтеграли, кожний з яких є табличним:

$$\int \frac{1-2x+x^2}{x^{\frac{3}{2}}} dx = \int \left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} - 2\frac{x}{x^{\frac{3}{2}}} + \frac{x^2}{x^{\frac{3}{2}}} \right) dx = \int x^{-\frac{3}{2}} dx - 2\int x^{-\frac{1}{2}} dx + \int x^{\frac{1}{2}} dx = -2x^{-\frac{1}{2}} - 4x^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{x}} - 4\sqrt{x} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C.$$

Вище використані відомі властивості: інтеграл від суми дорівнює сумі інтегралів, сталий множник можна виносити за знак інтеграла.

Приклад 2: $\int (x+1)^{999}dx$. Використання бінома Ньютона для розкладання підінтегральної функції недоцільно. Використовуючи формулу 18 та формулу 1 таблиці інтегралів, одержимо: $\int (x+1)^{999}dx = \frac{(x+1)^{1000}}{1000} + C.$

До того ж результату можна прийти, вводячи заміну: $z = x+1$, $dz = dx$. Отже, маємо:

$$\int (x+1)^{999}dx = \int z^{999}dz = \frac{z^{1000}}{1000} + C = \frac{(x+1)^{1000}}{1000} + C.$$

Розглянемо очевидне співвідношення: $dx = d(x+a)$, де a — стала.

Звідси $\int (x+1)^{999}dx = \int (x+1)^{999}d(x+1) = \frac{(x+1)^{1000}}{1000} + C.$

Під знак диференціала можна вводити сталий множник, змінну інтегрування у будь-якому ступеню, а також різноманітні функції. При цьому формули таблиці інтегралів узагальнюються за рахунок того, що інтегрування відбувається не по x, а по допоміжній змінній інтегрування $z = \varphi(x)$ (теорема про інваріантність (незмінність) формул інтегрування). Наприклад, перша формула таблиці інтегралів набуває вигляду:

$$\int (\varphi(x))^n \varphi'(x)dx = \int (\varphi(x))^n d(\varphi(x)) = \int z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} = \frac{(\varphi(x))^{n+1}}{n+1} + C.$$

Аналогічно можна записати усі формули таблиці інтегралів. Радимо зробити цю корисну роботу самостійно.

Що до конкретного значення $\varphi(x)$, то воно може бути будь-яким.

Приклад 3:

$$\int \sqrt{3-5x}dx.$$

З формул 1 і 19 випливає: $\int (3-5x)^{\frac{1}{2}}dx = -\frac{1}{5}\frac{(3-5x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = -\frac{2}{15}\sqrt{(3-5x)^3} + C.$

Покажемо, як можна звести даний інтеграл до табличного. Розглянемо очевидні перетворення:

$$dx = \frac{-5}{-5}dx = -\frac{1}{5}d(-5x) = -\frac{1}{5}d(3-5x).$$

Звідси $\int \sqrt{3-5x}dx = -\frac{1}{5}\int \sqrt{3-5x}d(3-5x) = -\frac{1}{5}\int \sqrt{z}dz = -\frac{1}{5}\frac{z^{3/2}}{3/2} + C = -\frac{2}{15}(3-5x)^{3/2} + C$

$(z = 3 - 5x)$.

Аналогічний результат одержимо, якщо скористаємося підстановкою $3-5x = z, \quad -5dx = dz, \quad dx = -\frac{dz}{5}.$

Приклад 4: $\int \frac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x}dx.$

Має місце рівність: $(\cos x - \sin x)' = -\sin x - \cos x,$ тобто у чисельнику підінтегральної функції з точністю до множника (-1) маємо похідну знаменника. Таким чином, $\int \frac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x} dx = -\int \frac{-\sin x - \cos x}{\cos x - \sin x} dx = -\int \frac{d(\cos x - \sin x)}{\cos x - \sin x} = -\ln|\cos x - \sin x| + C.$

Приклад 5: $\int \frac{x}{\sqrt{3-8x^2}} dx.$

Оскільки $(3-8x^2)' = -16x,$ у чисельнику підінтегральної функції із точністю до множника (-16) маємо похідну підкореневого виразу знаменника. З формули 16 випливає:

$$\int \frac{x}{\sqrt{3-8x^2}} dx = -\frac{1}{16}\int \frac{-16x\,dx}{\sqrt{3-8x^2}} = -\frac{1}{16}\int \left(3-8x^2\right)^{-\frac{1}{2}} d(3-8x^2) = -\frac{1}{16}\cdot 2\sqrt{3-8x^2} + C = -\frac{1}{8}\sqrt{3-8x^2} + C.$$

Приклад 6: $\int \mathrm{tg}^2 x dx.$

Використаємо тригонометрію: $\mathrm{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$, звідки $\mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1.$

У відповідності із властивостями невизначеного інтеграла одержуємо суму двох табличних інтегралів:

$$\int \mathrm{tg}^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \mathrm{tg} x - x + C.$$

1.7. Прийоми інтегрування деяких дробів

Існують стандартні прийоми інтегрування, про які доцільно знати. Декілька з них розглянемо на конкретних прикладах.

Приклад 1: $\int \frac{dx}{x^2 - 7x + 10}.$

У знаменнику підінтегральної функції маємо квадратний тричлен із додатним дискримінантом. Відомо, що у цьому випадку тричлен має два дійсних різних кореня. Можна розв'язати задачу двома методами: або розкласти підінтегральну функцію у суму простіших дробів або виділити у її знаменнику повний квадрат, приводячи даний інтеграл до табличного: $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$.

Розглянемо обидва шляхи. Корені квадратного тричлена дорівнюють 5 і 2.

Представимо підінтегральну функцію у вигляді:

$$\frac{1}{x^2 - 7x + 10} = \frac{1}{(x-2)(x-5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-5.}$$

Числа A і B – це, так звані, невизначені коефіцієнти. Для їх знаходження буде складена система лінійних рівнянь (1). Для одержання цієї системи прирівнюємо коефіцієнти при подібних членах у чисельниках першої й останньої дробів, що записані нижче:

$$\frac{1}{x^2 - 7x + 10} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-5} = \frac{A(x-5) + B(x-2)}{(x-2)\cdot(x-5)} = \frac{x(A+B) - 5A - 2B}{x^2 - 7x + 10}.$$

Отже, маємо: $A+B=0, \quad -5A-2B=1.$ (1)

Звідси $A=-\frac{1}{3}, \quad B=\frac{1}{3}.$

Шуканий інтеграл дорівнює сумі двох інтегралів:

$$-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-5}=-\frac{1}{3}\ln|x-2|+\frac{1}{3}\ln|x-5|=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-5}{x-2}\right|+C.$$

Нехай тепер дискримінант квадратного тричлена менший нуля. У цьому випадку інтеграл приводиться до вигляду: $\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C.$

Звернемося до конкретного приклада.

Приклад 2:

$$\int\frac{dx}{x^2+2x+3}=\int\frac{dx}{(x+1)^2+2}=\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$$

Нарешті, якщо дискримінант квадратного тричлена дорівнює нулю, то інтеграл приводиться до вигляду $\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}+C.$

Як бачимо, спосіб виділення повного квадрата є достатньо ефективним, тому що швидко приводить до результату. Якщо квадратний тричлен у знаменнику до того ж знаходиться під знаком квадратного кореня, то повний квадрат виділяється під знаком кореня, після чого застосовуються формули 9, 13 або 14 таблиці інтегралів.

1.8. Виділення цілої частини

Приклад: $\int\frac{x}{x+4}\cdot dx.$

Скористаємося тотожним перетворенням: додамо і віднімемо у чисельнику те саме число, відповідним чином згрупуємо і почленно поділимо на знаменник. Далі використовуємо властивості інтегралів і формулу 15 з таблиці:

$$\int\frac{x}{x+4}dx=\int\frac{(x+4)-4}{x+4}dx=\int\left(1-\frac{4}{x+4}\right)dx=\int dx-4\int\frac{dx}{x+4}=x-4\int\frac{d(x+4)}{x+4}=x-4\ln|x+4|+C.$$

У цьому випадку виділення цілої частини здійснено додаванням й відніманням у чисельнику 4, з подальшим діленням отриманого виразу на знаменник. Загальний випадок виділення цілої частини буде розглянуто у розділі, присвяченому дрібно-раціональним функціям.

1.9. Використання тригонометричних формул

Приклад 1:

$$\int\cos^3 x dx=\int\cos^2 x(\cos x dx)=\int(1-\sin^2 x)d(\sin x)=\int d(\sin x)-\int\sin^2 x dx=\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+C.$$

Від $\cos x$ у непарного степеня відокремлюється $\cos x$ і вводиться під знак диференціала, парний (у даному прикладі - другий) степінь cosx перетворюється за допомогою основної тригонометричної тотожності (або, що те ж саме - «тригонометричної одиниці»), що має вигляд: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$

Покажемо, як можна інтегрувати степені tgx і ctgx.

Приклад 2:

$$\int tg^4 x dx = \int tg^2 x \cdot tg^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) tg^2 x dx =$$

$$= \int \frac{tg^2 x dx}{\cos^2 x} - \int tg^2 x\, dx \int tg^2 x d(tgx) - \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int = \frac{tg^3 x}{3} - tgx + x + C.$$

Відділяємо $tg^2 x$ і представляємо його у вигляді**:** $tg^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1.$ Інші степені тангенса залишаємо незмінними. Після перетворень інтеграл розпадається на декілька інтегралів, які або табличні, або легко зводяться до табличних. Степені ctgx інтегруються аналогічно.

Розглянемо ще один прийом, для випадку коли у знаменнику підінтегрального дробу, знаходиться парний ступінь sinx або cosx, більший другого.

Приклад 3:

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{1 \cdot dx}{\cos^4 x} = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)dx}{\cos^4 x} = \int \frac{tg^2 x}{\cos^2 x} dx + \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int tg^2 x d(tgx) + tgx = \frac{tg^3 x}{3} + tgx + C.$$

Замінивши звичайну одиницю в чисельнику тригонометричною і поділивши почленно на знаменник, одержуємо два табличних інтеграли.

2. ІНТЕГРУВАННЯ ДРІБНО-РАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Дрібно-раціональна функція — це відношення двох багаточленів:

$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, де $P_m(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + ... + a_m$; $Q_n(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + ... + b_n$.

Розглянемо загальну схему інтегрування цих функцій:

1. Якщо $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ — дріб неправильна, тобто $m \geq n$, необхідно виділити її цілу частину. Найпростіше для цього поділити чисельник на знаменник. Ділення робимо, поки у остатку не одержується багаточлен, ступінь якого по меншій мірі на одиницю нижчий ніж старший ступінь n багаточлена $Q_n(x)$.

   При цьому виділяється ціла частина, яка легко інтегрується, оскільки являє собою або багаточлен, або сталу (якщо $m = n$) і, крім того, одержуємо дробову частину у вигляді правильного дробу. Прийом інтегрування правильного дробу полягає у його розкладанні на суму простіших дробів.
2. Знаменник правильного дробу розкладається на прості множники, що мають вигляд $(x-a)^\alpha, ..., (x^2 + px + q)^\mu, ...$ (де $\frac{p^2}{4} - q = D < 0$), шляхом розв'язання рівняння $Q_n(x) = 0.$

3. Правильний дріб розкладається на найпростіші дроби які мають вигляд: $\frac{A_1}{x-a}, \frac{A_2}{(x-a)^2}, ..., \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}; \quad \frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}, ..., \frac{B_\mu x+C_\mu}{(x^2+px+q)^\mu}$ із невідомими коефіцієнтами, методи знаходження яких будуть викладені нижче. Після цього знаходимо суму невизначених інтегралів від цілої частини і найпростіших дробів.

