МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до рішення задач з дисципліни «Вища математика». Розділ «Математичне програмування» і варіанти контрольних завдань (практичні заняття) для студентів економічних спеціальностей, а також для студентів з вадами здоров'я

Затверджено
на засіданні Вченої ради академії
Протокол № 1 від 30.01.2012

Дніпропетровськ НМетАУ 2012

УДК 669.162 (08)
Методичні вказівки до рішення задач з дисципліни «Вища математика». Розділ «Математичне програмування» і варіанти контрольних завдань (практичні заняття) для студентів економічних спеціальностей, а також для студентів з вадами здоров'я (російською мовою) /Укл.: Г.М. Бартенєв, О.М. Дук, О.Г. Ткаченко та ін. – Дніпропетровськь: НМетАУ, 2012. – 84 с.

Наведені практичні методи розв'язку основних типів задач та контрольні завдання з дисципліни «Вища математика», розділ «Математичне програмування», як доповнення до конспекту.

Призначені для студентів економічних спеціальностей, а також для студентів з вадами здоров'я.

Укладачі: Г.М. Бартенєв, ст. викл.
О.М. Дук, ст. викл.
О.Г. Ткаченко, ст. викл.
Н.В. Цілуйко, ст. викл.
В.В. Толстой, асистент

Відповідальний за випуск Г.Г. Швачич, канд. техн. наук, проф.

Рецензент К.У. Чуднов, канд. техн. наук, доц. (НМетАУ)

Підписано до друку 30.10.2012. Формат 60x84 1/16. Папір друк. Друк плоский.
Облік.-вид. арк. 4,94. Умов. друк. арк. 4,88. Тираж 100 пр. Замовлення №

Національна металургійна академія України
49600, м. Дніпропетровськ-5, пр. Гагаріна, 4

Редакційно-видавничий відділ НМетАУ

ОГЛАВЛЕНИЕ

4. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

4.1. Основные понятия и постановка общей задачи линейного программирования

Математическим программированием называется наука, разрабатывающая и практически внедряющая методы оптимального планирования и наиболее эффективного управления различными экономическими структурами.

Задачей линейного программирования (ЗЛП), заданной в канонической (основной) форме записи, называют задачу, в которой требуется найти оптимальное значение функции

$$F=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to opt; \tag{4.1}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ , \quad i=\overline{1,m} \ ; \tag{4.2}$$

$$x_j \geq 0 \ , \ j=\overline{1,n}. \tag{4.3}$$

Если ищут минимум функции (4.1), то ЗЛП задана в первой канонической форме.

Если ищут максимум функции (4.1), то говорят, что ЗЛП задана во второй канонической форме

Набор чисел $\overline{X}=\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)$, удовлетворяющий ограничениям ЗЛП (4.2), называются ее планом.

Так как не каждая система ограничений имеет решение, то не каждая ЗЛП имеет план.

Всякое неотрицательное решение ЗЛП называется допустимым.

Пример 4.1.1. Привести к первой канонической форме ЗЛП:

$$F=x_1+2x_2+x_3 \to max \ ;$$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \ ; \\ x_1+x_2-x_3 \leq 1 \ ; \\ x_1-x_2+x_3 \geq 2 \ ; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \ ; \quad x_2 \geq 0 \ .$$

Решение:

В первой канонической форме ищут минимум целевой функции при ограничениях-равенствах. Поэтому необходимо преобразовать ограничения-неравенства введением балансовых переменных, взятых с соответствующим знаком. Наконец, заменим переменную x_3, на которую не наложено условие неотрицательности, парой неотрицательных переменных x_4 и x_5, а именно $x_3 = x_5 - x_4$.

В результате получим:

$$F_1 = -F = -x_1 - 2x_2 - x_4 + x_5 \to min;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 1; \\ x_1 + x_2 + x_4 - x_5 + x_6 = 1; \\ x_1 - x_2 - x_4 + x_5 - x_7 = 2; \end{cases}$$

$$x_i \geq 0;\ i = \overline{1,7}.$$

Пример 4.1.2. Привести ЗЛП к симметричной форме:

$$F = 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 \to max;$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 5; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 10; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0;\quad j = \overline{1,4}.$$

Решение:

Исключим из ограничений-равенств сначала x_1, а затем x_2:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 5; & |\times(-2) \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 10. & |\times 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x_2 + x_3 - 3x_4 = 0; \\ 5x_1 + 7x_3 - x_4 = 25. \end{cases} \tag{4.4}$$

Отсюда:

$$\begin{cases} x_1 = 5 - \frac{7}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4; \\ x_2 = -\frac{1}{5}x_3 + \frac{3}{5}x_4. \end{cases}$$

Подставляем эти значения в целевую функцию для исключения x_1 и x_2:

$$F=10-4x_3+4x_4\to max.$$

Учитывая неотрицательности x_1 и x_2, систему (4.4) можно представить в виде:

$$\begin{cases} x_3-3x_4\le 0\ ; \\ 7x_3-x_4\le 25\ . \end{cases}$$

Тогда ЗЛП в симметричной форме будет выглядеть так:

$$F=10-4x_3+4x_4\to max;$$
$$\begin{cases} x_3-3x_4\le 0\ ; \\ 7x_3-x_4\le 25\ ; \end{cases}$$
$$x_3\ge 0\ ;\quad x_4\ge 0\ .$$

Пример 4.1.3. Привести к первой канонической форме ЗЛП:

$$F=x_1-2x_2\to min\ ;$$
$$\begin{cases} 2x_1-x_2-4x_3=2\ ; \\ x_1-4x_2+2x_3\le 3\ ; \\ x_1+x_2\le 4\ ; \end{cases}$$
$$x_1\ge 0.$$

Решение:

Необходимо преобразовать ограничения-неравенства введением балансовых переменных, взятых с соответствующим знаком. Заменим переменные x_2 и x_3, на которые не наложено условие неотрицательности, на соответствующие разности переменных: $x_2=x_5-x_4$ и $x_3=x_7-x_6$.

В результате получим:

$$F=x_1+2x_4-2x_5\to min;$$
$$\begin{cases} 2x_1+x_4-x_5+4x_6-4x_7=2; \\ x_1+4x_4-4x_5-2x_6+2x_7+x_8=3; \\ x_1-x_4+x_5+x_9=4; \end{cases}$$
$$x_i\ge 0;\ i=\overline{1,9}.$$

Самостоятельно привести к первой канонической форме (для нечетных номеров) или второй (для четных номеров) следующие системы ограничений:

1. $F = x_1 - 7x_2 \to min;$ $\begin{cases} x_1 + 5x_2 \geq 4; \\ 2x_2 - 6x_3 \leq 8; \end{cases}$ $x_1 \geq 0.$	**2.** $F = 4x_1 + 3x_2 \to min;$ $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 2; \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 \geq 3; \end{cases}$ $x_2 \geq 0.$
3. $F = -x_1 + 2x_2 + x_3 \to max;$ $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 12; \\ 3x_1 - 2x_2 - 7x_3 \geq 9; \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 3; \end{cases}$ $x_3 \geq 0.$	**4.** $F = 9x_1 - 8x_2 + 4x_3 \to min;$ $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 1; \\ -2x_1 + 35x_2 - 12x_3 \geq 8; \\ 11x_1 - 17x_3 \leq 19 \end{cases}$ $x_2 \geq 0.$

4.2. Графический способ решения ЗЛП

Графический способ решения ЗЛП применяют, как правило, в том случае, когда задача записана в симметричной форме и содержит две переменные.

Пример 4.2.1. Найти оптимальное решение ЗЛП.

$$F = 4x_1 + 3x_2 \to opt;$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 6; \\ x_1 - x_2 \le 1; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Решение.

Для построения ОДР задачи ограничения, неравенства заменим ограничениями - равенствами, построим в плоскости Ox_1x_2 прямые, соответствующие этим равенствам и стрелками отметим полуплоскости, соответствующие неравенствам. Пересечение всех полуплоскостей, соответствующим неравенством пересечение всех полуплоскостей и образует ОДР исходной задачи.

$$\frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2} = 1;\ (1)$$
$$\frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{-1} = 1;\ (2)$$
$$x_1 = 0;\ (3)$$
$$x_2 = 0;\ (4)$$

Находим координаты градиента функции как коэффициенты при неизвестных x_1, x_2 в заданной целевой функции F. Градиент функции $\overline{\nabla F} = (4;\ 3)$. Построим заданный вектор на координатной плоскости. Допускается строить не сам градиент, а вектор, ему пропорциональный. Градиент указывает направление наибольшего роста функции F.

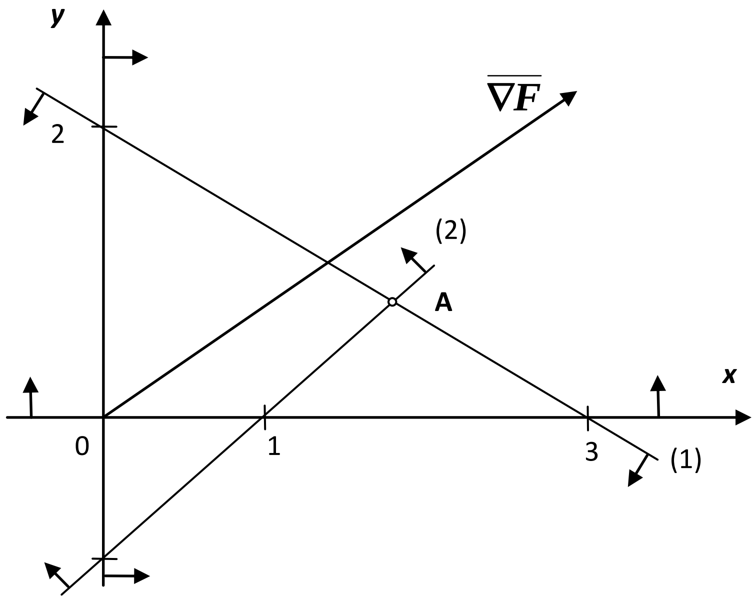

Рис 4.1

Как видно из приведенного рисунка, минимум функции F будет наблюдаться в начале координат $(0;0)$. Максимум функции – точка A, координаты которой определяются решением системы, составленной из уравнений прямых, на пересечении которых точка A находится. Определим координаты точки A:

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2=6; \\ x_1-x_2=1; \end{cases} \Rightarrow x_2=x_1-1;\ 2x_1+3(x_1-1)=6;\ 5x_1=9;\ x_1=\frac{9}{5};\ x_2=\frac{4}{5}.$$

Тогда $F_{min}=0$, $F_{max}=F(A)=4\cdot\frac{9}{5}+3\cdot\frac{4}{5}=\frac{48}{5}$.

Пример 4.2.2. Найти оптимальное решение ЗЛП.

$$F=2x_1-2x_2\rightarrow opt;$$
$$\begin{cases} 2x_1+3x_2\le 6; \\ x_1+x_2\ge 1; \end{cases}$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

Решение.

Для построения ОДР задачи ограничения, неравенства заменим ограничениями - равенствами, построим в плоскости Ox_1x_2 прямые, соответствующие этим равенствам и стрелками отметим полуплоскости, соответствующие неравенствам. Пересечение всех полуплоскостей, соответствующих неравенствам, и образует ОДР исходной задачи.

$$\frac{x_1}{3}+\frac{x_2}{2}=1;\ (1)$$

$$\frac{x_1}{1}+\frac{x_1}{1}=1;\ (2)$$

$$x_1=0;\ (3)$$

$$x_2=0;\ (4).$$

Градиент функции $\overline{\nabla F}=\left(2;-2\right)$. Допускается строить не сам градиент, а вектор, ему пропорциональный. Градиент указывает направление наибольшего роста функции F.

Как видно из приведенного ниже рисунка, минимум функции F будет наблюдаться в точке B. Максимум функции – точка A. Координаты точек определяются из условия пересечения прямой (1) координатных осей: $A(3;0)$, $B(0;2)$.