2.1. Інтегрування найпростіших дробів

1. $\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{dx}{x-a} = A \cdot \ln|x-a| + C.$ Тут використані властивості невизначеного інтеграла і таблиця.

2. $\int \frac{A}{(x-a)^\alpha} = A\int (x-a)^{-\alpha}dx = A \cdot \frac{(x-a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} + C == \frac{A}{(1-\alpha)(x-a)^{\alpha-1}} + C, \quad \alpha \neq 1.$

3. $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx,$ причому дискримінант $D = b^2 - 4ac < 0.$

Перетворимо чисельник таким чином, щоб він набув вигляду суми двох членів, один з яких - похідна від знаменника з деяким коефіцієнтом, а другій – стале число. Для цього знайдемо похідну від знаменника ($(ax^2+bx+c)' = 2ax+b$), та використаємо простіші еквівалентні перетворення: множення і ділення на одне й теж число, додавання та віднімання деякого числа, як зроблено нижче:

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+B-\frac{A\cdot b}{2a}}{ax^2+bx+c}dx = \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx + (B-\frac{A\cdot b}{2a})\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} =$$

= {у чисельнику першого з останніх інтегралів – похідна від знаменника }=

$$= \frac{A}{2a}\cdot \ln|ax^2+bx+c| + (B-\frac{A\cdot b}{2a})\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

Розглянемо окремо $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$:

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}} = \left\{\frac{b}{a} = p, \frac{c}{a} = q\right\} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{x^2+px+q}$$

$$= \left\{\begin{array}{l}\text{в знаменнику виділяємо повний}\\ \text{квадрат}\end{array}\right\} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{x^2+2x\cdot\frac{p}{2}+\frac{p^2}{4}+q-\frac{p^2}{4}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}} =$$

$$= \left\{\text{оскільки } D<0, \text{ то } q-\frac{p^2}{4} > 0, \text{ тому } q-\frac{p^2}{4} = +\beta^2\right\} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+\beta^2} = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\beta}\cdot \operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\beta} + C.$$

Таким чином, остаточно маємо:

$$\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx=\frac{A}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right|+\left(B-\frac{A\cdot b}{2a}\right)\cdot\frac{1}{a\cdot\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C.$$

Розглянемо окремі випадки:

1. Знаменник дробу розкладається на лінійні множники, які не повторюються. $\int\frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}dx.$

Підінтегральна дріб — неправильна. Чисельник ділимо на знаменник (виділяючи цілу частину).

$$\begin{array}{l|l} 5x^3+9x^2-22x-8 & \underline{x^3-4x} \\ \underline{5x^3 \qquad -20x} & \quad 5 \\ \quad 9x^2-2x-8 & \end{array}$$

Отже:

$$\frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}=\underbrace{5}_{\text{ціла частина}}+\underbrace{\frac{9x^2-2x-8}{x^3-4x}}_{\text{правильний дріб}}.$$

Знаменник правильного дробу розкладаємо на множники $x^3-4x=x\cdot(x^2-4)=x\cdot(x-2)\cdot(x+2)$. Правильний дріб подаємо у вигляді суми найпростіших дробів із невизначеними коефіцієнтами $\frac{9x^2-2x-8}{x^3-4x}=\frac{9x^2-2x-8}{x\cdot(x-2)\cdot(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}$. Невизначені коефіцієнти A, B, C знаходимо за допомогою методу невизначених коефіцієнтів. Для цього праву частину приводимо до загального знаменника і прирівнюємо чисельники $9x^2-2x-8=A\cdot(x-2)\cdot(x+2)+B\cdot x\cdot(x+2)+C\cdot x\cdot(x-2)$. Використовуючи засіб окремих рішень (замість *x* в обидві частини останньої рівності підставляємо значення коренів знаменника), отримаємо:

$$\begin{array}{r|l} x=0 & -8=-4A \quad\Rightarrow\quad A=2, \\ x=2 & 24=8B \quad\Rightarrow\quad B=3, \\ x=-2 & 32=8C \quad\Rightarrow\quad C=4. \end{array}$$

Остаточно маємо:

$$\int\frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}dx=\int\left(5+\frac{2}{x}+\frac{3}{x-2}+\frac{4}{x+2}\right)dx=3x+2\cdot\ln|x|+3\cdot\ln|x-2|+4\cdot\ln|x+2|+C.$$

2. Знаменник дробу розкладається на множники першого степеня, серед яких є кратні: $\int\frac{(x+3)dx}{x^3+5x^2}.$

Підінтегральна функція — правильний дріб. Знаменник цього дробу розкладається на множники: $x^3+5x^2=x^2(x+5)$. Підінтегральна функція розкладається на найпростіші дроби: $\frac{x+3}{x^3+5x^2}=\frac{x+3}{x^2(x+5)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+5}$. A, B, C знаходимо за допомогою методу невизначених коефіцієнтів $x+3=A\cdot x\cdot(x+5)+B\cdot(x+5)+C\cdot x^2$. Далі використовуємо метод окремих значень у комбінації із методом порівняння коефіцієнтів (прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях *x* зліва і справа).

$$\begin{array}{c|l} x=0 & 3=5B \;\Rightarrow\; B=\dfrac{3}{5} \\ x=-5 & -2=25C \;\Rightarrow\; C=-\dfrac{2}{25} \\ \hline x^2 & 0=A+C \;\Rightarrow\; A=-C=\dfrac{2}{25} \end{array}.$$

Звідси:

$$\int\frac{(x+3)dx}{x^3+5x^2}=\int\left(\frac{2/25}{x}+\frac{3/5}{x^2}-\frac{2/25}{x+5}\right)dx=\frac{2}{25}\ln|x|-\frac{3}{5x}-\frac{2}{25}\ln|x+5|+C.$$

3. Знаменник дробу розкладається на множники першого і другого ступеня (із від’ємним дискримінантом).

Звернемося до приклада: $\int\frac{x}{x^3-1}dx$. Знаменник правильного дробу розкладаємо на множники, а підінтегральну функцію подаємо у вигляді суми простих дробів $x^3-1=(x-1)\cdot(x^2+x+1)$; $\frac{x}{x^3-1}=\frac{x}{(x-1)\cdot(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1.}$ (У чисельнику найпростішого дробу повинен бути багаточлен, степінь якого на одиницю нижчий, ніж у знаменнику). Далі знаходимо невизначені коефіцієнти і інтегруємо:

$$x=A\cdot(x^2+x+1)+(Bx+C)\cdot(x-1);$$

$$\begin{array}{c|l} x=1 & 1=3A \;\Rightarrow\; A=1/3 \\ x^2 & 0=A+B \;\Rightarrow\; B=-1/3 \\ x^1 & 1=A+C-B \;\Rightarrow\; C=1+B-A=1-1/3-1/3=1/3. \end{array}$$

$$\int\frac{x}{x^3-1}dx=\int\left(\frac{1/3}{x}+\frac{-(1/3)\cdot x+1/3}{x^2+x+1}\right)dx=\frac{1}{3}\ln|x|+\frac{1}{3}\int\frac{-x+1}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{3}\ln|x|+$$

$$+\frac{1}{3}\int\frac{-(1/2)\cdot(2x+1)+1+1/2}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{3}\ln|x|-\frac{1}{6}\ln|x^2+x+1|+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+1/2)^2+1-1/4}=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x|-\frac{1}{6}\ln|x^2+x+1|+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+1/2}{\sqrt{3}/2}+C=\frac{1}{3}\ln|x|-\frac{1}{6}\ln|x^2+x+1|+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

3. ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ

Будь-який підінтегральний вираз можна записати у вигляді u dv (u і v - функції змінної інтегрування).

Інтегруванням частинами називається зведення даного інтеграла $\int udv$ до інтеграла $\int vdu$ за допомогою формули

$$\int udv=uv-\int vdu. \qquad (1)$$

Причому $\int vdu$ знаходиться легше, ніж $\int udv$.

Варто пам'ятати, що за** u **приймається функція, яка спрощується при диференціюванні, а за dv - вираз, невизначений інтеграл від якого можна знайти.

Розглянемо випадки для конкретних типів підінтегральних функцій.

1. $\int P_n(x)\begin{Bmatrix}\sin(ax+b)\\ \cos(ax+b)\end{Bmatrix}dx$. або $\int P_n(x)a^{kx+m}dx$ — тобто під знаком інтеграла багаточлен степені x (або додатна ціла ступінь x) помножений або на тригонометричну, або на показову функцію.

У цьому випадку в якості u вибирається багаточлен (або ступінь x). Застосування формули (1)дозволить знизити ступінь x на одиницю. Якщо ступінь x вищий, ніж перший, формулу (1) використовують стільки разів, яким є ступінь x (або багаточлена).

Приклад 1:

$$\int x\sin x dx = -\int x d(\cos x) = -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

Прокоментуємо рішення. Складемо такий ланцюжок рівностей $u = x,\ dv = \sin x dx\ \Rightarrow\ du = dx,\ \ v = \int dv = \int \sin x dx = -\cos x.$

Диференціал u знаходимо, диференціюючи x,

v знаходимо, інтегруючи dv.

Приклад 2:

$\int x 2^x dx$. Згідно із рекомендаціями, у цьому випадку за *u* вибираємо *x*. Тоді: $2^x dx = dv,\ du = dx,\ v = \int dv = \int 2^x dx = \dfrac{2^x}{\ln 2}$. Підставляємо одержане у формулу (2) $\int x\, 2^x dx = \dfrac{x\, 2^x}{\ln 2} - \dfrac{1}{\ln 2}\int 2^x dx = \dfrac{x\, 2^x}{\ln 2} - \dfrac{2^x}{(\ln 2)^2} + C.$

2. Розглянемо інтеграли вигляду:

$\int a^{kx+n}\cos(bx+c)dx$ або $\int a^{kx+n}\sin(bx+c)dx$ - під знаком інтеграла добуток показової функції на тригонометричну.

У даному випадку за u можна брати будь-яку з цих функцій.

Інтеграл при цьому береться частинами двічі і після цього в правій частині утворюється такий же інтеграл, як даний, але з іншим коефіцієнтом. На закінчення залишається привести подібні (це члени, що містять шуканий інтеграл) і поділити на коефіцієнт при інтегралі обидві частини рівності.

Підкреслимо, що в якості u обидва рази варто брати тільки показникову (або тільки тригонометричну) функцію.

Приклад 3:

$$\int e^{3x}\cos x\, dx = \left\{\begin{matrix} u=\cos x, & du=-\sin x dx,\\ dv=e^{3x}dx, & v=\dfrac{e^{3x}}{3}\end{matrix}\right\} = \frac{e^{3x}}{3}\cos x + \frac{1}{3}\int e^{3x}\sin x dx = \left\{\begin{matrix} u=\sin x, & du=\cos x dx,\\ dv=e^{3x}dx, & v=\dfrac{1}{3}e^{3x}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{e^{3x}}{3}\cos x + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{e^{3x}}{3}\sin x - \frac{1}{3}\int e^{3x}\cos x dx\right),$$

тобто одержуємо:

$$\int e^{3x}\cos x dx + \frac{1}{9}\int e^{3x}\cos x dx = \frac{e^{3x}(3\cos x + \sin x)}{9},$$

$$\frac{10}{9}\int e^{3x}\cos x dx = \frac{e^{3x}(3\cos x + \sin x)}{9},$$

$$\int e^{3x}\cos x dx = \frac{e^{3x}(3\cos x + \sin x)}{10} + C.$$

Розглянемо ще один приклад, при розв'язанні якого після дворазового застосування формули інтегрування частинами, одержуємо в правій частині даний інтеграл, але з іншим коефіцієнтом.

Приклад 4:

$$\int \cos\ln x \cdot dx = \left\{\begin{matrix} u = \cos\ln x, & dv = dx, \\ du = -\dfrac{\sin\ln x}{x}\cdot dx, & v = x \end{matrix}\right\} = x\cdot\cos\ln x + \int \sin\ln x \cdot dx = \left\{\begin{matrix} u = \sin\ln x, & dv = dx, \\ du = \dfrac{\cos\ln x}{x}dx, & v = x \end{matrix}\right\} =$$

$$= x\cdot\cos\ln x + x\cdot\sin\ln x - \int\cos\ln x\cdot dx + 2C.$$

$$\int \cos\ln x \cdot dx = \left\{\begin{matrix} u = \cos\ln x, & dv = dx, \\ du = -\dfrac{\sin\ln x}{x}\cdot dx, & v = x \end{matrix}\right\} = x\cdot\cos\ln x + \int \sin\ln x \cdot dx = \left\{\begin{matrix} u = \sin\ln x, & dv = dx, \\ du = \dfrac{\cos\ln x}{x}dx, & v = x \end{matrix}\right\} =$$

$$= x\cdot\cos\ln x + x\cdot\sin\ln x - \int\cos\ln x\cdot dx + 2C.$$

Переносимо інтеграл із правої частини в ліву і приводимо подібні:

$$2\int\cos\ln x\cdot dx = x\cdot\cos\ln x + x\cdot\sin\ln x + 2C.$$

Таким чином, $\int\cos\ln x\cdot dx = \frac{1}{2}\cdot x\cdot(\cos\ln x + \sin\ln x) + C.$

3. Під знаком інтеграла маємо обернену тригонометричну функцію або логарифмічну функцію. Тут у якості u вибираємо одну з цих функцій.

Приклад 5:

Розглянемо інтеграл:

$$\int\frac{x\cdot\operatorname{arctg}x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \left\{\begin{matrix} u = \operatorname{arctg}x, & \dfrac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = dv, \\ du = \dfrac{dx}{1+x^2}, & v = \sqrt{1+x^2} \end{matrix}\right\} = \sqrt{1+x^2}\cdot\operatorname{arctg}x - \int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= \sqrt{1+x^2}\cdot\operatorname{arctg}x - \ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right| + C.$$

4. ІНТЕГРУВАННЯ ДЕЯКИХ КЛАСІВ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Розглянемо невизначені інтеграли вигляду $\int R(\sin x, \cos x)dx$, де $R(\sin x, \cos x)$ — раціональна функція від $\sin x$ і $\cos x$.

Можливі такі випадки:

$$1)\quad R(\sin x,\cos x)=\begin{Bmatrix}\sin\alpha x\cdot\sin\beta x\\ \sin\alpha x\cdot\cos\beta x\\ \cos\alpha x\cdot\cos\beta x\end{Bmatrix}.$$

Використаємо наступні формули: $\sin a\,x\cdot\sin b\,x=\frac{1}{2}[\cos(a-b)x-\cos(a+b)x];$:

$$\sin a\,x\cdot\cos b\,x=\frac{1}{2}[\sin(a-b)x+\sin(a+b)x];$$

$$\cos\alpha x\cdot\cos\beta x=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)x+\cos(\alpha+\beta)x].$$

Приклад 1:

$$\int\sin\frac{x}{3}\cdot\cos\frac{x}{4}dx=\frac{1}{2}\int[\sin\left(\frac{x}{3}-\frac{x}{4}\right)+\sin\left(\frac{x}{3}+\frac{x}{4}\right)]\,dx=\frac{1}{2}\int[\sin\left(-\frac{x}{12}\right)+\sin\left(\frac{7}{12}\cdot x\right)]dx=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\cos(x/12)}{1/12}-\frac{1}{2}\frac{\cos(7/12)}{7/12}+C=6\cos\left(\frac{x}{12}\right)-\frac{6}{7}\cos\left(\frac{7}{12}\cdot x\right)+C.$$

2) $R(\sin x,\cos x)=\sin^{2n}x\cdot\cos^{2m}x,\quad n,m=0,1,...$ (добуток парних додатних степенів синуса та косинуса).

У даному випадку використовуються формули:

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},\quad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}.$$

Приклад 2:

$$\int\sin 3x\cdot\sin^2 x\,dx=\int\sin 3x\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int\sin 3x\,dx-\frac{1}{2}\int\sin 3x\cdot\cos 2x\,dx=$$

$$=-\frac{\cos 3x}{5}-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}\sin 5x\right)dx=-\frac{\cos 3x}{6}+\frac{\cos x}{4}+\frac{\cos 5x}{20}+C.$$

3) $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$ – підінтегральна функція непарна відносно синуса. У цьому випадку застосовується підстановка $\cos x=t$.

Перед тим як виконати заміну змінної необхідно виконати наступне:

— від непарного ступеня $\sin x$ треба відділити у якості співмножника $\sin x$ в першому ступені;

— парний ступінь $\sin x$, який залишився , виразити через $\cos x$, використовуючи основну тригонометричну тотожність $\sin^2 x+\cos^2 x=1$;

— виконати заміну $\cos x=t$.

Приклад 3:

$$\int\frac{\sin^3 x}{\sqrt[5]{\cos^4 x}}dx=\int\frac{\sin^2 x}{\sqrt[5]{\cos^4 x}}\cdot\sin x\,dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{\sqrt[5]{\cos^4 x}}\cdot\sin x\,dx=\left|\begin{matrix}\cos x=t\\ -\sin x\,dx=dt\end{matrix}\right|=-\int\frac{1-t^2}{\sqrt[5]{t^4}}dt=\int\frac{t^2-1}{\sqrt[5]{t^4}}dt=$$

$$=\int\left(t^{\frac{2}{3}}-t^{-\frac{4}{3}}\right)dt=\frac{t^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}-\frac{t^{-\frac{4}{3}+1}}{-\frac{4}{3}+1}+C=\frac{3}{5}t^{\frac{5}{3}}+3\cdot t^{-\frac{1}{3}}+C=\frac{3}{\sqrt[3]{\cos x}}+\frac{3}{5}\sqrt[3]{\cos^5 x}+C.$$

4) $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$ – підінтегральна функція непарна

відносно $\cos x$. Використовується заміна перемінних $\sin x = t$. При цьому з непарним ступенем $\cos x$ здійснюються перетворення, аналогічні тим, що були зроблені з $\sin x$ у попередньому випадку.

5) $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ – підінтегральна функція парна відносно $\sin x$ і $\cos x$.

Здійснюємо заміну $\operatorname{tg}x = t;$ тоді $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$; $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$; $dx = \frac{dt}{1+t^2}$.

Приклад 4:

$$\int \frac{dx}{\cos x \cdot \sin^3 x} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{t^3}{\left(\sqrt{1+t^2}\right)^3}} = \int \frac{1+t^2}{t^3} dt = -\frac{1}{2t^2} + \ln|t| + C = -\frac{1}{2\operatorname{tg}^2 x} + \ln|\operatorname{tg}x| + C.$$

Якщо підінтегральна функція не відповідає жодному з випадків 1) - 5), є раціональна від $\sin x$ та $\cos x$, які до того ж мають перший ступінь, використовуємо універсальну тригонометричну підстановку:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t;\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2};\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2};\ x = 2\operatorname{arctg}t;\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Приклад 5:

$$\int \frac{dx}{8 - 4\sin x + 7\cos x} = \left| \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \right| = \int \frac{2dt}{(1+t^2)\cdot\left(8 - \frac{8t}{1+t^2} + \frac{7(1-t^2)}{1+t^2}\right)} = 2\int \frac{dt}{t^2 - 8t + 15} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{(t-4)^2 - 1} = 2 \cdot \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-4-1}{t-4+1}\right| + C = \ln\left|\frac{t-5}{t-3}\right| + C = \ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 5}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 3}\right| + C.$$

5. ІНТЕГРУВАННЯ ДЕЯКИХ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ВИРАЗІВ

1. $\int R\left(x, \sqrt[n]{x^m}, \sqrt[r]{x^s}, \ldots\right) dx$, де $R\left(x, \sqrt[n]{x^m}, \sqrt[r]{x^s}, \ldots\right)$ - раціональна функція. У даному випадку здійснюється заміна $x = t^k$, де k- найменше спільне кратне показників коренів: k = НСК{$n, r, \ldots$}...

Приклад 1:

$$\int \frac{\sqrt[4]{x} + 1}{(\sqrt{x} + 4)\cdot\sqrt[4]{x^3}} dx = \left| \begin{array}{l} x = t^4 \\ dx = 4t^3 dt \end{array} \right| = \int \frac{t+1}{(t^2+4)\cdot t^3} \cdot 4t^3 dt = 4\int \frac{t+1}{t^2+4} dt = 2\int \frac{2t}{t^2+4} dt + 4\int \frac{dt}{t^2+4} =$$

$$= 2\ln\left|t^2 + 4\right| + 4 \cdot \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C = 2\ln\left|\sqrt{x} + 4\right| + 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{x}}{2} + C.$$

2. $\int R\left(x, \sqrt[n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^m}, \sqrt[r]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^s}, \ldots \right) dx$

Виконуємо заміну: $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$, де k- найменше спільне кратне показників коренів: k = НСК{$n, r, \ldots$}...

Приклад 2:

$\int \frac{1}{(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx.$ Виконаємо заміну: $\frac{1-x}{1+x} = t^2;\ x = \frac{1-t^2}{1+t^2};\ dx = \frac{-4t}{(1+t^2)^2}dt.$

Тоді маємо:

$$\int \frac{1}{(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx = \int \frac{1}{\left(\frac{2t^2}{1+t^2}\right)^2}\cdot t\cdot\left(\frac{-4t}{(1+t^2)^2}\right)dt = -\int\frac{dt}{t^2} = \frac{1}{t} + C = \frac{1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} + C = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C.$$

3. $\int R\left\{\begin{matrix} x,\ \sqrt{a^2-x^2} \\ x,\ \sqrt{x^2-a^2} \\ x,\ \sqrt{x^2+a^2} \end{matrix}\right\}dx.$

У даному випадку використовуються такі тригонометричні підстановки, які дозволяють позбутися ірраціональності у підінтегральній функції:

$$\left\{\begin{matrix} x = a\sin t & (a\cos t) \\ x = \frac{a}{\sin t} & (\frac{a}{\cos t}) \\ x = a\,tgt & (a\,ctgt) \end{matrix}\right\}$$

Приклад 3:

$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}.$ Введемо заміну: $x = \frac{a}{\sin t};\ dx = -\frac{a\cos t}{\sin^2 t}dt.$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = -\int \frac{\frac{a\cos t}{\sin^2 t}}{\frac{a}{\sin t}\sqrt{\frac{a^2}{\sin^2 t} - a^2}}dt = -\frac{1}{a}\int\frac{\cos t}{\cos t}dt = -\frac{1}{a}\int dt = -\frac{1}{a}t + C = -\frac{1}{a}\arcsin\frac{a}{x} + C.$$

4. $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx,$ де $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ - раціональна функція від зазначених змінних.

Розглянемо окремі випадки:

4.1. $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\ dx.$ У даному випадку необхідно:

- винести коефіцієнт *a* при x^2 за знак радикала,
- під радикалом виділити повний квадрат.