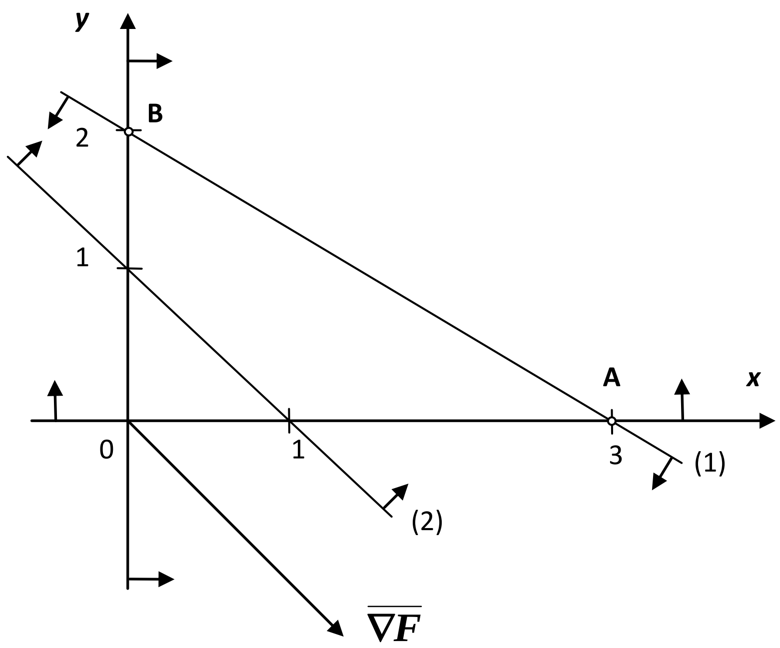

Рис 4. 2

Тогда:

$$F_{min}=F(B)=2\cdot0-2\cdot2=-4;\ ,\ F_{max}=F(A)=2\cdot3-2\cdot0=6.$$

Самостоятельно найти решение ЗЛП графическим способом:

1. $F = x_1 - 7x_2 \to opt;$ $\begin{cases} x_1 + 5x_2 \le 4; \\ 2x_1 - 6x_2 \le 8; \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$	**2.** $F = 4x_1 + 3x_2 \to opt;$ $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 \ge 2; \\ 9x_1 - 3x_2 \le 11; \\ x_2 \le 6; \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$
3. $F = -x_1 + 2x_2 \to opt;$ $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 12; \\ 3x_1 - x_2 \ge 9; \\ x_1 + 3x_2 \ge 3; \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$	**4.** $F = 9x_1 - 8x_2 \to opt;$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1; \\ x_1 + 3x_2 \le 8; \\ x_1 \le 6; \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

4.3. Симплексный метод решения ЗЛП

Рассмотренный ранее графический способ решения ЗЛП применим к узкому классу задач, содержащих не более двух переменных. Поэтому для решения более сложных задач применяют другие методы. Одним из таких универсальных методов является симплексный (симплекс-метод) называющийся так же методом последовательного улучшения плана.

Пример 4.3.1. Найти оптимальное решение ЗЛП:

$$F = x_1 + 2x_2 + x_3 \to opt;$$
$$\begin{cases} x_1 + x_4 - 2x_5 = 4; \\ x_2 + 2x_4 - 3x_5 = 2; \\ x_3 + x_4 - x_5 = 7; \end{cases}$$
$$x_i \geq 0;\ i = \overline{1,5}.$$

Решение.

В данной задаче легко найти начальный опорный план алгебраическим методом. Переменные x_1, x_2, x_3 входят по разу в каждое уравнение, и целевая x_1, x_2, x_3 функция также выражается через эти переменные. Поэтому будем считать переменные x_1, x_2, x_3 базисными, а x_4, x_5 - свободными. Разрешим данную систему ограничений относительно базисных переменных и подставим полученные значения переменных x_1, x_2, x_3 в целевую функцию. В результате получаем опорный план:

$$\begin{cases} x_1 = 4 - x_4 + 2x_5; \\ x_2 = 2 - 2x_4 + 3x_5; \\ x_3 = 7 - x_4 + x_5; \end{cases}$$
$$x_i \geq 0;\ i = \overline{1, 5}.$$

При этом $F = 4 - x_4 + 2x_5 + 2(2 - 2x_4 + 3x_5) + 7 - x_4 + x_5 = 15 - 6x_4 + 9x_5$.

Далее, находим оптимальный план с помощью симплекс – метода. Так как используется аппарат МЖИ, представим опорный план в следующем виде:

$$\begin{cases} x_1 = 4 - (x_4 - 2x_5); \\ x_2 = 2 - (2x_4 - 3x_5); \\ x_3 = 7 - (x_4 - x_5); \end{cases}$$
$$F = 15 - (6x_4 - 9x_5).$$

В табличном виде опорный план отображается следующим образом:

	1	$-x_4$	$-x_5$
x_1	4	1	-2
x_2	2	2	-3
x_3	7	1	-1
F	15	6	-9

Найдем сначала минимум целевой функции F. Необходимо, чтобы значения x_4, x_5 в строке целевой функции F были не положительными. Значение переменной x_4 не удовлетворяет данному условию, следовательно, столбец x_4 - разрешающий столбец. Для выбора разрешающего элемента необходимо, чтобы он был положительным, и выполнялось минимальное симплексное соотношение. Условию положительности удовлетворяют все элементы разрешающего столбца $(1; 2; 1) \geq 0$. Минимальное симплексное соотношение определяется как отношение свободного члена (элемента столбца «**1**») к предполагаемому разрешающему элементу. Для строки x_1 получим: $\frac{4}{1} = 4$. Соответственно, для следующих строк: $\frac{2}{2} = 1;\ \frac{7}{1} = 7$. Из полученных результатов выбирается минимальное значение: $min(4; 1; 7) = 1$, следовательно, разрешающим выбирается элемент «2» строки x_2. Производится замена x_2 на x_4 по правилам МЖИ.

- на место разрешающего элемента записывается «1»;

- разрешающая строка переписывается без изменений, разрешающий столбец умножается на «-1»;

- оставшаяся незаполненной часть таблицы рассчитывается по «правилу прямоугольника»;

- полученная таблица умножается на величину разрешающего элемента.

Следуя приведенному алгоритму замены, получим:

	1	$-x_4$	$-x_5$
x_1	4	1	-2
x_2	2	**2**	-3
x_3	7	1	-1
F	15	6	-9

$x_2 \Leftrightarrow x_4$

	1	$-x_2$	$-x_5$
x_1	6	1	-1
x_4	2	1	-3
x_3	12	1	1
F	18	-6	0

$:2$

	1	$-x_2$	$-x_5$
x_1	3	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
x_4	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$
x_3	6	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
F	9	-3	0

После завершения замены, элементы строки целевой функции удовлетворяют условию оптимальности по минимуму. Таким образом, получено оптимальное решение: $x^* = (3;\ 0;\ 6;\ 1;\ 0);\ F^* = 9.$

Для нахождения оптимального решения по максимуму, вернемся к опорному плану:

	1	$-x_4$	$-x_5$
x_1	4	1	-2
x_2	2	2	-3
x_3	7	1	-1
F	15	6	-9

Необходимо, чтобы значения $x_4,\ x_5$ в строке целевой функции F теперь были не отрицательными. Значение переменной x_5 не удовлетворяет данному условию, следовательно, столбец x_5 - разрешающий столбец. Для выбора разрешающего элемента необходимо, чтобы он был положительным, и выполнялось минимальное симплексное соотношение. Как видно из таблицы, все элементы столбца x_5 - отрицательные и не могут быть использованы в качестве разрешающих. Данная задача не имеет оптимального решения по максимуму.

Пример 4.3.2. Найти оптимальное решение ЗЛП:

$$F = 3x_1 + x_2 - 2x_3 \to opt;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 1; \\ x_2 - 2x_3 \le 1; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \le 3; \end{cases}$$

$$x_i \ge 0;\ i = \overline{1,3}.$$

Решение.

Приведем данную задачу к канонической форме, добавляя балансовые переменные x_4, x_5, x_6 в неравенства:

$$F = 3x_1 + x_2 - 2x_3 \to opt;$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1; \\ x_2 - 2x_3 + x_5 = 1; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 3; \end{cases}$$
$$x_i \ge 0;\ i = \overline{1,6}.$$

Введенные балансовые переменные примем как базисные, выразив их из уравнений и представив в удобной для использования МЖИ форме:

$$F = 0 - (-3x_1 - x_2 + 2x_3);$$
$$\begin{cases} x_4 = 1 - (x_1 + x_2 + x_3); \\ x_5 = 1 - (x_2 - 2x_3); \\ x_6 = 3 - (3x_1 + 2x_2 + x_3); \end{cases}$$
$$x_i \ge 0;\ i = \overline{1,6}.$$

Опорный план в табличной форме имеет вид:

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$
x_4	1	1	1	1
x_5	1	0	1	-2
x_6	3	3	2	1
F	0	-3	-1	2

Находим оптимальное решение по минимуму F. Разрешающий столбец - x_3. Разрешающая строка - x_4. Производим замену x_4 на x_3 по правилам МЖИ:

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$
x_4	1	1	1	**1**
x_5	1	0	1	-2
x_6	3	3	2	1
F	0	-3	-1	2

$x_4 \Leftrightarrow x_3$

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_4$
x_3	0	1	1	1
x_5	1	2	3	2
x_6	3	2	1	-1
F	-2	-5	-3	-2

Получено оптимальное решение по минимуму: $x^* = (0;0;0;0;1;\ 3);\ F^* = -2.$

Для нахождения оптимального решения по максимуму вернемся к опорному плану:

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$
x_4	1	1	1	1
x_5	1	0	1	-2
x_6	3	3	2	1
F	0	-3	-1	2

В качестве разрешающего столбца выбираем x_1. В качестве разрешающей строки - x_4. Таким образом, заменим x_4 на x_1.

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$
x_4	1	**1**	1	1
x_5	1	0	1	-2
x_6	3	3	2	1
F	0	-3	-1	2

$$x_4 \Leftrightarrow x_1$$

	1	$-x_4$	$-x_2$	$-x_3$
x_1	1	1	1	1
x_5	1	0	1	-2
x_6	3	-3	-1	-2
F	3	3	2	5

Получено оптимальное решение по максимуму: $x^* = (1;0;0;0;1;3);\ F^* = 3.$

Самостоятельно найти оптимальное решение ЗЛП:

1. $F = x_1 + x_2 - x_3 \to opt;$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 4; \\ x_2 - 2x_3 \le 5; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 \le 3; \end{cases}$ $x_i \ge 0;\ i = \overline{1,3}.$	2. $F = 3x_1 - x_2 + x_3 \to opt;$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 9; \\ x_1 + x_2 - x_3 \le 5; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \le 3; \end{cases}$ $x_i \ge 0;\ i = \overline{1,3}.$
3. $F = x_1 - 5x_2 + 2x_3 \to opt;$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 \le 11; \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 \le 3; \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 \le 6; \end{cases}$ $x_i \ge 0;\ i = \overline{1,3}.$	4. $F = -x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to opt;$ $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 11; \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 \le 5; \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \le 15; \end{cases}$ $x_i \ge 0;\ i = \overline{1,3}.$
5. $F = -3x_1 + x_2 + 2x_3 \to opt;$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 8; \\ x_1 - x_2 - 3x_3 \le 4; \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 \le 13; \end{cases}$ $x_i \ge 0;\ i = \overline{1,3}.$	6. $F = -3x_1 - 2x_2 + x_3 \to opt;$ $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 \le 4; \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 \le 6; \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 11; \end{cases}$ $x_i \ge 0;\ i = \overline{1,3}.$

4.4. Метод искусственного базиса

Достоинством этого метода, кроме простого получения начального опорного плана, является то, что он позволяет определить наличие неотрицательных решений системы ограничений ЗЛП.

Пример 4.4.1. Решить ЗЛП методом искусственного базиса

$$F = x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 \to opt;$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 3; \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1; \end{cases}$$
$$x_i \geq 0;\ i = \overline{1,4}.$$

Решение.

Введем в левые части уравнений системы по одной неотрицательной переменной $\xi_i \geq 0$ и разрешим эти уравнения относительно введенных искусственных переменных, обозначим искусственную линейную форму, как $f = \sum_{i=1}^{2} \xi_i$. Получим на основании исходной следующую расширенную задачу:

$$F = 0 - (-x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4) \to opt;$$
$$\begin{cases} \xi_1 = 3 - (x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4); \\ \xi_2 = 1 - (x_1 - x_2 + x_3 + x_4); \end{cases}$$
$$x_i \geq 0;\ i = \overline{1,4};$$
$$f = 4 - (2x_1 + x_2 - x_4).$$

В соответствии с расширенной задачей составляем симплексную таблицу. На первом этапе (фазе) искусственные переменные ξ_i выводятся из базиса и перебрасываются наверх таблицы, причем получившиеся ξ столбцы опускаются (вычеркиваются из таблицы). На этом этапе значения элементов **F**-строки не учитываются, а, следовательно, преобразования таблицы не зависят от типа оптимума (минимума или максимума). В качестве разрешающего столбца берем столбец с положительными элементами в строке f - столбец «$-x_1$», а разрешающую строку выбираем по минимальному симплексному отношению – строка ξ_2. В результате выполняем замену:

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$
ξ_1	3	1	2	-1	-1
ξ_2	1	1	-1	1	1
f	4	2	1	0	-1
F	0	-1	1	2	-1

$\xi_2 \Leftrightarrow x_1$

	1	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$
ξ_1	2	3	-2	-1
x_1	1	-1	1	1
f	2	3	-2	-1
F	1	0	3	0

В любом шаге симплекс процесса равенство $f = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$ должно выполняться. Следующей заменой искусственный базис выводится из симплекс-таблицы. Разрешающим столбцом является столбец «$-x_2$», разрешающей строкой - ξ_1.

	1	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$
ξ_1	2	3	-2	-1
x_1	1	-1	1	1
f	2	3	-2	-1
F	1	0	3	0

$\xi_1 \Leftrightarrow x_2$

	1	$-x_3$	$-x_4$
x_2	2	-2	-1
x_1	5	1	2
f	0	0	0
F	3	9	0

$:(3)$

Обращение в нуль искусственной формы f свидетельствует о том, что система ограничений исходной задачи совместна, а сама задача имеет допустимые решения.

Получили начальный опорный план:

	1	$-x_3$	$-x_4$
x_2	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
x_1	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
F	1	3	0

$$X^* = \left(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}; 0; 0\right); \ F^* = 1.$$

Данный опорный план является оптимальным по максимуму, т.к. в строке целевой функции F все элементы неотрицательные. Таким образом, получено оптимальное решение по максимуму.