У результаті приходимо до одного з інтегралів $\int R\left\{\begin{matrix} x,\ \sqrt{a^2-x^2} \\ x,\ \sqrt{x^2-a^2} \\ x,\ \sqrt{x^2+a^2} \end{matrix}\right\}dx.$

Зауваження. Слід зазначити, що для знаходження інтегралів, які мають вигляд

$\int\sqrt{a^2-x^2}dx,\ \int\sqrt{x^2-a^2}dx,\ \int\sqrt{x^2+a^2}dx$ більш ефективним є метод інтегрування частинами.

Приклад 4:

$$\int\sqrt{3x^2-3x+1}\,dx=\sqrt{3}\int\sqrt{x^2-x+\frac{1}{3}}\,dx=\sqrt{3}\int\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}\,dx=\sqrt{3}\int\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{12}}\,dx;$$

Введемо заміну і використаємо формулу інтегрування частинами:

$$\int\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{12}}\,dx=\left|\begin{matrix}x-\frac{1}{2}=t\\ dx=dt\end{matrix}\right|=\int\sqrt{t^2+\frac{1}{12}}\,dt=\left\{\begin{matrix}u=\sqrt{t^2+\frac{1}{12}} & du=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+\frac{1}{12}}}dt\\ dv=dt & v=t\end{matrix}\right\}=t\cdot\sqrt{t^2+\frac{1}{12}}-$$

$$-\int\frac{t^2+\frac{1}{12}-\frac{1}{12}}{\sqrt{t^2+\frac{1}{12}}}dt=t\cdot\sqrt{t^2+\frac{1}{12}}-\int\sqrt{t^2+\frac{1}{12}}\,dt+\frac{1}{12}\cdot\ln\left|t+\sqrt{t^2+\frac{1}{12}}\right|.$$

Звідси, якщо перенести шуканий інтеграл у ліву частину рівності, одержимо:

$$2\int\sqrt{t^2+\frac{1}{12}}\,dt=t\cdot\sqrt{t^2+\frac{1}{12}}+\frac{1}{12}\cdot\ln\left|t+\sqrt{t^2+\frac{1}{12}}\right|.$$

Остаточно $\displaystyle\int\sqrt{t^2+\frac{1}{12}}\,dt=\frac{t\cdot\sqrt{t^2+\frac{1}{12}}}{2}+\frac{1}{24}\ln\left|t+\sqrt{t^2+\frac{1}{12}}\right|+C.$

Відповідь:

$$\int\sqrt{3x^2-3x+1}\,dx=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{12}}+\frac{\sqrt{3}}{24}\ln\left|x-\frac{1}{2}+\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{12}}\right|+C.$$

4.2. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$

У даному випадку необхідно виконати такі дії:

- винести коефіцієнт a при x^2 за знак радикала,
- виділити під радикалом повний квадрат.

У результаті приходимо до одного з інтегралів:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{A^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{A}+C,\quad \text{якщо}\quad a<0;.$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm A^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm A^2}\right|+C,\quad \text{якщо}\quad a>0\,.$$

4.3. $\displaystyle\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx.$

Тут необхідно:

- знайти похідну від підкореневого виразу знаменника;
- перетворити чисельник, як було зроблено на стор. 11;
- перейти до суми двох інтегралів (один - табличний: $\displaystyle\int\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx=2\sqrt{f(x)}+C;$ другий - інтеграл типу 4.2.).

Приклад 5:

$$\int\frac{2x+5}{\sqrt{9x^2+6x+2}}dx=\left\{(9x^2+6x+2)'=18x+6\right\}=\int\frac{\frac{2}{18}(18x+6)+5-\frac{2}{3}}{\sqrt{9x^2+6x+2}}dx=$$

$$=\frac{1}{9}\int\frac{18x+6}{\sqrt{4x^2+6x+2}}dx+\frac{13}{3}\int\frac{dx}{\sqrt{9x^2+6x+2}}=\frac{1}{9}\cdot 2\sqrt{9x^2+6x+2}+\frac{13}{3}\cdot\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{2}{3}x+\frac{2}{9}}}=$$

$$=\frac{2}{9}\sqrt{9x^2+6x+2}+\frac{13}{9}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}-\frac{1}{9}}}=\frac{2}{9}\sqrt{9x^2+6x+2}+\frac{9}{13}\cdot\ln\left|x+\frac{1}{3}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{9}}\right|+C.$$

4.4. $\int\frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$. У цьому випадку підстановка типу $x-\alpha=\frac{1}{t}$ приводить до інтеграла типу 4.3.

6. ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

Варіант 1

1. $\int\frac{\sqrt[4]{x}-3x-\sqrt[6]{x^5}}{\sqrt[3]{x}}dx$
2. $\int\frac{dx}{\sqrt{7x^2-3}}$
3. $\int\frac{(x+3)^2}{x(x^2+4)}dx$
4. $\int\left(e^{-5x}+\frac{5}{\sqrt[3]{(x-2)^5}}\right)dx$
5. $\int\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}dx$
6. $\int tg\sqrt{x+2}\,\frac{dx}{\sqrt{x+2}}$
7. $\int\cos\left(3-e^x\right)e^x dx$
8. $\int 2^{-x^3+4}\cdot 3x^2dx$
9. $\int\frac{x^2+3x^5}{x^6-9}dx$
10. $\int\frac{8x-11}{\sqrt{5+2x-x^2}}dx$
15. $\int\frac{dx}{4x^4-5x^2+1}$
16. $\int\frac{2x^5-8x^3+3}{x^2-2x}dx$
17. $\int\frac{dx}{x^2(x-1)^2}$
18. $\int\cos^4\frac{x}{8}dx$
19. $\int\sin\frac{x}{2}\cdot\cos 2x\,dx$
20. $\int\sin^5 x\frac{dx}{\sqrt{\cos^3 x}}$
21. $\int\frac{dx}{\sin x-3\cos x}$
22. $\int\frac{dx}{4+\sin^2 x}$
23. $\int tg^5x\,dx$
24. $\int\frac{dx}{\cos^2 x\sin^4 x}$

11. $\int arcsin\, 2x dx$

12. $\int x^2 e^{-3x} dx$

13. $\int x \ln\left(x^2+4\right) dx$

14. $\int e^{2x} \cos x\, dx$

25. $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{x^2\sqrt{1-x^2}} dx$

26. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$

27. $\int x^2\sqrt{1-x^2}\, dx$

28. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(4+x^2\right)^3}}$

Варіант 2

1. $\int \frac{7}{x^3} + 9\sqrt{x^3} - \frac{5x}{\sqrt[3]{x^2}} dx$

2. $\int \frac{dx}{4x^2-9}$

3. $\int 3^x e^x dx$

4. $\int\left(\sqrt[3]{(x+2)^2} - \sin(1-3x)\right) dx$

5. $\int \frac{x+3}{x^2+6x-11} dx$

6. $\int \frac{x + acrtg\, 2x}{1+4x^2} dx$

7. $\int \sin(\ln x - 5)\frac{1}{x} dx$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sin^2\sqrt{x}}$

9. $\int e^{\frac{4}{x}} \frac{dx}{x^2}$

10. $\int \frac{x+2}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx$

11. $\int arctg\, 3x dx$

12. $\int x^2 \cdot 4^{-x} dx$

13. $\int x \ln\left(x^2+2\right) dx$

14. $\int e^x \sin 3x\, dx$

15. $\int \frac{2x+1}{x^3-3x^2-x+3} dx$

16. $\int \frac{2dx}{x^3-5x^2}$

17. $\int \frac{x^4}{x^4-1} dx$

18. $\int \sin 9x \sin 5x dx$

19. $\int \sin x^2 \cdot \cos^4 x\, dx$

20. $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin x}} dx$

21. $\int \frac{dx}{3-5x\cos x}$

22. $\int \frac{dx}{3-\cos^2 x + 4\sin^2 x}$

23. $\int \left(1+2tg^3 x\right) dx$

24. $\int \frac{dx}{\cos^6 x}$

25. $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1} dx$

26. $\int \sqrt{4-x^2}\, dx$

27. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$

28. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$

Варіант 3

1. $\int \frac{(a+bx)^2}{\sqrt[3]{x}}dx$
2. $\int \frac{5}{3x^2-9}dx$
3. $\int \frac{4+\cos^2 2x}{1+2\sin x}dx$
4. $\int\left(\sin(5x+1)+\frac{7}{\sqrt[3]{5-x}}\right)dx$
5. $\int \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}dx$
6. $\int \frac{e^{-x}}{\sqrt{9+e^{-2x}}}dx$
7. $\int \cos(\sin x^2)\sin 2x dx$
8. $\int x^3\sqrt[4]{5x^4-3}dx$
9. $\int \frac{x^3+x}{9-x^4}dx$
10. $\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2-8x+25}}dx$
11. $\int x^3\ln x dx$
12. $\int x^5 e^{-x^2}dx$
13. $\int x tg^2 x\, dx$
14. $\int {}^{2x} \cos x\, dx$
15. $\int \frac{dx}{x^3-8}$
16. $\int \frac{x^5+2x^2+3x-19}{x^3+4x^2+x-6}dx$
17. $\int \frac{dx}{4x^3-x^2}$
18. $\int \sin\frac{5x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}dx$
19. $\int \sin^4\frac{3x}{2}dx$
20. $\int \cos^3 x\sin^5 x dx$
21. $\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}$
22. $\int \frac{dx}{3+\cos^2 x}$
23. $\int ctg^3 x\, dx$
24. $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^4 x}dx$
25. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^2}$
26. $\int \frac{x^3}{2+\sqrt{4-x^2}}dx$
27. $\int \frac{x^2}{\sqrt{25+x^2}}dx$
28. $\int \sqrt{x^2-1}\,dx$

Варіант 4

1. $\int\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{x+1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx$
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-16x^2}}$
3. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$
4. $\int\left(\sqrt{(2x-1)^3}-\frac{5}{\sin^2(1-x)}\right)dx$
5. $\int \frac{e^{3x}}{4+e^{3x}}dx$
15. $\int \frac{x^5+2x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}dx$
16. $\int \frac{2x^2-1}{x^3-5x^2+8x-4}dx$
17. $\int \frac{x^2+5}{x^3-6x^2+9x}dx$
18. $\int \cos 3x\cdot\cos(-x)\, dx$
19. $\int \sin^2 2x\cdot\cos^2 2x\, dx$

6. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{3+2\cos 2x}}dx$

7. $\int 4\left(3x^2-2x-1\right)^3(2-6x)\ dx$

8. $\int \frac{\ln x-3}{\sqrt{4-\ln^2 x}}dx$

9. $\int \frac{\arcsin x+5}{\sqrt{1-x^2}}dx$

10. $\int \frac{x+5}{\sqrt{3x^2+6x+1}}dx$

11. $\int arctg\, 2x\ dx$

12. $\int x^2\cdot e^{-3x}dx$

13. $\int x\ln\frac{1-x}{1+x}\ dx$

14. $\int e^x \sin\frac{3}{2}x\ dx$

20. $\int \sin^3 x\cdot\sqrt[3]{\cos x}\,dx$

21. $\int \frac{dx}{3+\cos x}$

22. $\int \frac{dx}{5-5\sin^2 x+2\cos^2 x}$

23. $\int ctg^3 x\,dx$

24. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^8 x}dx$

25. $\int \frac{dx}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}$

26. $\int \frac{x^2}{\sqrt{\left(2-x^2\right)^3}}dx$

27. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$

28. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$

Варіант 5

1. $\int\left(\frac{4}{x^3}-\sqrt[3]{x}+\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^5}}\right)dx$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{4+9x^2}}$

3. $\int\left(2\sin^2\frac{x}{2}-3e^x\right)dx$

4. $\int\left(\frac{1}{2x+3}+\cos(2x+1)\right)dx$

5. $\int \frac{\sin 2x}{4-3\sin^2 x}dx$

6. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

7. $\int x\cdot ctg\left(3x^2+1\right)dx$

8. $\int \ln(\cos x)\,tgx\ dx$

9. $\int \frac{\arcsin^2 2x+x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$

10. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{15+4x-4x^2}}dx$

15. $\int \frac{x^4+13x+40}{x^3-3x^2-4x+12}dx$

16. $\int \frac{x+3}{x^3-27}dx$

17. $\int \frac{dx}{x^3+x}$

18. $\int \sin^5\frac{x}{2}dx$

19. $\int \sin\frac{3}{2}x\cdot\cos\frac{5}{2}x\,dx$

20. $\int \cos^4 3x\,dx$

21. $\int \frac{dx}{2\sin x+\cos x}$

22. $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$

23. $\int ctg^7 x\,dx$

24. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx$

11. $\int x e^{-2x} dx$

12. $\int ln^2 x \frac{dx}{x^2}$

13. $\int xctg^2 x\, dx$

14. $\int \sqrt{x^2+9}\, dx$

25. $\int \frac{1+\sqrt[3]{x}}{\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}\right)\cdot\sqrt[4]{x^3}} dx$

26. $\int \frac{x^2}{\sqrt{3-x^2}} dx$

27. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-5}}$

28. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4} dx$

Варіант 6

1. $\int \left(\sqrt[3]{x}-2\right)^3 dx$

2. $\int \frac{dx}{9x^2-4}$

3. $\int \left(3-cos^2 \frac{x}{3}\right) dx$

4. $\int \left(\frac{5}{4-7x}+\frac{2}{4-(x-3)^2}\right) dx$

5. $\int \frac{2-sin\, x}{2x+cos\, x} dx$

6. $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-2}} dx$

7. $\int \frac{dx}{sin^2 2x\sqrt[5]{1+ctg 2x}}$

8. $\int (1+ln\, x)^5 \cdot \frac{dx}{x}$

9. $\int \frac{x-(arctgx)^4}{1+x^2} dx$

10. $\int \frac{5x-3}{\sqrt{13x-5x^2}} dx$

11. $\int arctg \frac{x}{2} dx$

12. $\int (x+3) ln^2 (x+3)\, dx$

13. $\int x^3 sin\left(x^2\right) dx$

14. $\int e^{-2x} sin \frac{x}{2}\, dx$

15. $\int \frac{x-4}{x^3-6x^2+9x} dx$

16. $\int \frac{x^2 dx}{x^3-3x-2}$

17. $\int \frac{x^4+2x-2}{x^4-1} dx$

18. $\int sin\, 2x\, cos\, 3x dx$

19. $\int sin^4 2x\, dx$

20. $\int \frac{sin^3 x}{\sqrt{cos\, x}} dx$

21. $\int \frac{dx}{5+sin \frac{x}{2}}$

22. $\int \frac{dx}{4+cos^2 x}$

23. $\int tg^6 x dx$

24. $\int \frac{dx}{sin\, x\cdot cos^3 x}$

25. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}}$

26. $\int x^2\sqrt{9-x^2} dx$

27. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-25}}$

28. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2+9\right)^3}}$

Варіант 7

1. $\int\left(\left(a^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{3}}\right)^3-\frac{4}{x^3}+\frac{9x}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$

2. $\int\frac{dx}{16+9x^2}$

3. $\int\left(2^x+3x^2 4^{-x}\right)4^x\,dx$

4. $\int\left(\frac{1}{cos^2(2x-1)}+\frac{2}{\sqrt{4-(x-1)^2}}\right)dx$

5. $\int\frac{cos\,3x}{3\,sin\,3x-5}dx$

6. $\int\frac{sin\,2x}{\sqrt[3]{1+cos^2 x}}dx$

7. $\int sin\left(\frac{4}{x}+5\right)\frac{dx}{x^2}$

8. $\int tg^3 x\cdot sec^2 x\,dx$

9. $\int\frac{x^5-4x^2}{9-x^6}dx$

10. $\int\frac{x+1}{\sqrt{3-4x-x^2}}dx$

11. $\int x\,sin\,3x\,dx$

12. $\int x^2 e^{-x}dx$

13. $\int arcsin\sqrt{x}\,dx$

14. $\int e^{-\frac{x}{2}}sin\,x\,dx$

15. $\int\frac{x^4-17x^2}{x^3+4x^2-x-4}dx$

16. $\int\frac{dx}{x^3+6x^2+10x}$

17. $\int\frac{3x+2}{x^4-4x^2}dx$

18. $\int cos\,x\,cos\,7x\,dx$

19. $\int sin^2 3x\cdot cos^2 3x\,dx$

20. $\int\sqrt[5]{sin^4\frac{x}{2}\cdot cos^3\frac{x}{2}}dx$

21. $\int\frac{dx}{2-3\,cos\,x}$

22. $\int\frac{dx}{1+2\,sin\,x\,cos\,x+cos^2 x}$

23. $\int ctg^5 x\,dx$

24. $\int\frac{dx}{cos^4 x}$

25. $\int\frac{\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x}}{6\cdot\sqrt[4]{x}}dx$

26. $\int\frac{xdx}{\sqrt{\left(2+x^2\right)^3}}$

27. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

28. $\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$

Варіант 8

1. $\int\left(\frac{5}{x}+\sqrt[3]{x^2}-\frac{\sqrt[4]{x}}{x^2}\right)dx$

2. $\int\frac{dx}{4x^2+9}$

3. $\int\frac{3-2ctg^2 2x}{cos^2 2x}dx$

15. $\int\frac{dx}{x^3-2x^2+x}$

16. $\int\frac{x^2dx}{x^3+5x^2+8x+4}$

17. $\int\frac{x^4-1}{x^4+1}dx$

4. $\int\left(\frac{2}{4-3x}+sin(5+2x)\right)dx$

5. $\int\frac{x^3}{5-4x^4}dx$

6. $\int e^{\sqrt{x-1}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x-1}}$

7. $\int\frac{cos\,x}{\sqrt{2-sin^2 x}}dx$

8. $\int sin(ln\,x+5)\frac{dx}{x}$

9. $\int\frac{4x^3-x}{16-x^4}dx$

10. $\int\frac{x}{\sqrt{9x^2-6x+2}}dx$

11. $\int\frac{x\,sin\,x}{cos^3 x}dx$

12. $\int x\cdot ln^2\,x\,dx$

13. $\int xarctg\,(x^2)\,dx$

14. $\int\sqrt{9+x^2}\,dx$

18. $\int sin\,7x\cdot sin\,4xdx$

19. $\int sin^2 3x\cdot cos^2\,x\,dx$

20. $\int sin^2 x\cdot cos^7 x\,dx$

21. $\int\frac{21}{3\,sin\,x+4\,cos\,x}dx$

22. $\int\frac{dx}{1-3\,cos^2\,x+4\,sin^2\,x}$

23. $\int tg^4 x\,dx$

24. $\int\frac{dx}{cos\,x\cdot sin^3\,x}$

25. $\int\frac{x^3+\sqrt{1+x}}{\sqrt[4]{1+x}}dx$

26. $\int\frac{x^2}{\sqrt{(8-x^2)^3}}dx$

27. $\int\frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}$

28. $\int\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$

Варіант 9

1. $\int\frac{(3\sqrt{x}+1)^2-2x^3}{x^3}dx$

2. $\int\frac{dx}{3x^2+9}$

3. $\int\frac{(2+x)^2}{x(x^2+4)}dx$

4. $\int\left(5^{\frac{x}{2}+3}-tg(7x-1)\right)dx$

5. $\int\frac{3\,sin\,x+2\,cos\,x}{2\,sin\,x-3\,cos\,x}dx$

6. $\int\frac{3^x}{9^x+4}dx$

7. $\int\frac{dx}{x\sqrt{1+5\,ln^2\,x}}$

15. $\int\frac{dx}{4x^4-5x^2+1}$

16. $\int\frac{2x^5-8x^3+3}{x^2-2x}dx$

17. $\int\frac{dx}{x^2(x-1)^2}$

18. $\int cos^4\frac{x}{8}dx$

19. $\int sin\frac{x}{2}\cdot cos\,2x\,dx$

20. $\int sin^5\,x\frac{dx}{\sqrt{cos^3\,x}}$

21. $\int\frac{dx}{sin\,x-3\,cos\,x}$

8. $\int 2^{-x^3+4}\cdot 3x^2dx$

9. $\int \frac{x^2+3x^5}{x^6-9}dx$

10. $\int \frac{8x-11}{\sqrt{5+2x-x^2}}dx$

11. $\int arcsin\,2xdx$

12. $\int x^2e^{-3x}dx$

13. $\int x\,ln\left(x^2+4\right)dx$

14. $\int e^{2x}\cos x\,dx$

22. $\int \frac{dx}{4+sin^2 x}$

23. $\int tg^5 x\,dx$

24. $\int \frac{dx}{cos^2 x sin^4 x}$

25. $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx$

26. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$

27. $\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$

28. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(4+x^2\right)^3}}$

Варіант 10

1. $\int\left(\sqrt[4]{x}-\frac{4}{x_2}-\frac{5\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^4}}\right)dx$

2. $\int \frac{3}{\sqrt{4x^2-9}}dx$

3. $\int\left(sin\frac{x}{2}-cos\frac{x}{2}\right)^2dx$

4. $\int\left(\frac{4}{\sqrt[3]{x-2}}+\frac{1}{cos^2(3x-1)}\right)dx$

5. $\int \frac{sin\,3x}{4-cos\,3x}dx$

6. $\int \frac{\sqrt[3]{4+ln\,x}}{x}dx$

7. $\int e^{2x}\cdot cos\,\left(e^{2x}+3\right)\,dx$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(1-9x^2\right)}arcsin\,3x}$

9. $\int \frac{\left(sin\,2x+5\right)cos\,2x}{4+sin^2\,2x}dx$

10. $\int \frac{4-3x}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx$

11. $\int xe^{3x}dx$

15. $\int \frac{3x^5+1}{x^4+5x^2+6}dx$

16. $\int \frac{dx}{x^3-4x^2+3x}$

17. $\int \frac{2x+1}{x^3-3x^2+4}dx$

18. $\int cos\,5x\,cos\,xdx$

19. $\int sin\,x^2\cdot cos^6\,x\,dx$

20. $\int cos^5\,2x\,sin^2\,2x\,dx$

21. $\int \frac{dx}{5-4\,sin\,x+3\,cos\,x}$

22. $\int \frac{1}{1+sin^2\,x}dx$

23. $\int \frac{tgx}{1+tgx}dx$

24. $\int \frac{dx}{sin^4\,x}$

25. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

12. $\int (x+1)\ln^2(x+1)dx$

13. $\int x\,arctg^2 x\,dx$

14. $\int e^{-3x}\sin 2x\,dx$

26. $\int \frac{\sqrt{2-x^2}}{x^2}dx$

27. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-2}}$

28. $\int \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$

Варіант 11

1. $\int \frac{(x^2+1)(x-4)}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

2. $\int \frac{dx}{1-2x^2}$

3. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$

4. $\int \left(e^{-3x+5}+\frac{7}{\cos^2(5x-1)}\right)dx$

5. $\int \frac{x^2+1}{x^3+3x+1}dx$

6. $\int \frac{dx}{x\cos^2(1+4\ln x)}$

7. $\int \sin(\ln x+5)\frac{dx}{x}$

8. $\int \sqrt[3]{1+5tgx}\,\frac{dx}{\cos^2 5x}$

9. $\int \frac{(\arccos x)^3-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