Дальнейшее преобразование симплексной таблицы осуществляется без учёта строки искусственной формы f, обратившейся в нуль, и отдельно для разных типов оптимумов. $X^* = \left(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}; 0; 0\right); \ F_{max} = 1.$

При поиске минимума целевой функции получим:

	1	$-x_3$	$-x_4$
x_2	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
x_1	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
F	1	3	-1

$x_1 \Leftrightarrow x_3$

	1	$-x_1$	$-x_4$
x_2	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
x_3	$\frac{5}{3}$	1	$\frac{2}{3}$
F	$-\frac{14}{3}$	-3	$-\frac{7}{3}$

$: \left(\frac{1}{3}\right)$

После замены в строке целевой функции F все элементы неположительные, следовательно, найдено оптимальное решение по минимуму.

	1	$-x_1$	$-x_4$
x_2	4	2	-1
x_3	5	3	2
F	-14	-9	-7

$$X^* = (0;\ 4;\ 5;\ 0);\ F_{min} = -14.$$

Пример 4.4.2. Решить ЗЛП методом искусственного базиса

$$F = 2x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 \to max;$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 5; \\ 2x_1 - 7x_2 - 5x_3 + x_4 = 3; \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1; \end{cases}$$
$$x_i \ge 0;\ i = \overline{1,4}.$$

Решение.

Введем в левые части уравнений системы по одной неотрицательной переменной $\xi_i \ge 0$, и разрешим эти уравнения относительно введенных искусственных переменных, обозначим искусственную линейную форму как $f = \sum_{i=1}^{3} \xi_i$. Получим на основании исходной следующую расширенную задачу:

$$F = 0 - (-2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4) \to max;$$
$$\begin{cases} \xi_1 = 5 - (3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4); \\ \xi_2 = 3 - (2x_1 - 7x_2 - 5x_3 + x_4); \\ \xi_3 = 1 - (x_1 - x_2 - x_3 - x_4); \end{cases}$$
$$x_i \ge 0;\ i = \overline{1,4};$$
$$f = 9 - (6x_1 - 6x_2 - 7x_3 - x_4).$$

В соответствии с расширенной задачей составляем симплексную таблицу. На первом этапе (фазе) искусственные переменные ξ_i выводятся из базиса и перебрасываются наверх таблицы, причем получившиеся ξ столбцы опускаются (вычеркиваются из таблицы). На этом этапе значения элементов **F**-строки не учитываются, а, следовательно, преобразования таблицы не зависят от типа оптимума (минимума или максимума). В качестве разрешающего столбца берем столбец с положительными элементами в строке f - столбец «$-x_1$», а разрешающую строку выбираем по минимальному симплексному отношению – строка ξ_3. В результате выполняем замену:

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$
ξ_1	5	3	2	-1	-1
ξ_2	3	2	-7	-5	1
ξ_3	1	1	-1	-1	-1
f	9	6	-6	-7	-1
F	0	-2	3	1	1

$\xi_3 \Leftrightarrow x_1$

	1	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$
ξ_1	2	5	2	2
ξ_2	1	-5	-3	3
x_1	1	-1	-1	-1
f	3	0	-1	5
F	2	1	-1	-1

Разрешающим является столбец «$-x_4$», разрешающей строкой - ξ_2.

	1	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$
ξ_1	2	5	2	2
ξ_2	1	-5	-3	3
x_1	1	-1	-1	-1
f	3	0	-1	5
F	2	1	-1	-1

$\xi_2 \Leftrightarrow x_4$

	1	$-x_2$	$-x_3$
ξ_1	4	25	12
x_4	1	-5	-3
x_1	4	-8	-6
f	4	25	12
F	7	-2	-6

$:(3)$

В результате замены получили симплекс-план, в котором остается единственная искусственная переменная - ξ_1. Строка искусственной переменной совпадает со строкой f по значениям, есть положительные элементы, которые могут быть взяты в качестве разрешающих. Выбираем столбец «$-x_2$» разрешающим столбцом, строку ξ_1 - разрешающей строкой.

	1	$-x_2$	$-x_3$
ξ_1	$\frac{4}{3}$	$\frac{25}{3}$	4
x_4	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$	-1
x_1	$\frac{4}{3}$	$-\frac{8}{3}$	-2
f	$\frac{4}{3}$	$\frac{25}{3}$	4
F	$\frac{7}{3}$	$-\frac{2}{3}$	-2

Осуществляем замену $\xi_1 \Leftrightarrow x_2$:

	1	$-x_2$	$-x_3$
ξ_1	$\frac{4}{3}$	$\frac{25}{3}$	4
x_4	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$	-1
x_1	$\frac{4}{3}$	$-\frac{8}{3}$	-2
f	$\frac{4}{3}$	$\frac{25}{3}$	4
F	$\frac{7}{3}$	$-\frac{2}{3}$	-2

$\xi_1 \Leftrightarrow x_2$

	1	$-x_3$
x_2	$\frac{4}{3}$	4
x_4	5	$-\frac{5}{3}$
x_1	$\frac{44}{3}$	-6
f	0	0
F	$\frac{61}{3}$	-14

$:\left(\frac{25}{3}\right)$

В результате замены искусственный базис выведен полностью. Получили начальный опорный план, который, судя по строке целевой функции F, является оптимальным по минимуму из-за того, что содержит отрицательный элемент. Таким образом, осталось записать полученное оптимальное решение по минимуму $X^* = \left(\frac{44}{25}; \frac{4}{25}; 0; \frac{3}{5}\right); F_{min} = \frac{61}{25}$ и найти оптимальное решение по максимуму.

	1	$-x_3$
x_2	$\frac{4}{25}$	$\frac{12}{25}$
x_4	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$
x_1	$\frac{44}{25}$	$-\frac{18}{25}$
F	$\frac{61}{25}$	$-\frac{42}{25}$

Для нахождения оптимального решения по максимуму выполним замену $x_2 \Leftrightarrow x_3$:

	1	$-x_3$
x_2	$\frac{4}{25}$	$\frac{12}{25}$
x_4	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$
x_1	$\frac{44}{25}$	$-\frac{18}{25}$
F	$\frac{61}{25}$	$-\frac{42}{25}$

$x_2 \Leftrightarrow x_3$

	1	$-x_2$
x_3	$\frac{4}{25}$	1
x_4	$\frac{8}{25}$	$\frac{1}{5}$
x_1	$\frac{24}{25}$	$\frac{18}{25}$
F	$\frac{36}{25}$	$\frac{42}{25}$

$:\left(\frac{12}{25}\right)$

Окончательно получим:

	1	$-x_2$
x_3	$\frac{1}{3}$	$\frac{25}{12}$
x_4	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{12}$
x_1	2	$\frac{3}{2}$
F	3	$\frac{7}{2}$

$$X^* = \left(2;\ 0;\ \frac{1}{3};\ \frac{2}{3}\right);\ F_{max} = 3.$$

Самостоятельно найти оптимальное решение ЗЛП с помощью метода искусственного базиса:

1. $F = x_1 + 2x_2 - x_3 \to opt;$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 4; \\ x_2 - x_3 \leq 2; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 7; \end{cases}$ $x_i \geq 0;\ i = \overline{1,3}.$	2. $F = x_1 - x_2 + 2x_3 \to opt;$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 9; \\ x_1 + x_2 - x_3 \geq 5; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 3; \end{cases}$ $x_i \geq 0;\ i = \overline{1,3}.$
3. $F = x_1 - 2x_2 + 2x_3 \to opt;$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1; \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq 3; \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 6; \end{cases}$ $x_i \geq 0;\ i = \overline{1,3}.$	4. $F = -2x_1 + x_2 + 2x_3 \to opt;$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 4; \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 \geq 5; \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 1; \end{cases}$ $x_i \geq 0;\ i = \overline{1,3}.$
5. $F = -3x_1 + x_2 + 2x_3 \to opt;$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 8; \\ x_1 - x_2 - 3x_3 \geq 4; \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 \geq 13; \end{cases}$ $x_i \geq 0;\ i = \overline{1,3}.$	6. $F = -3x_1 - 2x_2 + x_3 \to opt;$ $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 4; \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 \geq 6; \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 11; \end{cases}$ $x_i \geq 0;\ i = \overline{1,3}.$

4.5. Двойственность в линейном программировании

Пример 4.5.1. Составить двойственную задачу для данной:

$$F = 2x_1 + 10x_2 - 2x_3 \to max;$$

$$\begin{cases} x_1 + \ 2x_2 - \ x_3 \geq 1; \\ 2x_1 - \ \ x_2 + 2x_3 \leq 3; \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \ (i = \overline{1,3}).$$

Решение.

Для составления двойственной задачи важно определить форму постановки исходной задачи. Здесь имеем все ограничения в виде неравенств, а также ограничение неотрицательности на все переменные. Следовательно, исходная задача поставлена в симметричной форме. Для постановки двойственной задачи первое ограничение-неравенство умножим на (-1), поскольку для случая $F \to$max необходимо, чтобы все ограничения-неравенства имели вид «≤».

$$\begin{array}{c|c|c}
\underline{\textit{Прямаязадача}} & \| & \underline{\textit{Двойственнаязадача}} \\
F = 2x_1 + 10x_2 - 2x_3 \to max; & & \hat{F} = -y_1 + 3y_2 \to min; \\
-x_1 - 2x_2 + x_3 \leq -1; & \Leftarrow y_1 \| x_1 \Rightarrow & -y_1 + 2y_2 \geq 2; \\
2x_1 - \ x_2 + 2x_3 \leq 3; & \Leftarrow y_2 \| x_2 \Rightarrow & -2y_1 - y_2 \geq 10; \\
 & \| x_3 \Rightarrow & y_1 + 2y_2 \geq -2; \\
x_i \geq 0, (\overline{i = 1,3}); & \| & y_j \geq 0 (j = 1,2).
\end{array}$$

Чтобы не ошибиться при составлении двойственной задачи, можно в строке для каждого ограничения записать двойственную переменную, которая «отвечает» за это ограничение. Очевидно, что и двойственная задача имеет симметричную форму.

Пример 4.5.2. Составить двойственную задачу для данной:

$$F = 3x_1 - 12x_2 + 4x_3 \to min;$$
$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 \le -2; \\ x_1 - 4x_2 + 4x_3 \ge 1; \end{cases}$$
$$x_i \ge 0\,(i = \overline{1,3}).$$

Решение.

Исходная задача поставлена в симметрической форме. Поскольку целевая функция F минимизируется, все ограничения-неравенства должны иметь вид «≥».

Прямаязадача		***Двойственнаязадача***
	$\Vert$	
$F = 3x_1 - 12x_2 + 4x_3 \to min;$		$\hat{F} = 2y_1 + y_2 \to max;$
$x_1 - 3x_2 - x_3 \ge 2;$	$\Leftarrow y_1 \Vert x_1 \Rightarrow$	$y_1 + y_2 \le 3;$
$x_1 - 4x_2 + 4x_3 \ge 1;$	$\Leftarrow y_2 \Vert x_2 \Rightarrow$	$-3y_1 - 4y_2 \le -12;$
	$\Vert x_3 \Rightarrow$	$-y_1 + 4y_2 \le 4;$
$x_i \ge 0,\,(i = \overline{1,3});$	$\Vert$	$y_j \ge 0\,(j = 1,2).$

Пример 4.5.3. Составить двойственную задачу для данной:

$$F = x_1 + x_2 + x_3 \to max;$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6; \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 = 16; \end{cases}$$
$$x_i \ge 0\,(i = \overline{1,3}).$$

Решение.

Задача поставлена в канонической форме. Так как $F \to$max, то в двойственной задаче целевая функция будет минимизироваться. Значит ограничениями будут неравенства вида «≥».

Прямая задача		Двойственная задача
	$\|$	
$F = x_1 + x_2 - x_3 \to max;$		$\hat{F} = 6y_1 + 16y_2 \to min;$
$x_1 - x_2 + x_3 = 6;$	$\Leftarrow y_1 \| x_1 \Rightarrow$	$y_1 + y_2 \ge 1;$
$x_1 + 7x_2 + 9x_3 = 16;$	$\Leftarrow y_2 \| x_2 \Rightarrow$	$-y_1 + 7y_2 \ge 1;$
	$\| x_3 \Rightarrow$	$y_1 + 9y_2 \ge -1.$
$x_i \ge 0, (i = \overline{1,3});$	$\|$	

Особо следует отметить, что в двойственной задаче на переменные y_j не накладывается никаких ограничений. Двойственная задача имеет, в данном случае, общую форму постановки.

Пример 4.5.4. Составить двойственную задачу для данной:

$$F = -x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 \to min;$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1; \\ x_1 - x_2 + 2x_4 = -1; \end{cases}$$
$$x_i \ge 0 \ (i = \overline{1,4}).$$

Решение.

Задача поставлена в канонической форме. В двойственной задаче целевая функция будет максимизироваться, следовательно, ограничениями будут неравенства вида «≤».