10. $\int \frac{x+3}{\sqrt{16+6x+x^2}}dx$

11. $\int x2^x dx$

12. $\int x^2\sin^2\frac{x}{2}dx$

13. $\int (\arcsin x)^2\,dx$

14. $\int e^{2x}\sin x\,dx$

15. $\int \frac{x+1}{x^3+5x^2+6x}dx$

16. $\int \frac{6x^4-5x^3+4x^2}{2x^3-x+1}dx$

17. $\int \frac{x^3-6x^2+14x-6}{(x+1)(x-2)}dx$

18. $\int \sin 3x\sin x dx$

19. $\int \cos^4 3x\,dx$

20. $\int \cos^8 x\sin^5 x dx$

21. $\int \frac{dx}{4-5\sin x}$

22. $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$

23. $\int tg^5 x\,dx$

24. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx$

25. $\int \frac{dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})}$

26. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$

27. $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^3}dx$

28. $\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x^2}dx$

Варіант 12

1. $\int \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}}dx$
2. $\int \frac{dx}{9x^2-16}$
3. $\int (1+tg^2 2x)dx$
4. $\int \left(2^{-3x+2}+\frac{1}{4+(x-1)^2}\right)dx$
5. $\int \frac{dx}{(x+2)ln(x+2)}$
6. $\int \frac{cos\,2x}{\sqrt[5]{sin^2 2x}}dx$
7. $\int \frac{(1+tg5x)^2}{cos^2 5x}dx$
8. $\int sin(3e^{-x}+1)\frac{dx}{e^x}$
9. $\int \frac{x^3+x}{\sqrt{16-x^4}}dx$
10. $\int \frac{x+1}{\sqrt{4x^2-4x+8}}dx$
11. $\int arccos\,2x dx$
12. $\int x^2 e^{-2x}dx$
13. $\int ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$
14. $\int \sqrt{4+x^2}\;dx$
15. $\int \frac{x+5}{2x^3+5x^2+3x}dx$
16. $\int \frac{dx}{x^3+x^2+2x+2}$
17. $\int \frac{3x^3+1}{x^3-x^2}dx$
18. $\int cos\,x\cdot cos\,7x dx$
19. $\int sin^4\frac{x}{2}\cdot cos^2\frac{x}{2}dx$
20. $\int \sqrt{sin\,x}\cdot cos^5 x\,dx$
21. $\int \frac{dx}{5+3\,cos\,x}$
22. $\int \frac{1}{a^2\,sin^2 x-b^2\,cos^2 x}dx$
23. $\int 2tg^3 x\,dx$
24. $\int \frac{dx}{cos\,x\,sin^3 x}$
25. $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{ax+b}}$
26. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(3-x^2)^3}}$
27. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$
28. $\int \frac{dx}{x\sqrt{7+x^2}}$

Варіант 13

1. $\int \frac{2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x^2}+4}{\sqrt[3]{x}}dx$
2. $\int \frac{dx}{9x^2-4}$
3. $\int \left(3-sin^2\frac{x}{4}\right)dx$
15. $\int \frac{x^5+x^3+x+1}{x^4-x^3}dx$
16. $\int \frac{dx}{x^3-8x^2+21x-14}$
17. $\int \frac{1}{x^3+2x^2+x+2}dx$

4. $\int\left(sin(2x+1)+\frac{4}{\sqrt{(x+5)^3}}\right)dx$

18. $\int sin\,2x\,cos\,4xdx$

5. $\int\frac{3x^2-8x}{x^3-4x^2}dx$

19. $\int cos^6\frac{x}{3}dx$

6. $\int\frac{(arcsin2x+3)^2}{\sqrt{1-4x^2}}dx$

20. $\int sin^7 x\,cos\,x\,dx$

7. $\int e^{arctgx}\frac{dx}{9+9x^2}$

21. $\int\frac{sin\,xdx}{sin\,x-3cos\,x}$

8. $\int sin\left(4+\sqrt{5-x}\right)\frac{dx}{\sqrt{5-x}}$

22. $\int\frac{dx}{4-3cos^2 x+5\,sin^2 x}$

9. $\int\frac{x^3+4x}{9x^4+16}dx$

23. $\int ctg^6 x\,dx$

10. $\int\frac{x+3}{\sqrt{4x^2-4x+3}}dx$

24. $\int\frac{cos^2 5x}{sin^4 5x}dx$

11. $\int\frac{xdx}{sin^2 x}$

25. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}$

12. $\int x\,ln^2 5xdx$

26. $\int\sqrt{3-x^2}\,dx$

13. $\int xarctg\,2x\,dx$

27. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$

14. $\int e^{-3x}\,cos\,x\,dx$

28. $\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$

Варіант 14

1. $\int\left(\frac{4}{\sqrt[5]{x}}+\frac{5}{x^3}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^5}}\right)dx$

15. $\int\frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}dx$

2. $\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2+5}}$

16. $\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$

3. $\int\frac{dx}{cos4x+sin^2 2x}$

17. $\int\frac{x-1}{x^3-x^2}dx$

4. $\int\left(\frac{5}{4-7x}+cos(4-3x)\right)dx$

18. $\int sin\frac{x}{2}sin\frac{3x}{2}dx$

5. $\int\frac{dx}{(4+arcsin\,2x)\sqrt{1-4x^2}}$

19. $\int cos^4 5x\,dx$

6. $\int 2^{-x}\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^x\right)^3 dx$

20. $\int sin^5 x\,cos^4 x\,dx$

7. $\int\frac{dx}{x(4\,ln^2 x)+9}$

21. $\int\frac{dx}{sin\,x-cos\,x+1}$

8. $\int sin(4+tgx)\frac{dx}{cos^2 x}$

9. $\int \frac{sin\frac{x}{2}+4}{4\,sin^2\frac{x}{2}+9}dx$

10. $\int \frac{2x+5}{\sqrt{9x^2+6x+2}}dx$

11. $\int x\cos\frac{x}{2}dx$

12. $\int x^2\ln^2 x dx$

13. $\int \frac{arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$

14. $\int \sqrt{4+x^2}\,dx$

22. $\int \frac{dx}{3cos^2 x+4\,sin^2 x}$

23. $\int (1+6\,ctg^4 x)dx$

24. $\int \frac{sin\,x^2}{cos^6 x}dx$

25. $\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}dx$

26. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-16}}$

27. $\int x^2\sqrt{4-x^2}dx$

28. $\int \frac{dx}{x\sqrt{10+x^2}}$

Варіант 15

1. $\int \frac{(\sqrt{x}-1)^2-4x^5}{x}dx$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-4}}$

3. $\int cos^2\frac{x}{4}dx$

4. $\int \left(e^{4-3x}+\frac{2}{9-(x-1)^2}\right)dx$

5. $\int \frac{7}{7-ctg\frac{x}{2}}\cdot\frac{dx}{sin^2\frac{x}{2}}$

6. $\int \frac{4\sqrt[3]{arctg3x-2}}{1+9x^2}dx$

7. $\int sin(4+5\ln x)\frac{dx}{x}$

8. $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+4}}dx$

9. $\int \frac{cos\,x+5}{4-cos^2 x}dx$

15. $\int \frac{x^4+5x^3-7x^2+5}{x^3-x^2+5x-5}dx$

16. $\int \frac{x+4}{x^3+x^2}dx$

17. $\int \frac{dx}{x^3+27}$

18. $\int sin\,2x\cos 4x dx$

19. $\int cos^4\frac{3x}{2}dx$

20. $\int sin^2 2x\cos^3 2x\,dx$

21. $\int \frac{dx}{4\cos x-1}$

22. $\int \frac{dx}{5+4\sin x\cos x-sin^2 x}$

23. $\int ctg^6 x\,dx$

10. $\int \frac{x+3}{\sqrt{3-4x-4x^2}}dx$

11. $\int x\cos 2x dx$

12. $\int x^2 2^x dx$

13. $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

14. $\int \cos \ln x\, dx$

24. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}dx$

25. $\int \frac{\sqrt[4]{x}+1}{\left(\sqrt{x}+1\right)\sqrt[4]{x^3}}dx$

26. $\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}}dx$

27. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}}$

28. $\int \frac{\sqrt{x^2+3}}{x^2}dx$

Варіант 16

1. $\int \frac{\sqrt[3]{x^4}-\sqrt[4]{x}-3\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2+7}}$

3. $\int \frac{2-ctg^2 5x}{\sin^2 5x}dx$

4. $\int \left(\frac{5}{4x3}-\frac{7}{\sin^2(2-x)}\right)\, dx$

5. $\int \frac{x^2 dx}{4x^3-5}$

6. $\int x\sin\left(3-4x^2\right)dx$

7. $\int \sqrt{\sin^3 6x}\cos 6x dx$

8. $\int e^{arctg\, 2x}\,\frac{dx}{1+4x^2}$

9. $\int \frac{x+\sqrt{\arccos\frac{x}{2}}}{\sqrt{4-x^2}}dx$

10. $\int \frac{x}{\sqrt{6x-9x^2}}dx$

11. $\int x^3 e^{3x} dx$

12. $\int arctg 7x x dx$

15. $\int \frac{dx}{x^4-5x^3+6x^2}$

16. $\int \frac{x^3-3x^2-3x+8}{x^3-3x^2-4x+12}dx$

17. $\int \frac{x+1}{x^3-x^2+2x-2}dx$

18. $\int \sin\frac{7}{2}x\cos x dx$

19. $\int \sin^4 x\cos^2 x\, dx$

20. $\int \sin^5 x\cos^5 x\, dx$

21. $\int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}$

22. $\int \frac{dx}{5+3\sin^2 x}$

23. $\int tg^7 x\, dx$

24. $\int \frac{dx}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin x}$

25. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$

26. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-3}}$

13. $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$

14. $\int \sqrt{9-x^2}\,dx$

27. $\int \frac{dx}{\left(16+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

28. $\int \frac{x^3dx}{3+\sqrt{9-x^2}}$

Варіант 17

1. $\int \frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{x}\right)^2-5x^2\sqrt{ax}}{\sqrt{ax}}dx$

2. $\int \frac{dx}{16-9x^2}$

3. $\int \frac{4-2tg^2 3x}{sin^2 3x}dx$

4. $\int \left(e^{3x-1}+\frac{1}{4+(x-2)^2}\right)dx$

5. $\int \frac{5}{(arctg 3x+1)\left(1+9x^2\right)}dx$

6. $\int \frac{3\sqrt{ln 3x-1}}{2x}dx$

7. $\int \frac{dx}{x\cos^2(4-\ln x)}$

8. $\int \sqrt[4]{sin^3 2x}\cos 2xdx$

9. $\int \frac{x^5-4x^2}{\sqrt{5+x^6}}dx$

10. $\int \frac{x}{\sqrt{8+4x-4x^2}}dx$

11. $\int \frac{xdx}{cos^2 x}$

12. $\int x^2\cos xdx$

13. $\int xarctg 4x\,dx$

14. $\int e^{-x}\cos 2x\,dx$

15. $\int \frac{2x-1}{4x^3+4x^2+x}dx$

16. $\int \frac{x3-7}{x^3+x^2+4x+4}dx$

17. $\int \frac{x^4+7}{x^4-1}dx$

18. $\int sin 4x\,sin 3xdx$

19. $\int sin^4 2x\cdot cos^2 2x\,dx$

20. $\int sin^7\frac{x}{2}dx$

21. $\int \frac{dx}{2-\sin x}$

22. $\int \frac{dx}{4+3cos^2 x-5\sin^2 x}$

23. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx$

24. $\int \frac{dx}{cos^6 x}$

25. $\int \left(1-tg^3 x\right)dx$

26. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}$

27. $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx$

28. $\int \frac{dx}{x\sqrt{25+x^2}}$

Варіант 18

1. $\int \frac{x^2+\sqrt[3]{x}-5x+4}{x}dx$

15. $\int \frac{x^5-x^2-x+1}{x^3+2x^2+2x}dx$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$