Прямая задача		Двойственная задача
$F = -x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 \to min;$	$\|$	$\hat{F} = y_1 - y_2 \to max;$
$x_1 + x_2 + 2x_3 = 1;$	$\Leftarrow y_1 \| x_1 \Rightarrow$	$y_1 + y_2 \le -1;$
$x_1 - x_2 + 2x_4 = -1;$	$\Leftarrow y_2 \| x_2 \Rightarrow$	$y_1 - y_2 \le -1;$
	$\| x_3 \Rightarrow$	$2y_1 \le -3;$
	$\| x_4 \Rightarrow$	$2y_2 \le 1.$
$x_i \ge 0 \ \ (i = \overline{1,4});$		

Двойственная задача имеет общую форму постановки.

Пример 4.5.5. Составить двойственную задачу для данной:

$$F = 7x_1 + 6x_2 + 3x_3 - x_4 \rightarrow min;$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 \geq 12; \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \leq 10; \\ 3x_1 + x_2 \qquad 4x_4 = 7; \end{cases}$$

$$x_2 \geq 0, \;\; x_3 \geq 0.$$

Решение.

Задача поставлена в общей форме. Поскольку $F \rightarrow \min$, в двойственной целевая будет максимизироваться. В прямой задаче неравенства приведём к виду «≥».

Прямаязадача		***Двойственнаязадача***
$F = 7x_1 + 6x_2 + 3x_3 - x_4 \rightarrow min;$	$\parallel$	$\hat{F} = 12y_1 - 10y_2 + 7y_3 \rightarrow max;$
$2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 \geq 12;$	$\Leftarrow y_1 \parallel x_1 \Rightarrow$	$2y_1 + y_2 + 3y_3 = 7;$
$x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \geq -10;$	$\Leftarrow y_2 \parallel x_2 \Rightarrow$	$-y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 6;$
$3x_1 + x_2 + 4x_4 = 7;$	$\Leftarrow y_3 \parallel x_3 \Rightarrow$	$2y_1 + y_2 \leq 3;$
	$\parallel x_4 \Rightarrow$	$-3y_1 - y_2 + 4y_3 = -1;$
$x_2 \geq 0; \; x_3 \geq 0;$	$\parallel$	$y_1 \geq 0; \; y_2 \geq 0;$

Двойственная, как и прямая задача, также поставлена в общей форме. Ограничения по неотрицательности получают лишь те переменные, которые «отвечают» за ограничения-неравенства (например, y_1 и y_2). В двойственной задаче ограничениями-равенствами становятся те строки, за которые «отвечают» прямые переменные, на которые не накладываются ограничения неотрицательности (например, x_1 и x_4 – это строки 1 и 4). За строки 2 и 3 «отвечают» переменные x_2 и x_3 , поэтому в двойственной имеем ограничения-неравенства.

Пример 4.5.6. Найти решение двойственной пары задач, если исходная имеет вид:

$$F = 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 \to max;$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 \le 1; \\ x_1 + x_2 - x_3 \le 2; \end{cases}$$

$$x_i \ge 0 \ (i = \overline{1,3}).$$

Решение.

По данной прямой задаче поставим двойственную:

Прямаязадача		*Двойственнаязадача*
$F = 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 \to max;$	$\Vert$	$\hat{F} = y_1 + 2y_2 \to min;$
$x_1 - x_2 - x_3 \le 1;$	$\Leftarrow y_1 \Vert x_1 \Rightarrow$	$y_1 + y_2 \ge 3;$
$x_1 + x_2 - x_3 \le 2;$	$\Leftarrow y_2 \Vert x_2 \Rightarrow$	$-y_1 + y_2 \ge 2;$
	$\Vert x_3 \Rightarrow$	$-y_1 - y_2 \ge -3;$
$x_i \ge 0, (i = \overline{1,3});$	$\Vert$	$y_j \ge 0 \, (j = 1,2).$

Для решения задачи симплекс-методом приведём обе к канонической форме.

$$F = 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 \to max;$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1; \\ x_1 + x_2 - x_3 \qquad + x_5 = 2; \end{cases}$$

$$x_i \ge 0 \ (i = \overline{1,5});$$

$$\hat{F} = y_1 + 2y_2 \to min;$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 - y_3 = 3; \\ -y_1 + y_2 \qquad - y_4 = 2; \\ -y_1 - y_2 \qquad\quad - y_5 = -3; \end{cases}$$

$$y_j \ge 0, (j = \overline{1,5}).$$

Далее выделим базис в обеих задачах:

$$F = 0 - (-3x_1 - 2x_2 + 3x_3) \to max;$$

$$\begin{cases} x_4 = 1 - (x_1 - x_2 - x_3); \\ x_5 = 2 - (x_1 + x_2 - x_3); \end{cases}$$

$$x_i \ge 0 \ (i = \overline{1,5});$$

$$\hat{F} = 0 - (-y_1 - 2y_2) \to min;$$

$$\begin{cases} 0 = 3 - (y_1 + y_2 - y_3); \\ 0 = 2 - (-y_1 + y_2 \qquad - y_4); \\ y_5 = 3 - (y_1 + y_2); \end{cases}$$

$$y_j \ge 0, (j = \overline{1,5}).$$

Очевидно, что прямая задача может быть решена прямым симплекс-методом, в то время как двойственная только с помощью метода искусственного базиса. Проще получить решение прямой задачи, а решение двойственной найти, используя условия Слейтера (вторая теорема двойственности).

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$
x_4	1	1	–1	–1
x_5	2	1	1	–1
F	0	–3	–2	–3

→

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$
x_4	1∗	1∗	–1∗	–1∗
x_5	2	1∗	1	–1
F	0	–3∗	–2	–3

→

	1	$-x_4$	$-x_2$	$-x_3$
x_1	1	1	–1	–1
x_5	1	–1	2	0
F	3	3	–5	0

→

	1	$-x_4$	$-x_2$	$-x_3$
x_1	1	1	–1∗	–1
x_5	1∗	–1∗	2∗	0∗
F	3	3	–5∗	0

→

	1	$-x_4$	$-x_5$	$-x_3$
x_1	3	1	–1	–2
x_2	1	–1	1	0
F	11	3	5	0

(÷2)→

	1	$-x_4$	$-x_5$	$-x_3$
x_1	$3/2$	$1/2$	$-1/2$	–1
x_2	$1/2$	$-1/2$	$1/2$	0
F	$11/2$	$3/2$	$5/2$	0

Получаем оптимальное решение прямой задачи: $\boldsymbol{X^* = \left\{\frac{3}{2};\frac{1}{2};0;0;0\right\},\ F_{max} = \frac{11}{2}}.$

Запишем условия Слейтера для обеих задач.

$$\begin{cases}(x_1 - x_2 - x_3 - 1)\cdot y_1 = 0;\\ (x_1 + x_2 - x_3 - 2)\cdot y_2 = 0;\end{cases}\qquad \begin{cases}(y_1 + y_2 - 3)\cdot x_1 = 0;\\ (-y_1 + y_2 - 2)\cdot x_2 = 0;\\ (-y_1 - y_2 + 3)\cdot x_3 = 0.\end{cases}$$

Подставим полученные значения для $\boldsymbol{x_i}$ в обе системы. Получаем:

$$\begin{cases}(3/2 - 1/2 - 0 - 1)\cdot y_1 = 0;\\ (3/2 + 1/2 - 0 - 2)\cdot y_2 = 0;\end{cases}\qquad \begin{cases}(y_1 + y_2 - 3)\cdot 3/2 = 0;\\ (-y_1 + y_2 - 2)\cdot 1/2 = 0;\\ (-y_1 - y_2 + 3)\cdot 0 = 0.\end{cases}$$

Отсюда: $0 \cdot \boldsymbol{y_1} = 0$, следовательно $\boldsymbol{y_1} \geq 0$. Аналогично $0 \cdot \boldsymbol{y_2} = 0$, а значит $\boldsymbol{y_2} \geq 0$.

Из второй системы получаем:

$$\begin{cases}(y_1+y_2-3)=0;\\(-y_1+y_2-2)=0;\\(-y_1-y_2+3)\geq 0.\end{cases}$$

Решим систему двух уравнений с двумя неизвестными и определим значения y_1 и y_2 :

$\begin{cases}y_1+y_2=3;\\-y_1+y_2=2.\end{cases}$ Отсюда получаем $y_1=\dfrac{1}{2}$, $y_2=\dfrac{5}{2}$. Теперь на основании первой теоремы двойственности запишем решение двойственной задачи: $Y^*=\left\{\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{2};0;0;0\right\}$, $\hat{F}_{min}=\dfrac{11}{2}$.

Проверка:

Прямаязадача	Двойственнаязадача
$F_{max}=3\cdot\frac{3}{2}+2\cdot\frac{1}{2}-3\cdot 0=\frac{11}{2}$	$\hat{F}_{min}=\frac{1}{2}+2\cdot\frac{5}{2}=\frac{11}{2}$
$\frac{3}{2}-\frac{1}{2}-0+0=1$	$\frac{1}{2}+\frac{5}{2}-0=3$
$\frac{3}{2}+\frac{1}{2}-0+0=2$	$-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}-0=2$
	$-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}-0=-3$

Ответ: $X^*=\left\{\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2};0;0;0\right\}$, $F_{max}=\dfrac{11}{2}$; $Y^*=\left\{\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{2};0;0;0\right\}$, $\hat{F}_{min}=\dfrac{11}{2}$.

Пример 4.5.7. Найти решение двойственной пары задач, если исходная имеет вид:

$$F=2x_1+3x_2\rightarrow min;$$
$$\begin{cases}x_1+5x_2\geq 20;\\3x_1+2x_2\geq 12;\\2x_1+4x_2\geq 10;\\x_1\qquad\geq 1;\end{cases}$$
$$x_i\geq 0\ (i=1,2).$$

Решение.

По данной прямой задаче поставим двойственную:

Прямаязадача		***Двойственнаязадача***
$F=2x_1+3x_2\to min;$	$\Vert$	$\hat{F}=20y_1+12y_2+10y_3+y_4\to max;$
$x_1+5x_2\ge 20;$	$\Leftarrow y_1 \Vert x_1 \Rightarrow$	$y_1+3y_2+2y_3+y_4\le 2;$
$3x_1+2x_2\ge 12;$	$\Leftarrow y_2 \Vert x_2 \Rightarrow$	$5y_1+2y_2+4y_3\qquad \le 3;$
$2x_1+4x_2\ge 10;$	$\Leftarrow y_3 \Vert$	
$x_1\qquad \ge 1;$	$\Leftarrow y_3 \Vert$	
$x_i\ge 0,(i=1,2);$	$\Vert$	$y_j\ge 0(j=1,2).$

Для решения задачи симплекс-методом приведём обе к канонической форме.

$$F=2x_1+3x_2\to min;$$
$$\begin{cases} x_1+5x_2-x_3 \qquad\qquad =20;\\ 3x_1+2x_2\qquad -x_4\qquad =12;\\ 2x_1+4x_2\qquad\qquad -x_5=10;\\ x_1\qquad\qquad\qquad\qquad -x_6=1;\end{cases}$$
$$x_i\ge 0\ (i=\overline{1,6});$$

$$\hat{F}=20y_1+12y_2+10y_3+y_4\to max;$$
$$\begin{cases} y_1+3y_2+2y_3+y_4+y_5\qquad =2;\\ 5y_1+2y_2+4y_3\qquad\qquad +y_6=3;\end{cases}$$
$$y_j\ge 0(j=\overline{1,6}).$$

Очевидно, что в прямой задаче базис выделить нельзя, поэтому она должна решаться с помощью метода искусственного базиса. Двойственная же задача позволяет достаточно просто выделить базис – переменные y_5 и y_6:

$$\hat{F}=0-(-20y_1-12y_2-10y_3-y_4)\to max;$$
$$\begin{cases} y_5=2-(y_1+3y_2+2y_3+y_4);\\ y_6=3-(5y_1+2y_2+4y_3);\end{cases}$$
$$y_j\ge 0(j=\overline{1,6}).$$

Совершенно очевидно, что при решении двойственной задачи прямым симплекс-методом усилий будет затрачено значительно меньше, чем при решении прямой методом искусственного базиса. Поэтому решим двойственную задачу, и затем с помощью условий Слейтера решим и прямую.

	1	$-y_1$	$-y_2$	$-y_3$	$-y_4$
y_5	2	1	3	2	1
y_6	3	5	2	4	0
$\hat{F}$	0	-20	-12	-10	-1

$\rightarrow$

	1	$-y_1$	$-y_2$	$-y_3$	$-y_4$
y_5	2	$1*$	3	2	1
y_6	$3*$	$5*$	$2*$	$4*$	$0*$
$\hat{F}$	0	$-20*$	-12	-10	-1

$\rightarrow$

	1	$-y_6$	$-y_2$	$-y_3$	$-y_4$
y_5	7	-1	13	6	5
y_1	3	1	2	4	0
$\hat{F}$	60	20	-20	30	-5

$(\div 5)\rightarrow$

	1	$-y_6$	$-y_2$	$-y_3$	$-y_4$
y_5	$7/5$	$-1/5$	$13/5$	$6/5$	1
y_1	$3/5$	$1/5$	$2/5$	$4/5$	0
$\hat{F}$	12	4	-4	6	-1

$\rightarrow$

	1	$-y_6$	$-y_2$	$-y_3$	$-y_4$
y_5	$7/5*$	$-1/5*$	$13/5*$	$6/5*$	$1*$
y_1	$3/5$	$1/5$	$2/5*$	$4/5$	0
$\hat{F}$	12	4	$-4*$	6	-1

$\rightarrow$

	1	$-y_6$	$-y_5$	$-y_3$	$-y_4$
y_2	$7/5$	$-1/5$	1	$6/5$	1
y_1	1	$3/5$	$-2/5$	$8/5$	$-2/5$
$\hat{F}$	$184/5$	$54/5$	4	$102/5$	$7/5$

$(\div 13/5)\rightarrow$

$\rightarrow$

	1	$-y_6$	$-y_5$	$-y_3$	$-y_4$
y_2	$7/13$	$-1/13$	$5/13$	$6/13$	$5/13$
y_1	$5/13$	$3/13$	$-2/13$	$8/13$	$-2/13$
$\hat{F}$	$184/13$	$54/13$	$20/13$	$102/13$	$7/13$

Оптимальное решение двойственной задачи:

$$Y^* = \left\{\frac{5}{13};\frac{7}{13};0;0;0;0\right\};\ \hat{F}_{max} = \frac{184}{13}.$$

Условия Слейтера для обеих задач будут иметь вид:

$$\begin{cases} (x_1 + 5x_2 - 20)\cdot y_1 = 0; \\ (3x_1 + 2x_2 - 12)\cdot y_2 = 0; \\ (2x_1 + 4x_2 - 10)\cdot y_3 = 0; \\ (x_1 - 1)\cdot y_4 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} (y_1 + 3y_2 + 2y_3 + y_4 - 2)\cdot x_1 = 0; \\ (5y_1 + 2y_2 + 4y_3 \quad - 3)\cdot x_2 = 0. \end{cases}$$

Подставим полученные значения для y_j в обе системы. Получаем:

$$\begin{cases} (x_1+5x_2-20)\cdot\dfrac{5}{13} = 0; \\ (3x_1+2x_2-12)\cdot\dfrac{7}{13} = 0; \\ (2x_1+4x_2-10)\cdot 0 = 0; \\ (x_1-1)\cdot 0 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (5/13+3\cdot 7/13+2\cdot 0+0+0-2)\cdot x_1 = 0; \\ (5\cdot 5/13+2\cdot 7/13+4\cdot 0 +0-3)\cdot x_2 = 0. \end{cases}$$

Вторая система после вычислений имеет вид: $\begin{cases} 0\cdot x_1 = 0 \\ 0\cdot x_2 = 0 \end{cases}$. Откуда получаем, что $\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$.

Проанализировав первую систему, получим следующие соотношения:

$$\begin{cases} x_1+5x_2-20 = 0 \\ 3x_1+2x_2-12 = 0 \\ 2x_1+4x_2-10 \geq 0 \\ x_1-1 \geq 0 \end{cases}.$$

Первые два уравнения образуют систему: $\begin{cases} x_1+5x_2 = 20 \\ 3x_1+2x_2 = 12 \end{cases}$.

Решение данной системы таково: $x_1 = \dfrac{20}{13}$; $x_2 = \dfrac{48}{13}$.

Неизвестными остаются балансовые переменные прямой задачи x_3, x_4, x_5 x_6. Для их определения установим соответствие между переменными двойственной пары задач.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
y_5	y_6	y_1	y_2	y_3	y_4

Теперь обратимся к последней расчётной таблице симплекс-метода.

		1	$-y_6$	$-y_5$	$-y_3$	$-y_4$
x_4	y_2	$7/13$	$-1/13$	$5/13$	$6/13$	$5/13$
x_3	y_1	$5/13$	$3/13$	$-2/13$	$8/13$	$-2/13$
	$\hat{F}$	$184/13$	$54/13$	$20/13$	$102/13$	$7/13$
			x_2	x_1	x_5	x_6

По последней строке и столбцу «1» находим: $x_5=\dfrac{102}{13}, x_6=\dfrac{7}{13}, x_3=0, x_4=0$. Таким образом получаем оптимальный план прямой задачи: $X^*=\left\{\dfrac{20}{13};\dfrac{48}{13};0;0;\dfrac{102}{13};\dfrac{7}{13}\right\}$, $F_{min}=\dfrac{184}{13}$.

Проверка. Подставим все найденные значения в канонические формы двух задач.

Прямаязадача	***Двойственнаязадача***
$F_{min}=2\cdot\frac{20}{13}+3\cdot\frac{48}{13}=\frac{40+144}{13}=\frac{184}{13};$ $\begin{cases}\frac{20}{13}+5\cdot\frac{48}{13}-0=\frac{260}{13}=20;\\ 3\cdot\frac{20}{13}+2\cdot\frac{48}{13}-0=\frac{156}{13}=12;\\ 2\frac{20}{13}+4\cdot\frac{48}{13}-\frac{102}{13}=\frac{130}{13}=10;\\ \frac{20}{13}-\frac{7}{13}=\frac{13}{13}=1;\end{cases}$	$\hat{F}_{max}=20\cdot\frac{5}{13}+12\cdot\frac{7}{13}+10\cdot0+0=\frac{100+84}{13}=\frac{184}{13};$ $\begin{cases}\frac{5}{13}+3\cdot\frac{7}{13}+2\cdot0+0+0=\frac{26}{13}=2;\\ 5\cdot\frac{5}{13}+2\cdot\frac{7}{13}+4\cdot0+0=\frac{39}{13}=3.\end{cases}$

Ответ. $X^*=\left\{\dfrac{20}{13};\dfrac{48}{13};0;0;\dfrac{102}{13};\dfrac{7}{13}\right\}$, $F_{min}=\dfrac{184}{13}$;

$Y^*=\left\{\dfrac{5}{13};\dfrac{7}{13};0;0;0;0\right\}$, $\hat{F}_{max}=\dfrac{184}{13}$.

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1. Составить двойственную задачу для данной:

$a)\ F=3x_1-12x_2+4x_3\to min;$ $\begin{cases} x_1+3x_2+x_3\le -2;\\ x_1-4x_2+4x_3\ge 1;\end{cases}$ $x_i\ge 0\ (i=\overline{1,3});$	$b)\ F=2x_1+3x_2-7x_3+14x_4\to max;$ $\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4\le 2;\\ x_1+2x_2-4x_3+7x_4\le -2;\end{cases}$ $x_i\ge 0\ (i=\overline{1,4});$
$c)\ F=2x_1+3x_2\to max;$ $\begin{cases} 2x_1+3x_2\le 15;\\ x_1+2x_2\ge 6;\\ x_1+x_2\le 8;\end{cases}$ $x_i\ge 0\ (i=\overline{1,2});$	$d)\ F=2x_1+x_2+2x_3\to min;$ $\begin{cases} -x_1+x_2+x_3=2;\\ x_1-3x_2-2x_3=1;\end{cases}$ $x_i\ge 0\ (i=\overline{1,3});$
$e)\ F=3x_1+x_2+x_3\to max;$ $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3\le 6;\\ x_1+2x_2-x_3=4;\end{cases}$ $x_i\ge 0\ (i=\overline{1,3}).$	

Задача 2. Найти решение двойственной пары задач, если исходная имеет вид:

$$a)\ F=16x_1+9x_2+4x_3+6x_4\to max;$$
$$\begin{cases} 4x_1+x_2+3x_4\le 2;\\ 2x_1+3x_2+4x_3\le 3;\end{cases}$$
$$x_i\ge 0,\ (i=\overline{1,4});$$

ответ: $X^*=\{\tfrac{3}{10};\tfrac{4}{5};0;0\};Y^*=\{3;2\};F=12;$

$$b)\ F=6x_1-x_2\to min;$$
$$\begin{cases} x_1+x_2\ge 3;\\ 4x_1-x_2\ge -4;\\ 3x_1-2x_2\le 24;\\ x_2\le 6;\end{cases}$$
$$x_i\ge 0,\ (i=1,2);$$

ответ: $X^*=\{0,4\};Y=\{0,1,0,0\};\ F=-4;$

$c)\quad F = 6x_1 - 5x_2 \to max;$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 10; \\ 5x_1 + 2x_2 \le 10; \end{cases}$$

$$x_i \ge 0,\ (i = 1{,}2);$$

<u>ответ</u>: $X^* = \{2;0;0;6\}; Y^* = \{0;\tfrac{6}{5};0;\tfrac{37}{5}\}; F = 12;$

$d)\ F = 3x_1 + 3x_2 \to min;$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \ge 4; \\ 4x_1 + x_2 \ge 4; \end{cases}$$

$$x_i \ge 0,\ (i = 1{,}2);$$

<u>ответ</u>: $X^* = \{\tfrac{4}{5};\tfrac{4}{5};0;0\}; Y^* = \{\tfrac{3}{5};\tfrac{3}{5};0;0\}; F = \tfrac{24}{5};$

$e)\quad F = 4x_1 + 4x_2 + 6x_3 + x_4 \to min;$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 \ge 8; \\ -4x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \ge 2; \end{cases}$$

$$x_i \ge 0\,(i = \overline{1{,}4});$$

<u>ответ.:</u> $X^* = \{\tfrac{6}{5};0;\tfrac{34}{5};0\};\ Y^* = \{\tfrac{28}{5};\tfrac{2}{5};0;26;0;1\};\ F = \tfrac{228}{5}.$

4.6. Транспортная задача

Пример 4.6.1. Решить транспортную задачу методом потенциалов. Первоначальный опорный план составить с помощью метода северо-западного угла и с помощью метода минимальной стоимости.

Поставщики	Потребители				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	12	9	7	11	105
A_2	4	3	12	2	165
A_3	5	17	9	4	180
Потребности	90	120	110	130	

Решение.

Прежде всего, выясним, к какому типу задач – открытому или закрытому – относится данная. Проверим баланс по сумме потребностей и запасов: $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} bj$.

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 105 + 165 + 180 = 450; \quad \sum_{j=1}^{4} b_j = 90 + 120 + 110 + 130 = 450.$$

Таким образом, данная задача является закрытой. Введение дополнительных строк и столбцов не понадобится. Предварительный шаг:

1. Составим первоначальный опорный план на основе метода северо-западного угла. Для этого начнём заполнение таблицы с клетки (1,1), не обращая внимание на тарифы. Получим:

Поставщики	Потребители				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	12 90	9 15	7	11	105
A_2	4	3 105	12 60	2	165
A_3	5	17	9 50	4 130	180
Потребности	90	120	110	130	

клетка (1,1): груз x_{11}=min(105, 90) =90. Остаток по 1-й строке 105−90=15. 1-й столбец перекрыт.

клетка (1,2): груз x_{12}= min(15, 120)=15. Остаток по 1-му столбцу 120−15=105. 1-ая строка перекрыта.

клетка (2,2): груз x_{22}= min(105, 165)=105. Остаток по 2-й строке 165−105=60. 2-й столбец перекрыт.

клетка (2,3): груз x_{23}= min(60, 110)=60. Остаток по 3-му столбцу 110−60=50. 2-я строка перекрыта.

клетка (3,3): груз x_{33}= min(50, 180)=50. Остаток по 3-й строке 180−50=130. 3-й столбец перекрыт.

клетка (3,4): груз x_{34}= min(130, 130)=130. Остатки по 3-1 строке и 4-му столбцу равны 0.

План составлен. Выясним теперь, можно ли его считать опорным? Количество загруженных клеток ***N*=*6***, что равно числу базисных переменных **r = m+n−1= 3+4−1 = 6**. Кроме того, циклов данный план не содержит. Всё это позволяет сделать заключение, что данный план есть первоначальным опорным планом задачи.

Рассчитаем первоначальную стоимость перевозок по данному плану:

$$\mathbf{F = 12{\cdot}90 + 9{\cdot}15 + 3{\cdot}105 + 12{\cdot} 60 + 9 {\cdot}50 + 4 {\cdot}130 = 3220\ у.е.}$$

Поскольку данный опорный план составлялся без учёта тарифов, он далек от оптимального. Целью решения задачи является постепенное улучшение плана перевозок и, как следствие, уменьшение стоимости перевозок.

2. Проверим потенциальность полученного плана. Для этого построим систему потенциалов для базисных клеток $\boldsymbol{v_j - u_i = c_{ij}}$, где $\boldsymbol{v_j}$ - потенциалы столбцов (пунктов потребления), а $\boldsymbol{u_i}$ - потенциалы строк (пунктов поставки), $\boldsymbol{c_{ij}}$, - тарифы базисных клеток. Получим следующую систему:

клетка	***уравнение***
(1,1)	$\boldsymbol{v_1 - u_1 = 12}$
(1,2)	$\boldsymbol{v_2 - u_1 = 9}$
(2,2)	$\boldsymbol{v_2 - u_2 = 3}$
(2,3)	$\boldsymbol{v_3 - u_2 = 12}$
(3,3)	$\boldsymbol{v_3 - u_3 = 9}$
(3,4)	$\boldsymbol{v_4 - u_3 = 4}$

Нетрудно видеть, что это есть система шести линейных алгебраических уравнений с семью неизвестными. Такая система имеет бесчисленное множество решений. Нам же достаточно найти какое-либо одно частное решение. Положим, что $\boldsymbol{u_1}$**=0.** Тогда все остальные неизвестные находятся без труда: $\boldsymbol{v_1}$=12; $\boldsymbol{v_2}$=9; $\boldsymbol{u_2}$=6; $\boldsymbol{u_3}$= 9; $\boldsymbol{v_3}$=18; $\boldsymbol{v_4}$=13.