3. $\int \frac{2-3ctg^2 3x}{cos^2 3x}dx$

4. $\int \left(\sqrt{(2-3x)^5} + \frac{1}{\sqrt{a^2-(x+1)^2}} \right) dx$

5. $\int \frac{x^3}{7-4x^4}dx$

6. $\int \frac{\sin x}{2-3\cos^2 x}dx$

7. $\int \left(2^{\sin x}+5\right)\cos x\,dx$

8. $\int x\sqrt[5]{\left(5-4x^2\right)^3}dx$

9. $\int \frac{8x-(arctg 2x)^5}{1+4x^2}dx$

10. $\int \frac{xdx}{\sqrt{8-3x-2x^2}}$

11. $\int \ln x \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$

12. $\int x^2 \cdot \cos^2 \frac{x}{2}dx$

13. $\int \cos(\ln x)\,dx$

14. $\int \sqrt{7+4x^2}\,dx$

16. $\int \frac{x+2}{x^3-x^2-4x+4}dx$

17. $\int \frac{dx}{9x^3-6x^2+x}dx$

18. $\int \cos 5x \cdot \sin 7x dx$

19. $\int \sin^5 2x \cdot \cos^3 2x\,dx$

20. $\int \sin^4 3x\,dx$

21. $\int \frac{dx}{4-\sin x}$

22. $\int \frac{dx}{\sin^2 x+\sin x\cos x-\cos^2 x}$

23. $\int \frac{\sin^2 3x}{\cos^4 3x}dx$

24. $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$

25. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,\sqrt[3]{x}}$

26. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$

27. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$

28. $\int x\sqrt{5-x^2}dx$

Варіант 19

1. $\int \left(\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right) + \frac{4}{\sqrt[3]{x}} \right) dx$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-8}}$

3. $\int \left(1+ctg^2 3x\right)dx$

4. $\int \left(\frac{1}{\sin^2(5-x)} + \frac{5}{\sqrt{4+(2x-3)^2}} \right) dx$

5. $\int \frac{2x^3-x^7}{5+x^8}dx$

15. $\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}dx$

16. $\int \frac{5x-1}{x^3-4x^2+4x}dx$

17. $\int \frac{2x+1}{x^3-1}$

18. $\int \sin\frac{x}{7}\sin\frac{x}{4}dx$

19. $\int \cos^6 x\,dx$

6. $\int \frac{dx}{\cos^4 4x(1+tg 4x)}$

7. $\int \sin 5x(1+\cos 5x)^7\,dx$

8. $\int ctgx\, ln(\sin x)dx$

9. $\int \frac{4+arctg\,\frac{x}{2}}{4-16arctg^2\,\frac{x}{2}}\cdot\frac{dx}{4+x^2}$

10. $\int \frac{x+3}{\sqrt{16+6x-x^2}}dx$

11. $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx$

12. $\int x^2 e^{-\frac{x}{2}}dx$

13. $\int arctg\sqrt{x}\;dx$

14. $\int \sin(ln\,x)\;dx$

20. $\int \sin^7 9x\cos^3 9xdx$

21. $\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x-2}$

22. $\int \frac{dx}{4-3\sin^2 x-4\cos x\sin x}$

23. $\int ctg^4 x\,dx$

24. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^6 x}dx$

25. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$

26. $\int \frac{\sqrt{36x^2-1}}{x^2}dx$

27. $\int \frac{\sqrt{25-x^2}}{x^2}dx$

28. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}dx$

Варіант 20

1. $\int \frac{\left(1-\sqrt[3]{x}\right)^2+7\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

2. $\int \frac{dx}{25-4x^2}$

3. $\int tg^2 3xdx$

4. $\int\left(\frac{1}{\sqrt{5-3x}}+\frac{7}{\sqrt{16(x+1)^2}}\right)dx$

5. $\int \frac{dx}{arctg\,2x\left(1+4x^2\right)}$

6. $\int \sqrt[3]{\sin 2x-1}\cos 2xdx$

7. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{4-e^{4x}}}dx$

8. $\int \sin\left(4\sqrt{x+2}-1\right)\frac{dx}{\sqrt{x+2}}$

9. $\int \frac{4+3\ln x}{9-16\ln^2 x}dx$

15. $\int \frac{dx}{x^3-3x+2}$

16. $\int \frac{2x+3}{x^3-2x^2-x+2}dx$

17. $\int \frac{x^3-4}{x^3+x}dx$

18. $\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}dx$

19. $\int \cos^2 2x\cdot\sin^2\frac{x}{2}dx$

20. $\int \sin^7 x\,dx$

21. $\int \frac{dx}{4+5\cos x}$

22. $\int \frac{dx}{1-4\sin x\cos x+3\sin^2 x}$

23. $\int\left(3-tg^5 x\right)dx$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{25-12x-4x^2}}$

11. $\int x \sin\frac{x}{2}dx$

12. $\int (x+1)^2 \cdot e^{-3x}dx$

13. $\int \frac{x \arcsin 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$

14. $\int \sqrt{4+x^2}\ dx$

24. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx$

25. $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x}dx$

26. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}dx$

27. $\int x^2\sqrt{9-x^2}dx$

28. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}dx$

Варіант 21

1. $\int \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}^4} - \frac{2ч + 4\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{x}} \right)dx$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+8}}$

3. $\int \frac{\sin 2x}{5+\cos^2 x}dx$

4. $\int \left(\sqrt[5]{2-x^3} + e^{3-4x}\right)dx$

5. $\int \frac{e^{2x}}{e^x - e^{-x}}dx$

6. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{\cos^2 2x}}dx$

7. $\int (tg\,2x+4)^7 \frac{1}{\cos^2 2x}dx$

8. $\int \left(1+5\ln^3 x\right)\frac{dx}{x}$

9. $\int \frac{(9+2\ln x)}{4-\ln^2 x}\cdot\frac{dx}{x}$

10. $\int \frac{2x-5}{3x^2+4x+6}dx$

11. $\int \arcsin\frac{x}{2}dx$

12. $\int \left(9x^2+1\right)\cdot e^{3x}dx$

13. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x}dx$

15. $\int \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2}dx$

16. $\int \frac{x^3+1}{4x^3-4x^2+x}dx$

17. $\int \frac{x^2+1}{x^3-6x^2+x-6}dx$

18. $\int \sin\frac{5}{2x}\cos 7x dx$

19. $\int \sin^4 2x\, dx$

20. $\int \cos^3 3x dx$

21. $\int \frac{dx}{3\cos^2 x - 4}$

22. $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}$

23. $\int ctg^3 x\, dx$

24. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$

25. $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$

26. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{\left(4+x^2\right)^3}}$

27. $\int \sqrt{x^2-4}\, dx$

14. $\int x^2 \sin\frac{x}{2}\,dx$

28. $\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$

Варіант 22

1. $\int \frac{\left(2+x^3\right)}{x\sqrt{x}}\,dx$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-4}}$

3. $\int \frac{dx}{\cos^2 3x-\cos 6x}$

4. $\int\left(\frac{1}{(2x-3)^3}-\frac{5}{\sqrt{4-(x-3)^2}}\right)dx$

5. $\int \frac{dx}{(1+tg 3x)\cos^2 3x}$

6. $\int \sqrt{\frac{\arccos 3x+4}{4-36x^2}}\,dx$

7. $\int \frac{e^t}{\sqrt{e^{2t}+5}}\,dx$

8. $\int ctg(\ln x+4)\frac{dx}{x}$

9. $\int \frac{\cos x+3}{\sqrt{4-\cos^2 x}}\cdot \sin x\,dx$

10. $\int \frac{x-3}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx$

11. $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$

12. $\int \left(6x^2+1\right)\sin 2x\,dx$

13. $\int x \arcsin\frac{1}{x}\,dx$

14. $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$

15. $\int \frac{(3x-7)}{x^3\,4x^2+4x+16}\,dx$

16. $\int \frac{x^3+2}{x^3-4x^2+4x}\,dx$

17. $\int \frac{dx}{x^3+4x^2+5x}$

18. $\int \sin\frac{3}{2}x\cdot \sin\frac{5}{2}x\,dx$

19. $\int \cos\ 2x\cdot \sin^2\frac{x}{2}\,dx$

20. $\int \sqrt[3]{\cos^2 x}\cdot \sin^3 x\,dx$

21. $\int \frac{dx}{4\cos x-3\sin x}$

22. $\int \frac{dx}{\sin^2 x+2\sin x\cos x-\cos^2 x}$

23. $\int ctg^4 5x\,dx$

24. $\int \frac{dx}{\sin^3 x\cdot \cos^5 x}$

25. $\int \frac{x}{\sqrt[3]{2+x}+1}\,dx$

26. $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^3}\,dx$

27. $\int \frac{x^2}{\sqrt{\left(3-x^2\right)^3}}\,dx$

28. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(9+x^2\right)^3}}$

Варіант 23

1. $\int\left(\frac{2x+3}{x^4}-7+\sqrt[3]{x^5}\right)dx$

15. $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,dx$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$

3. $\int \sin^2 \frac{x}{3} dx$

4. $\int \left(\sqrt[4]{(7+x)^3} - \frac{4}{9+(x-2)^2} \right) dx$

5. $\int \frac{3x-2}{3x^2-4x+7} dx$

6. $\int e^{\sin^2 x} \cdot \sin 2x\, dx$

7. $\int \frac{8\sqrt[3]{ctg\, 2x-3}}{3\sin^2 2x} dx$

8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4+\ln x}}$

9. $\int \frac{4+\ln x}{x(1-\ln^2 x)} dx$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2-10x+9}}$

11. $\int x^2 \ln x\, dx$

12. $\int x^2 \cos 3x dx$

13. $\int x 3^x \, dx$

14. $\int \sin(\ln x)\, dx$

16. $\int \frac{3x^2+4}{x^3+x^2+x+1} dx$

17. $\int \frac{x^3+6x^2+13x+6}{(x-2)(x+2)^3} dx$

18. $\int \sin 5x \cdot \cos 7x\, dx$

19. $\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x\, dx$

20. $\int \sin^3 2x \cdot \cos^3 2x\, dx$

21. $\int ctg^5 x\, dx$

22. $\int \frac{dx}{\cos^2 x - 4\cos\cdot x \sin x + 1}$

23. $\int \frac{dx}{2\sin x + \cos x - 2}$

24. $\int (1-\sec^4 x) dx$

25. $\int \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} dx$

26. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}$

27. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(9+x^2)^3}}$

28. $\int \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}$

Варіант 24

1. $\int \frac{(2\sqrt{x}+1)^2 - 4x^2}{x^2} dx$

2. $\int \frac{dx}{4-9x^2}$

3. $\int 3^x (e^x + x^3 3^{-x}) dx$

4. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{4-(x+3)^2}} + \sin(2-3x) \right) dx$