Занесём все полученные значения в таблицу:

Поставщики	Потребители				Запасы
	v_1=12	v_2=9	v_3=18	v_4=13	
u_1=0	12 90	9 15	7	11	105
u_2=6	4	3 105	12 60	2	165
u_3=9	5	17	9 50	4 130	180
Потребности	90	120	110	130	

3. Проверим потенциальность небазисных клеток. Для этого воспользуемся соотношением $\boldsymbol{\alpha_{ij} = v_j - u_i - c_{ij}}$. Если $\boldsymbol{\alpha_{ij}} \leq \mathbf{0}$, клетка потенциальна, если $\boldsymbol{\alpha_{ij}} > \mathbf{0}$ – нет.

Сведём наши вычисления в таблицу:

клетка	*значение* α_{ij}	*потенциальность*	*max* α_{ij}**>0**
(1,3)	18-0-7=11	нет	*
(1,4)	13-0-11=2	нет	
(2,1)	12-6-4=2	нет	
(2,4)	13-6-2=5	нет	
(3,1)	12-9-5=-2	да	
(3,2)	9-9-17=-17	да	

Полученный план не является потенциальным, поскольку не все $\alpha_{ij} \le 0$.

Этот план необходимо улучшить (оптимизировать).

<u>Общий повторяющийся шаг.</u>

1. Выделим небазисную клетку с наибольшим положительным потенциалом (в таблице она обозначена знаком *). Такая клетка носит название перспективной. В распределительной таблице отметим её знаком ⊕. Это клетка (1,3). Составим цикл с участием этой клетки.

Поставщики	Потребители				Запасы
	v_1=12	v_2=9	v_3=18	v_4=13	
u_1=0	12 90	9 15	7 ⊕	11	105
u_2=6	4	3 105	12 60	2	165
u_3=9	5	17	9 50	4 130	180
Потребности	90	120	110	130	

В него войдут клетки: (1,3) – (2,3) – (2,2) – (1,2). Поочерёдно клетки цикла пометим знаками ⊕ и ⊖, соединим их отрезками. Получим:

<table>
<tr><td rowspan="2">Поставщики</td><td colspan="4">Потребители</td><td rowspan="2">Запасы</td></tr>
<tr><td>$v_1=12$</td><td>$v_2=9$</td><td>$v_3=18$</td><td>$v_4=13$</td></tr>
<tr><td>$u_1=0$</td><td>12
90</td><td>9
⊖
15</td><td>7
⊕</td><td>11</td><td>105</td></tr>
<tr><td>$u_2=6$</td><td>4</td><td>3
⊕
105</td><td>12
⊖
60</td><td>2</td><td>165</td></tr>
<tr><td>$u_3=9$</td><td>5</td><td>17</td><td>9
50</td><td>4
130</td><td>180</td></tr>
<tr><td>Потребности</td><td>90</td><td>120</td><td>110</td><td>130</td><td></td></tr>
</table>

Рассмотрим клетки со значком ⊖. Выберем наименьший груз в этих клетках: min⊖(15,60)=15. Этот груз поместим в перспективную клетку, а затем прибавим к грузам в других клетках со знаком ⊕. От грузов в клетках со знаком ⊖ отнимем это значение. При этом в клетке (1,2) груз исчезает и она выводится из базиса. Но в этом случае нельзя записывать значение груза, равное 0, а просто оставлять пустую клетку.

Поставщики	Потребители				Запасы
	v_1=12	v_2=9	v_3=18	v_4=13	
u_1=0	12 90	9	7 15	11	105
u_2=6	4	3 120	12 45	2	165
u_3=9	5	17	9 50	4 130	180
Потребности	90	120	110	130	

2. Проанализируем полученный план и проверим его потенциальность. N=6. Циклов нет. Баланс по строкам и столбцам не нарушен. Пересчитаем потенциалы базисных клеток: $\boldsymbol{v_j - u_i = c_{ij}}$.

Поставщики	Потребители				Запасы
	v_1=12	v_2=-2	v_3=7	v_4=4	
u_1=0	12 90	9	7 15	11	105
u_2= -5	4	3 120	12 45	2	165
u_3=0	5	17	9 50	4 130	180
Потребности	90	120	110	130	

Как видно, значения потенциалов изменились значительно.

3. Проверим потенциальность небазисных клеток $\boldsymbol{\alpha_{ij} = v_j - u_i - c_{ij}}$.

клетка	***значение α_{ij}***	***потенциальность***	***max α_{ij}>0***
(1,2)	-2-0-9=-11	да	
(1,4)	4-0-11=-7	да	
(2,1)	12+5-4=13	нет	*
(2,4)	4+5-2=7	нет	
(3,1)	12-0-5=7	нет	
(3,2)	-2-0-17=-17	да	

Полученный новый план ещё не потенциален, хотя количество не потенциальных клеток и уменьшилось.

Этот план опять необходимо улучшить. Поэтому возвращаемся к общему повторяющемуся шагу.

1*) Небазисная клетка с наибольшим потенциалом – (2,1) – перспективная. В таблице отмечаем её знаком ⊕. Всё остальное делаем по схеме повторяющегося шага.

Поставщики	Потребители				Запасы
	$v_1=12$	$v_2=-2$	$v_3=7$	$v_4=4$	
$u_1=0$	12 ⊖ 90	9	7 ⊕ 15	11	105
$u_2=-5$	4 ⊕	3 120	12 ⊖ 45	2	165
$u_3=0$	5	17	9 50	4 130	180
Потребности	90	120	110	130	

Цикл включает 4 клетки: (1,1) – (1,3) – (2,3) – (2,1). Базисная клетка (2,2) в цикл не входит, через неё цикл «проходит «транзитом». Находим $\min^{\ominus}(90,45)=45$. Добавляем это число к грузу в ⊕-клетках и вычитаем из груза в ⊖-клетках. Новый план:

Поставщики	Потребители				Запасы
	$v_1=12$	$v_2=-2$	$v_3=7$	$v_4=4$	
$u_1=0$	12 45	9	7 60	11	105
$u_2=-5$	4 45	3 120	12	2	165
$u_3=0$	5	17	9 50	4 130	180
Потребности	90	120	110	130	

N=6, циклов нет. Баланс по строкам и столбцам не нарушен.

2*) Проверяем потенциальность нового плана. Пересчитаем потенциалы $\boldsymbol{v_j - u_i = c_{ij}}$. Уравнения более записывать не будем, определяя потенциалы непосредственно из распределительной таблицы.

Поставщики	Потребители				Запасы
	v_1=12	v_2=11	v_3=7	v_4=2	
u_1=0	12 45	9	7 60	11	105
u_2=8	4 45	3 120	12	2	165
u_3= -2	5	17	9 50	4 130	180
Потребности	90	120	110	130	

3*) Проверим потенциальность небазисных клеток $\boldsymbol{\alpha_{ij} = v_j - u_i - c_{ij}}$.

клетка	***значение α_{ij}***	***потенциальность***	***max α_{ij}>0***
(1,3)	11-0-9=2	нет	
(1,4)	2-0-11=-9	да	
(2,3)	7-8-12=-13	да	
(2,4)	2-8-2=-8	да	
(3,1)	12+2-5=9	нет	*
(3,2)	11+2-17=-4	да	

Полученный план не является потенциальным и подлежит улучшению. Возвращаемся к общему повторяющемуся шагу.

1**) Небазисная клетка с наибольшим потенциалом – (3,1) – перспективная. В таблице отмечаем её знаком ⊕. Всё остальное делаем по схеме повторяющегося шага.

Поставщики	Потребители				Запасы
	v_1=12	v_2=11	v_3=7	v_4=2	
u_1=0	12 ⊖ 45	9 ⊕	7 60	11	105
u_2=8	4 ⊕ 45	3 ⊖ 120	12	2	165
u_3= -2	5	17	9 50	4 130	180
Потребности	90	120	110	130	

Цикл: (1,2) – (2,2) – (2,1) – (1,1); $\min^{\ominus}(120,45)=45$.

Новый план:

Поставщики	Потребители				Запасы
	v_1=12	v_2=11	v_3=7	v_4=2	
u_1=0	12	9 45	7 60	11	105
u_2=8	4 90	3 75	12	2	165
u_3= -2	5	17	9 50	4 130	180
Потребности	90	120	110	130	

N=6, баланс не нарушен.

2**) Проверяем потенциальность нового плана. Пересчитаем потенциалы $\boldsymbol{v_j - u_i = c_{ij}}$.

Поставщики	Потребители				Запасы
	$v_1=10$	$v_2=9$	$v_3=7$	$v_4=2$	
$u_1=0$	12	9 45	7 60	11	105
$u_2=6$	4 90	3 75	12	2	165
$u_3= -2$	5	17	9 50	4 130	180
Потребности	90	120	110	130	

3**) Проверим потенциальность небазисных клеток $\boldsymbol{\alpha_{ij} = v_j - u_i - c_{ij}}$.

клетка	***значение α_{ij}***	***потенциальность***	***max α_{ij}>0***
(1,1)	10-0-12=-2	да	
(1,4)	2-0-11=-9	да	
(2,3)	7-6-12=-13	да	
(2,4)	2-6-2=-6	да	
(3,1)	10+2-5=7	нет	*
(3,2)	9+2-17=-6	да	

Имеем единственную клетку с положительным потенциалом. Поэтому вновь полученный план нуждается в улучшении.

1***) Небазисная клетка с наибольшим потенциалом – (3,1) – перспективная. В таблице отмечаем её знаком ⊕. Всё остальное делаем по схеме повторяющегося шага.

Поставщики	Потребители				Запасы
	v_1=10	v_2=9	v_3=7	v_4=2	
u_1=0	12	9 ⊖ 45	7 ⊕ 60	11	105
u_2=6	4 ⊖ 90	3 ⊕ 75	12	2	165
u_3= -2	5 ⊕	17	9 ⊖ 50	4 130	180
Потребности	90	120	110	130	

Цикл: (3,1) – (3,3) – (1,3) – (1,2) – (2,2) – (2,1); $\min^{\ominus}$(90,45,50)=45.

Новый план:

Поставщики	Потребители				Запасы
	v_1=10	v_2=9	v_3=7	v_4=2	
u_1=0	12	9	7 105	11	105
u_2=6	4 45	3 120	12	2	165
u_3= -2	5 45	17	9 5	4 130	180
Потребности	90	120	110	130	

N=6, баланс не нарушен.

2***) Проверяем потенциальность нового плана. Пересчитаем потенциалы $\boldsymbol{v_j - u_i = c_{ij}}$.

Поставщики	Потребители				Запасы
	v_1=3	v_2=2	v_3=7	v_4=2	
u_1=0	12	9	7 105	11	105
u_2= -1	4 45	3 120	12	2	165
u_3= -2	5 45	17	9 5	4 130	180
Потребности	90	120	110	130	

3***) Проверим потенциальность небазисных клеток $\boldsymbol{\alpha_{ij} = v_j - u_i - c_{ij}}$.

клетка	***значение*** $\boldsymbol{\alpha_{ij}}$	***потенциальность***	***max*** $\boldsymbol{\alpha_{ij}>0}$
(1,1)	3-0-12=-9	да	
(1,2)	2-0-9=-7	да	
(1,4)	2-0-11=-9	да	
(2,3)	7+1-12=-4	да	
(2,4)	2+1-2=1	нет	*
(3,2)	2+2-4=0	да	

Имеем единственную клетку с положительным потенциалом. Поэтому вновь полученный план нуждается в улучшении.

1****) Небазисная клетка с наибольшим потенциалом – (3,1) – перспективная. В таблице отмечаем её знаком ⊕. Всё остальное делаем по схеме повторяющегося шага.

Поставщики	***Потребители***				***Запасы***
	v_1=3	v_2=2	v_3=7	v_4=2	
u_1=0	**12**	**9**	**7** *105*	**11**	**105**
u_2= -1	**4** ⊖ *45*	**3** *120*	**12**	**2** ⊕	**165**
u_3= -2	**5** ⊕ *45*	**17**	**9** *5*	**4** ⊖ *130*	**180**
Потребности	**90**	**120**	**110**	**130**	

Цикл: (2,4) – (2,1) – (3,1) – (3,4); $\min^{\ominus}(130,45)=45$.

Новый план:

Поставщики	Потребители				Запасы
	$v_1=3$	$v_2=2$	$v_3=7$	$v_4=2$	
$u_1=0$	12	9	7 105	11	105
$u_2= -1$	4	3 120	12	2 45	165
$u_3= -2$	5 90	17	9 5	4 85	180
Потребности	90	120	110	130	

N=6, баланс не нарушен.

2****) Проверяем потенциальность нового плана. Пересчитаем потенциалы $\boldsymbol{v_j - u_i = c_{ij}}$.

Поставщики	Потребители				Запасы
	$v_1=3$	$v_2=3$	$v_3=7$	$v_4=2$	
$u_1=0$	12	9	7 105	11	105
$u_2=0$	4	3 120	12	2 45	165
$u_3= -2$	5 90	17	9 5	4 85	180
Потребности	90	120	110	130	

3****) Проверим потенциальность небазисных клеток $\boldsymbol{\alpha_{ij} = v_j - u_i - c_{ij}}$.