5. $\int \frac{dx}{\cos^2 2x(2tg 2x+3)}$

15. $\int \frac{x}{x^3-1} dx$

16. $\int \frac{2x^2-x-1}{x^3-x^2-6x} dx$

17. $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x^2} dx$

18. $\int \cos 7x \cos 5x dx$

19. $\int \cos^4 11x\, dx$

6. $\int \frac{dx}{x \ln^2 x}$

7. $\int \frac{(arctgx+1)^5}{1+x^2}dx$

8. $\int (x^3+1)\cdot \sqrt[5]{x^4+4x}\ dx$

9. $\int \frac{x^3+x}{\sqrt{9+x^4}}dx$

10. $\int \frac{3x-1}{x^2+2x-2}dx$

11. $\int x^3 e^{-x^2} dx$

12. $\int arctg 5x dx$

13. $\int e^x \ln(1+3e^x)\, dx$

14. $\int \sqrt{9-x^2}\ dx$

20. $\int \cos^3 x \cdot \sqrt[3]{\sin^2 x}\, dx$

21. $\int \frac{dx}{\sin x - \cos x}$

22. $\int \frac{12\sin^4 3x}{\cos^2 3x}dx$

23. $\int (1+tg^3 2x)dx$

24. $\int \frac{dx}{4+\sin^2 x}$

25. $\int \frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[6]{x^5}}dx$

26. $\int \frac{dx}{\sqrt{(25+x^2)^3}}$

27. $\int x^3\sqrt{4-x^2}\ dx$

28. $\int \frac{\sqrt{x^2-2}}{x^3}dx$

Варіант 25

1. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}-5\sqrt{x}-x^3}{\sqrt{x}}dx$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{4+9x^2}}$

3. $\int \frac{1+3\sin^2 2x}{1-\cos 4x}dx$

4. $\int \left(\sin(7x+6)+\frac{1}{\sqrt{4-(x-3)^2}}\right)dx$

5. $\int \frac{3}{(3+\arccos 2x)\sqrt{1-4x^2}}dx$

6. $\int e^{5x-x^4}(5-4x^3)dx$

7. $\int \frac{xdx}{\cos^2(3x^2+5)}$

8. $\int (1+\sqrt[3]{x})^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$

9. $\int \frac{x^5-4x^2}{5+x^6}dx$

15. $\int \frac{dx}{x(x^2-6x+9)}$

16. $\int \frac{2x^4-x^3+5}{x^3-9x}dx$

17. $\int \frac{dx}{x^4+5x+4}$

18. $\int \sin 3x \cdot \cos 5x dx$

19. $\int \cos^3 2x \cdot \sin^4 2x\, dx$

20. $\int \sin^4 \frac{x}{3}dx$

21. $\int \frac{2dx}{2-\sin x+\cos x}$

22. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}dx$

23. $\int tg^5 3x\, dx$

10. $\int \frac{x+1}{\sqrt{3+4x+x^2}}dx$

11. $\int \frac{xdx}{cos^2 2x}$

12. $\int (x-2)ln^2(x-2)dx$

13. $\int \left(2+arcsin\sqrt{x}\right)dx$

14. $\int \sqrt{x^2-16}\ dx$

24. $\int \frac{dx}{cos^4 x \cdot sin^4 x}$

25. $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{2x+1}}dx$

26. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-16}}$

27. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(7+x^2\right)^3}}$

28. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{\left(3-x^2\right)^3}}$

Варіант 26

1. $\int \frac{x^2+x\sqrt{x}-4}{x^3}dx$

2. $\int \frac{5dx}{\sqrt{4x^2+25}}$

3. $\int \frac{3-\sqrt{ln\,x}}{x}dx$

4. $\int \left(\frac{3}{2-5x}+2^{3x+1}\right)dx$

5. $\int \frac{cos\,3x}{sin^3 3x}dx$

6. $\int \frac{x+1}{2x^2+4x+7}dx$

7. $\int \frac{6x^2 dx}{sin^2\left(x^3+1\right)}$

8. $\int \frac{x^3-4x^7}{x^8+9}dx$

9. $\int \frac{dx}{arccos\,2x\cdot\sqrt{1-4x^2}}$

10. $\int \frac{3x-1}{x^2+4x+5}dx$

11. $\int ln\left(x^2+1\right)\ dx$

12. $\int (2x+1)cos\,5xdx$

13. $\int arctg\,3x\ dx$

15. $\int \frac{x^3+1}{x^3+4x^2+3x}dx$

16. $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2}$

17. $\int \frac{xdx}{(x+1)\left(x^2+1\right)}$

18. $\int sin^3\frac{x}{4}dx$

19. $\int \frac{sin^3 x}{\sqrt[4]{cos\,x}}dx$

20. $\int tg^4 2xdx$

21. $\int \frac{dx}{2\,sin\,x-cos\,x}$

22. $\int \frac{dx}{3+sin^2 x}$

23. $\int \frac{dx}{cos^4 x}$

24. $\int sin\,3x\cdot cos\,5x\ dx$

25. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$

26. $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2}dx$

27. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

14. $\int x\cdot 2^{\frac{x}{2}}\,dx$

28. $\int \sqrt{16-x^2}\,dx$

Варіант 27

1. $\int \frac{x2^x-\sqrt[3]{x}-8}{x}dx$
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$
3. $\int \frac{\cos 4x}{\sin^2 2x}dx$
4. $\int \frac{\sqrt[3]{arctg\,2x}}{1+4x^2}dx$
5. $\int\left(e^{5x+4}-\frac{4}{(x+1)^2+3}\right)dx$
6. $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x+1}}$
7. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{16-\cos^2 2x}}dx$
8. $\int e^{-x}\cdot\sin\left(e^{-x}\right)dx$
9. $\int tg^3\frac{x}{2}dx$
10. $\int \frac{4x-1}{x^2+6x+5}dx$
11. $\int (x+2)\sin\frac{x}{2}dx$
12. $\int x^2e^{-x}dx$
13. $\int \log_2 3x\,dx$
14. $\int \arccos 2x\,dx$
15. $\int \frac{2x-4}{x^3+1}dx$
16. $\int \frac{x^3+2x-1}{\left(x^2-1\right)^2}dx$
17. $\int \frac{1-2x}{x^3+2x^2+x}dx$
18. $\int \sin^3\frac{x}{5}dx$
19. $\int \cos 2x\cdot\cos\frac{5}{4}x\,dx$
20. $\int \cos^4 2x\,dx$
21. $\int \frac{dx}{\sin x-\cos x}$
22. $\int \frac{dx}{\sin^2 x+2\sin x\cdot\cos x+1}$
23. $\int ctg^3\frac{x}{4}dx$
24. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}dx$
25. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}-\sqrt[4]{1-x}}$
26. $\int x^2\sqrt{25-x^2}\,dx$
27. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}$
28. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}}$

Варіант 28

1. $\int \frac{(x+1)^2-x\sqrt[3]{x}}{x^2}dx$

15. $\int \frac{x}{(x+1)(2x+1)}dx$

2. $\int \frac{dx}{3x^2+8}$

3. $\int \frac{\sqrt{\cos \ln x} \cdot \sin \ln x}{x} dx$

4. $\int \left(\frac{5}{6x+1} + e^{-4x} \right) dx$

5. $\int \frac{tg^3 2x}{\cos^2 2x} dx$

6. $\int \frac{3x+1}{3x^2+2x-1} dx$

7. $\int \frac{x^3}{x^8+16} dx$

8. $\int \frac{\cos x - 4\cos^3 x}{\cos^4 x + 4}$

9. $\int \frac{\sqrt[3]{\arcsin 3x}}{\sqrt{1+9x^2}} dx$

10. $\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx$

11. $\int (3x+5) \cos \frac{x}{3} dx$

12. $\int x^2 \cdot 2^x dx$

13. $\int \arcsin 4x \, dx$

14. $\int \log_5 2x \, dx$

16. $\int \frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)} dx$

17. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$

18. $\int \frac{\sin^2 3x}{\cos^4 3x} dx$

19. $\int \sin 2x \cdot \sin 5x \, dx$

20. $\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x} dx$

21. $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$

22. $\int \frac{dx}{4 - 3\cos^2 x + 5\sin^2 x}$

23. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{1+x}}$

24. $\int \frac{dx}{1+\cos x}$

25. $\int \frac{\cos 2x}{1+\sin x \cdot \cos x} dx$

26. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4} dx$

27. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$

28. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-16}}$

Варіант 29

1. $\int \frac{3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x}{2^x} dx$

2. $\int \sqrt[3]{(8-3x^2)} \, dx$

3. $\int \frac{1+x-x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx$

4. $\int \left(\cos\left(2x - \frac{p}{4} \right) \right)^{-2} dx$

5. $\int e^{-x^3} \cdot x^2 dx$

15. $\int \frac{3x-1}{(x+1)(x+2)} dx$

16. $\int \frac{dx}{(x+3)^2 \cdot (x-3)}$

17. $\int \frac{dx}{(x-2)(x^2+2)}$

18. $\int \frac{dx}{\sin^2 j \cdot \cos j^{\,2}}$

19. $\int \cos^4 3x \, dx$

6. $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+a^2}dx$

7. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}dx$

8. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

9. $\int \frac{2x-\sqrt{src\,sin\,x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$

10. $\int \frac{x-3}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx$

11. $\int arctgx\ dx$

12. $\int x^2 \cdot e^{2x}dx$

13. $\int x \cdot cos\,4x\ dx$

14. $\int e^{2x}\,sin\,x\,dx$

20. $\int sin^5 x \cdot cos^3 x\ dx$

21. $\int \frac{dx}{5+4\,sin\ x}$

22. $\int \frac{dx}{3+sin^2 x}$

23. $\int sin^2(3x+2)dx$

24. $\int \sqrt{cos\,x - cos^3 x}dx$

25. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$

26. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$

27. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx$

28. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^6}dx$

Варіант 30

1. $\int \frac{x\sqrt{x}-e^x x^2+3x-1}{x^2}dx$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-16}}$

3. $\int cos^2 x \cdot sin\,x\ dx$

4. $\int \left(\frac{3}{\sqrt[3]{2x+1}}+2^{3x+1}\right)dx$

5. $\int \frac{(arcctg\,2x)^3}{1+4x^2}dx$

6. $\int \frac{\sqrt{2\,ln\,x+5}}{x}dx$

7. $\int x^2 \cdot sin(x^3+1)dx$

8. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{25-x^4}}$

9. $\int \frac{2x-3x^3}{x^4-9}dx$

15. $\int \frac{x^2-1}{4x^2-x}dx$

16. $\int \frac{dx}{x^4-x^2}$

17. $\int \frac{x}{x^3-1}dx$

18. $\int ctg^5 x\ dx$

19. $\int sin^3 3x\,dx$

20. $\int sin\,5x \cdot sin\frac{x}{5}dx$

21. $\int \frac{dx}{5-3\,cos\,x}$

22. $\int \frac{dx}{2+sin^2 x+6\,sin\,x \cdot cos\,x}$

23. $\int \frac{dx}{sin^4 x}$

10. $\int \frac{x+10}{\sqrt{x^2+2x-1}}dx$

11. $\int \frac{x}{sin^2 x}dx$

12. $\int log_2(x+1)dx$

13. $\int arcsin\frac{x}{4}dx$

14. $\int e^x \cdot cos 5x\, dx$

24. $\int tg^2 2x\, dx$

25. $\int \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx$

26. $\int \frac{\left(\sqrt{25-x^2}\right)^3}{x^4}dx$

27. $\int \frac{dx}{\left(x^2+3\right)^{\frac{5}{2}}}$

28. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$

ЛІТЕРАТУРА

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т. 1 и 2. – М.: Наука, 1975.
2. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х частях. – М.: Высшая школа, 1986.
3. Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике. – М.: Наука, 1966.

Підписано до друку 20.08.08. Формат 60х84 1/16. Папір друк. Друк плоский. Облік.-вид. арк. 2,58. Умов. друк. арк. 2,56. Тираж 100 пр. Замовлення №

Національна металургійна академія України
49600, м. Дніпропетровськ-5, пр. Гагаріна, 4

Редакційно-видавничий відділ НМетАУ