клетка	***значение α_{ij}***	***потенциальность***	***max α_{ij}>0***
(1,1)	3-0-12=-9	да	
(1,2)	3-0-9=-6	да	
(1,4)	2-0-11=-9	да	
(2,1)	3-0-4=-1	да	
(2,3)	7-0-12=-5	да	
(3,3)	3+2-17=-12	да	

Итак, полученный план является потенциальным, так не содержит небазисных клеток с положительными потенциалами. На этом общий повторяющийся шаг завершается.

<u>Завершающий шаг.</u> Полученный план является оптимальным. Матрица перевозок имеет вид: $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 105 & 0 \\ 0 & 120 & 0 & 45 \\ 90 & 0 & 5 & 85 \end{pmatrix}$.

Стоимость перевозок для данного плана:

$$\mathbf{F_{min} = 105 \cdot 7 + 120 \cdot 3 + 45 \cdot 2 + 90 \cdot 5 + 5 \cdot 9 + 85 \cdot 4 = 2020}\ \textbf{у.е.}$$

По сравнению с начальным значением 3220 у.е. стоимость перевозок уменьшилась. В этом и состояла цель решения транспортной задачи.

Решим эту же задачу, на предварительном шаге составляя первоначальный опорный план с помощью *метода минимальной стоимости.*

<u>Предварительный шаг.</u>

1. Метод минимальной стоимости (или метод минимального элемента) требует учёта значений тарифов.

Поставщики	Потребители				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	12	9	7	11	105
A_2	4	3	12	2	165
A_3	5	17	9	4	180
Потребности	90	120	110	130	

Среди всех клеток распределительной таблицы выберем клетку с наименьшим тарифом. Если таких клеток несколько, то выберем любую из них. В нашем случае таковой является **клетка (2,4)**. Помещаем в неё груз x_{24} = min(165,130) = 130. Столбец 4-й оказывается перекрытым. Остаток по 2-й строке 165-130=35. В этой же строке выбираем другую клетку с наименьшим тарифом – **клетка (2,2)** и помещаем в неё груз x_{22} = min(35,120) = 35. 2-ая строка перекрыта.

Поставщики	Потребители				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	12	9 85	7 20	11	105
A_2	4	3 35	12	2 130	165
A_3	5 90	17	9 90	4	180
Потребности	90	120	110	130	

Остаток по 2-му столбцу равен 120-35=85. В этом столбце выбираем другую клетку с наименьшим тарифом – **(1,2)**. Помещаем в неё груз x_{12} = min(85,105) = 85. 2-й столбец перекрыт.

Остаток по 1-й строке равен 105-85=20. В незанятую клетку (1,3) с наименьшим тарифом поместим груз x_{13} = min(110,20) = 20. Таким образом 1-ая строка перекрыта.

По столбцу 3 остаток составляет 110-20=90. Открыта только **клетка (3,3)**, в которую поместим груз x_{33} = min(90,180) = 90. В этой строке осталась единственная открытая **клетка (3,1)**, куда и помещаем этот груз x_{31} = 90. Процесс составления плана окончен.

Выясним теперь, можно ли его считать опорным? Количество загруженных клеток N=6, что равно числу базисных переменных r = m+n−1= 3+4−1 = 6. Кроме того, циклов данный план не содержит. Всё это позволяет сделать заключение, что данный план есть первоначальным опорным планом задачи.

Рассчитаем первоначальную стоимость перевозок по данному плану:

$$F = 85\cdot 9 + 20\cdot 7 + 35\cdot 3 + 130\cdot 2 + 90\cdot 5 + 90\cdot 9 = 2525 \text{ у.е.}$$

2. Проверим потенциальность полученного плана. Для этого построим систему потенциалов для базисных клеток $\boldsymbol{v_j - u_i = c_{ij}}$, где $\boldsymbol{v_j}$ - потенциалы столбцов (пунктов потребления), а $\boldsymbol{u_i}$ - потенциалы строк (пунктов поставки), $\boldsymbol{c_{ij}}$, - тарифы базисных клеток. Получим следующую систему:

клетка	***уравнение***
(1,2)	$\boldsymbol{v_2 - u_1 = 9}$
(1,3)	$\boldsymbol{v_3 - u_1 = 7}$
(2,2)	$\boldsymbol{v_2 - u_2 = 3}$
(2,4)	$\boldsymbol{v_4 - u_2 = 2}$
(3,1)	$\boldsymbol{v_1 - u_3 = 5}$
(3,3)	$\boldsymbol{v_3 - u_3 = 9}$

Нетрудно видеть, что это есть система шести линейных алгебраических уравнений с семью неизвестными. Такая система имеет бесчисленное множество решений. Нам же достаточно найти какое-либо одно частное решение. Положим, что $\boldsymbol{u_1 = 0}$. Тогда все остальные неизвестные находятся без труда: v_1=3; v_2=9; u_2=6; u_3= -2; v_3=7; v_4=8.

Занесём все полученные значения в таблицу:

<table>
<tr><td rowspan="2">Поставщики</td><td colspan="4">Потребители</td><td rowspan="2">Запасы</td></tr>
<tr><td>v_1=3</td><td>v_2=9</td><td>v_3=7</td><td>v_4=8</td></tr>
<tr><td>u_1=0</td><td>12</td><td>9
85</td><td>7
20</td><td>11</td><td>105</td></tr>
<tr><td>u_2=6</td><td>4</td><td>3
35</td><td>12</td><td>2
130</td><td>165</td></tr>
<tr><td>u_3= -2</td><td>5
90</td><td>17</td><td>9
90</td><td>4</td><td>180</td></tr>
<tr><td>Потребности</td><td>90</td><td>120</td><td>110</td><td>130</td><td></td></tr>
</table>

3. Проверим потенциальность небазисных клеток. Для этого воспользуемся соотношением $\alpha_{ij} = v_j - u_i - c_{ij}$. Если $\alpha_{ij} \le 0$, клетка потенциальна, если $\alpha_{ij} > 0$ – нет.

Сведём наши вычисления в таблицу:

клетка	***значение*** α_{ij}	***потенциальность***	***max*** α_{ij}**>0**
(1,1)	3-0-12=-9	да	
(1,4)	8-0-11=-3	да	
(2,1)	3-6-4=-7	да	
(2,3)	7-6-12=-11	да	
(3,2)	9+2-17=-6	да	
(3,4)	8+2-4=6	нет	*

Полученный план не является потенциальным, поскольку $\alpha_{34} > 0$. Этот план необходимо улучшить (оптимизировать).

<u>Общий повторяющийся шаг.</u>

1.. Выделим небазисную клетку с наибольшим положительным потенциалом (в таблице она одна и обозначена знаком *). Эта клетка носит название перспективной. В распределительной таблице отметим её знаком ⊕. Это клетка (3,4). Составим цикл с участием этой клетки.

Поставщики	Потребители				Запасы
	$v_1=3$	$v_2=9$	$v_3=7$	$v_4=8$	
$u_1=0$	12	9 ⊖ 85	7 ⊕ 20	11	105
$u_2=6$	4	3 ⊕ 35	12	2 ⊖ 130	165
$u_3= -2$	5 90	17	9 ⊖ 90	4 ⊕	180
Потребности	90	120	110	130	

Цикл: (3,4) – (3,3) – (1,3) – (1,2) – (2,2) – (2,4). Рассмотрим клетки со значком ⊖. Выберем наименьший груз в этих клетках: $\min^{\ominus}(90,85,130)=85$. Этот груз поместим в перспективную клетку, а также прибавим к грузам в других клетках со знаком ⊕. От грузов в клетках со знаком ⊖ отнимем это значение. При этом в клетке (1,2) груз исчезает и она выводится из базиса. Но в этом случае нельзя записывать значение груза, равное 0, а просто оставлять пустую клетку.

Поставщики	Потребители				Запасы
	$v_1=3$	$v_2=9$	$v_3=7$	$v_4=8$	
$u_1=0$	12	9	7 105	11	105
$u_2=6$	4	3 120	12	2 45	165
$u_3= -2$	5 90	17	9 5	4 85	180
Потребности	90	120	110	130	

2. Проанализируем полученный план и проверим его потенциальность. N=6. Циклов нет. Баланс по строкам и столбцам не нарушен.

Пересчитаем потенциалы базисных клеток: $\boldsymbol{v_j - u_i = c_{ij}}$.

Поставщики	Потребители				Запасы
	$v_1=3$	$v_2=3$	$v_3=7$	$v_4=2$	
$u_1=0$	12	9	7 105	11	105
$u_2=0$	4	3 120	12	2 45	165
$u_3= -2$	5 90	17	9 5	4 85	180
Потребности	90	120	110	130	

3. Проверим потенциальность небазисных клеток. Для этого воспользуемся соотношением $\boldsymbol{\alpha_{ij} = v_j - u_i - c_{ij}}$. Если $\boldsymbol{\alpha_{ij} \leq 0}$, клетка потенциальна, если $\boldsymbol{\alpha_{ij} > 0}$ – нет.

Сведём наши вычисления в таблицу:

клетка	***значение*** $\boldsymbol{\alpha_{ij}}$	***потенциальность***	***max*** $\boldsymbol{\alpha_{ij}>0}$
(1,1)	3-0-12=-9	да	
(1,2)	3-0-9=-6	да	
(1,4)	2-0-11=-9	да	
(2,1)	3-0-4=-1	да	
(2,3)	7-0-12=-5	да	
(3,3)	3+2-17=-12	да	

Итак, полученный план является потенциальным, так не содержит небазисных клеток с положительными потенциалами. На этом общий повторяющийся шаг завершается.

Завершающий шаг. Полученный план является оптимальным. Матрица перевозок имеет вид: $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 105 & 0 \\ 0 & 120 & 0 & 45 \\ 90 & 0 & 5 & 85 \end{pmatrix}$.

Стоимость перевозок для данного плана:

$$\mathbf{F_{min} = 105{\cdot}7 + 120{\cdot}3 + 45{\cdot}2 + 90{\cdot}5 + 5{\cdot}9 + 85{\cdot}4 = 2020} \text{ **у.е.**}$$

По сравнению с начальным значением 2525 у.е. стоимость перевозок уменьшилась. В этом и состояла цель решения транспортной задачи.

Резюме. Одна и та же задача решена методом потенциалов, однако составление первоначального опорного плана в первом случае проводилось методом северо-западного угла, во втором – методом минимальной стоимости. Анализируя оба решения очевидно, что метод минимальной стоимости даёт первоначальный план, более близкий к оптимальному, что, в свою очередь, сказывается на количестве вычислений. Однако отвергать метод северо-западного угла вовсе нецелесообразно, так как он более прост и при вычислениях на больших таблицах более нагляден.

Пример 4.6.2. Решить транспортную задачу методом потенциалов. Первоначальный опорный план составить с помощью метода минимальной стоимости.

Поставщики	Потребители				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	7	3	6	30
A_2	9	4	5	7	70
A_3	5	7	6	2	50
Потребности	10	40	20	60	

Решение.

Прежде всего выясним, к какому типу задач – открытому или закрытому – относится данная. Проверим:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 30+70+50=150; \quad \sum_{j=1}^{4} b_j = 10+40+20+60=130;$$

$$\sum_{i=1}^{3} a_i - \sum_{j=1}^{4} b_j = 150-130=20.$$

Здесь налицо нарушение баланса между предложением и спросом, то есть

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} bj.$$

Таким образом, данная задача является открытой. Чтобы уровнять баланс, введём фиктивного потребителя $\boldsymbol{B_5}$ с потребностью $\boldsymbol{b_5 = 20}$. В распределительной таблице вводится дополнительный столбец, соответствующий этому потребителю. Тарифы в этом столбце назначаются нулевые.

Поставщики	Потребители					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	2	7	3	6	0	30
A_2	9	4	5	7	0	70
A_3	5	7	6	2	0	50
Потребности	10	40	20	60	20	

<u>Предварительный шаг.</u>

1. Составляем первоначальный опорный план методом минимальной стоимости. В столбце 5 все тарифы нулевые, то есть наименьшие. Однако лучше пока не торопиться с загрузкой этого столбца, потому что трудно угадать, в какую из трёх клеток лучше поместить груз. Неудачное

распределение груза может привести к значительному увеличению количества вычислений, а это нежелательно. Лучше этот столбец загрузить в последнюю очередь.

клетка (1,1): груз x_{11}=min(30,10)=10. Остаток по строке 1 равен 30-10=20.

клетка (1,3): груз x_{13} =min(20,20)=20. Перекрыты столбцы 1 и 3, строка 1.

клетка (3,4): груз x_{34} =min(50,60)=50. Остаток по столбцу 60-50=10. Строка 2 перекрыта.

клетка (2,4): груз x_{24}=min(10,70)=10. Остаток по 2 строке 70-10=60. Открыты только клетки (2,2) и (2,5). Помещаем грузы x_{22}=40 и x_{25}=20. План составлен.

Поставщики	Потребители					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	2 10	7	3 20	6	0	30
A_2	9	4 40	5	7 10	0 20	70
A_3	5	7	6	2 50	0	50
Потребности	10	40	20	60	20	

План составлен. Выясним теперь, можно ли его считать опорным? Количество загруженных клеток ***N*=*6***. Число же базисных переменных **r = m+n−1= 5+3−1 = 7**. Имеем $N \neq r$. Такая транспортная задача называется вырожденной. Для того, чтобы решить задачу, в базис вводим дополнительную седьмую клетку. Единственное ограничение на неё – чтобы она не составляла цикл с уже имеющимися базисными. Так, например, клетку (3,5) брать нельзя, так как сразу же образуется цикл (2,4)-(2,5)-(3,5)-(3,4). По той же причине нельзя выбрать клетку (3,2). Остановим свой выбор на (3,1) с тарифом 5, наименьшим из незанятых. Грузим в неё 0.

Поставщики	Потребители					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	2 10	7	3 20	6	0	30
A_2	9	4 40	5	7 10	0 20	70
A_3	5 0	7	6	2 50	0	50
Потребности	10	40	20	60	20	

Теперь $N = r = 7$. Циклов данный план не имеет. Данный план есть первоначальным опорным планом задачи.

Рассчитаем первоначальную стоимость перевозок по этому плану:

$$\mathbf{F = 2\cdot10 + 3\cdot20 + 4\cdot40 + 7\cdot 10 + 2\cdot50 = 410}\ \textbf{у.е.}$$

2. Проверим потенциальность полученного плана. Для этого построим систему потенциалов для базисных клеток $v_j - u_i = c_{ij}$, где v_j - потенциалы столбцов (пунктов потребления), а u_i - потенциалы строк (пунктов поставки), c_{ij}, - тарифы базисных клеток. Получим следующую систему:

клетка	***уравнение***
(1,1)	$v_1 - u_1 = 2$
(1,3)	$v_3 - u_1 = 3$
(2,2)	$v_2 - u_2 = 4$
(2,4)	$v_4 - u_2 = 7$
(2,5)	$v_5 - u_2 = 0$
(3,1)	$v_1 - u_3 = 5$
(3,4)	$v_4 - u_3 = 2$

Положим, что $\boldsymbol{u_1}$**=0,** поскольку нас устроит любое частное решение этой системы. Тогда все остальные неизвестные находятся без труда: $\boldsymbol{v_1}$=2; $\boldsymbol{v_2}$=-4; $\boldsymbol{u_2}$=-8; $\boldsymbol{u_3}$=-3; $\boldsymbol{v_3}$=3; $\boldsymbol{v_4}$=-1; $\boldsymbol{v_5}$=-8.

Занесём все полученные значения в распределительную таблицу:

Поставщики	Потребители					Запасы
	v_1=2	v_2=-4	v_3=3	v_4=-1	v_5=-8	
u_1 = 0	2 10	7	3 20	6	0	30
u_2 = -8	9	4 40	5	7 10	0 20	70
u_3 = -3	5 0	7	6	2 50	0	50
Потребности	10	40	20	60	20	

3. Проверим потенциальность небазисных клеток. Для этого воспользуемся соотношением $\boldsymbol{\alpha_{ij} = v_j - u_i - c_{ij}}$. Если $\boldsymbol{\alpha_{ij} \leq 0}$, клетка потенциальна, если $\boldsymbol{\alpha_{ij} > 0}$ – нет.

Сведём наши вычисления в таблицу:

клетка	*значение* α_{ij}	*потенциальность*	***max*** $\boldsymbol{\alpha_{ij}>0}$
(1,2)	-4-0-7=-11	да	
(1,4)	-1-0-6=-7	да	
(1,5)	-8-0-0=-8	да	
(2,1)	2+8-9=1	нет	
(2,3)	3+8-5=6	нет	*
(3,2)	-4+3-7=-8	да	
(3,3)	3+3-6=0	да	
(3,5)	-8+3-0=-5	да	

Полученный план не является потенциальным, поскольку не все $\boldsymbol{\alpha_{ij}} \leq 0$. Этот план необходимо улучшить (оптимизировать).

Общий повторяющийся шаг.

1.. Выделим небазисную клетку с наибольшим положительным потенциалом (в таблице она обозначена знаком *). Эта клетка носит название перспективной. В распределительной таблице отметим её знаком ⊕. Это клетка (2,3). Составим цикл с участием этой клетки.

Поставщики	Потребители					Запасы
	v_1=2	v_2=-4	v_3=3	v_4=-1	v_5=-8	
u_1 = 0	2 ⊕ 10	7	3 ⊖ 20	6	0	30
u_2 = -8	9	4 40	5 ⊕	7 ⊖ 10	0 20	70
u_3 = -3	5 ⊖ 0	7	6	2 ⊕ 50	0	50
Потребности	10	40	20	60	20	

Составим цикл с участием этой клетки. В него войдут клетки: (2,3) – (1,3) – (1,1) – (3,1) – (3,4) – (2,4). Поочерёдно клетки цикла пометим знаками ⊕ и **⊖.** Соединим клетки цикла отрезками. Рассмотрим клетки со значком ⊖. Выберем наименьший груз в этих клетках: $\min^{\ominus}(10,20,0)=0$. Этот груз поместим в перспективную клетку, а также прибавим к грузам в других клетках со знаком ⊕. От грузов в клетках со знаком ⊖ отнимем это значение.

Поставщики	Потребители					Запасы
	v_1=2	v_2=-4	v_3=3	v_4=-1	v_5=-8	
u_1 = 0	2 10	7	3 20	6	0	30
u_2 = -8	9	4 40	5 0	7 10	0 20	70
u_3 = -3	5	7	6	2 50	0	50
Потребности	10	40	20	60	20	

Получили новый план, который мало чем отличается от предыдущего (за исключением клеток (3,1) и (2,3)). На стоимости перевозок это не сказывается, поскольку мы перемещали нулевой груз. Однако новый план всё же принципиально отличается от предыдущего. Здесь N=7, циклов нет.

2. Проверим его потенциальность, для чего пересчитаем потенциалы.

Поставщики	Потребители					Запасы
	v_1=2	v_2=2	v_3=3	v_4=5	v_5=-2	
u_1 = 0	2 10	7	3 20	6	0	30
u_2 = -2	9	4 40	5 0	7 10	0 20	70
u_3 = 3	5	7	6	2 50	0	50
Потребности	10	40	20	60	20	

3. Проверим потенциальность небазисных клеток. Для этого воспользуемся соотношением $\boldsymbol{\alpha_{ij} = v_j - u_i - c_{ij}}$. Если $\boldsymbol{\alpha_{ij} \le 0}$, клетка потенциальна, если $\boldsymbol{\alpha_{ij} > 0}$ – нет.

Сведём наши вычисления в таблицу:

клетка	***значение*** α_{ij}	***потенциальность***	***max*** α_{ij}**>0**
(1,2)	2-0-7=5	да	
(1,4)	5-0-6=-1	да	
(1,5)	-2-0-0=-2	да	
(2,1)	2+2-9=-5	да	
(3,1)	2-3-5=-6	да	
(3,2)	2-3-7=-8	да	
(3,3)	3-3-6=-6	да	
(3,5)	-2-3-0=1	да	

План потенциален, а значит и оптимален.

Завершающий шаг. Полученный план является оптимальным. Матрица перевозок такова:

$$X^* = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 40 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{pmatrix}.$$

Фиктивный столбец в матрице обычно не записывается, так как он не влияет на стоимость перевозок.

Рассчитаем конечную стоимость перевозок по этому плану:

$$\mathbf{F_{min} = 2 \cdot 10 + 3 \cdot 20 + 4 \cdot 40 + 7 \cdot 10 + 2 \cdot 50 = 410 \text{ у.е.}}$$

Стоимость перевозок осталась прежней. Это есть особенность вырожденных задач, когда приходится предпринимать вычисления, меняя местами клетки с 0-тарифами или 0-грузами. Однако другого пути нет.

Пример 4.6.3. Решить транспортную задачу методом потенциалов. Первоначальный опорный план составить с помощью метода минимальной стоимости.

Поставщики	Потребители				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1	7	2	5	40
A_2	3	8	4	1	30
A_3	6	3	5	3	50
Потребности	20	18	44	75	

Решение.

Выясним, к какому типу задач – открытому или закрытому – относится данная. Проверим баланс по сумме потребностей и запасов: $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} bj$.

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 40 + 30 + 50 = 120; \quad \sum_{j=1}^{4} b_j = 20 + 18 + 44 + 75 = 157.$$

Таким образом, данная задача является открытой. Поскольку $\sum_{i=1}^{3} a_i < \sum_{j=1}^{4} b_j$, то есть потребности превышают предложение, необходимо ввести фиктивного поставщика A_5 с запасом $a_5 = 157 - 120 = 37$. В распределительной таблице вводим дополнительную строку с нулевыми тарифами.

Поставщики	Потребители				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1	7	2	5	40
A_2	3	8	4	1	30
A_3	6	3	5	3	50
A_4	0	0	0	0	37
Потребности	20	18	44	75	

Предварительный шаг.

1. Составляем первоначальный опорный план методом минимальной стоимости. Фиктивную строку заполняем, по возможности, в последнюю очередь.

Поставщики	Потребители				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1 20	7	2 20	5	40
A_2	3	8	4 24	1 6	30
A_3	6	3	5	3 50	50
A_4	0	0 18	0	0 19	37
Потребности	20	18	44	75	

клетка (1,1): груз x_{11}=min(20,40)=20. Остаток по строке 40-20=20, столбец 1 перекрыт.

клетка (1,3): груз x_{13}=min(20,44)=20.Остаток по 3-му столбцу 44-20=20. Строка 1 перекрыта.

клетка (2,3): груз x_{23}=min(24,30)=24. Остаток по 2 строке 30-24=6. Столбец 2 перекрыт.

клетка (2,4): груз x_{24}=min(6,75)=6. Остаток по 4 столбцу 75-6=69, строка 2 перекрыта.

клетка (3,4): груз x_{34}=min(69,50)=50. Остаток 4 столбцу 69-50=19, строка 3 перекрыта.

клетка (4,4): груз x_{44}=min(19,37)=19. Остаток по строке 37-19=19, столбец 4 перекрыт.

клетка (4,2): груз x_{42}=min(18,18)=18.

План составлен. Выясним теперь, можно ли его считать опорным? Количество загруженных клеток $\boldsymbol{N=7}$, что равно числу базисных переменных $\boldsymbol{r = m+n-1= 4+4-1 = 7}$. Кроме того, циклов данный план не содержит. Всё это позволяет сделать заключение, что данный план есть первоначальным опорным планом задачи.

Рассчитаем первоначальную стоимость перевозок по данному плану:

$$\mathbf{F = 1\cdot 20 + 2\cdot 20 + 4\cdot 24 + 1\cdot 6 + 3\cdot 50 = 316\ у.е.}$$

2. Проверим потенциальность полученного плана. Для этого построим систему потенциалов для базисных клеток $\boldsymbol{v_j - u_i = c_{ij}}$, где $\boldsymbol{v_j}$ - потенциалы столбцов (пунктов потребления), а $\boldsymbol{u_i}$ - потенциалы строк (пунктов поставки), $\boldsymbol{c_{ij}}$, - тарифы базисных клеток. Получим следующую систему:

клетка	*уравнение*
(1,1)	$\boldsymbol{v_1 - u_1 = 1}$
(1,2)	$\boldsymbol{v_2 - u_1 = 7}$
(1,4)	$\boldsymbol{v_4 - u_1 = 5}$
(2,1)	$\boldsymbol{v_1 - u_2 = 3}$
(2,2)	$\boldsymbol{v_2 - u_2 = 8}$
(3,1)	$\boldsymbol{v_1 - u_3 = 6}$
(3,2) (3,3)	$\boldsymbol{v_1 - u_3 = 3}$ $\boldsymbol{v_3 - u_3 = 5}$
(4,1)	$\boldsymbol{v_1 - u_4 = 0}$
(4,2)	$\boldsymbol{v_2 - u_4 = 0}$

Решая систему описанным ранее методом, получим следующие потенциалы:

Поставщики	Потребители				Запасы
	$v_1=1$	$v_2=-1$	$v_3=2$	$v_4=-1$	
$u_1 = 0$	1 20	7	2 20	5	40
$u_2 = -2$	3	8	4 24	1 6	30
$u_3 = -4$	6	3	5	3 50	50
$u_4 = -1$	0	0 18	0	0 19	37
Потребности	20	18	44	75	

3. Проверим потенциальность небазисных клеток. Для этого воспользуемся соотношением $\boldsymbol{\alpha_{ij} = v_j - u_i - c_{ij}}$. Если $\boldsymbol{\alpha_{ij} \le 0}$, клетка потенциальна, если $\boldsymbol{\alpha_{ij} > 0}$ – нет.

Сведём наши вычисления в таблицу:

клетка	***значение*** $\boldsymbol{\alpha_{ij}}$	***потенциальность***	***max*** $\boldsymbol{\alpha_{ij} > 0}$
(1,2)	-1-0-7=-8	да	
(1,4)	-1-0-5=-6	да	
(2,1)	-1+2-3=0	да	
(2,2)	-1+2-8=-7	да	
(3,1)	1+4-6=-1	да	
(3,2)	-1+4-3=0	да	
(3,3)	2+4-5=1	нет	
(4,1)	1+1-0=2	нет	
(4,3)	2+1-0=3	нет	*

1*) План не потенциален. Улучшим его известными методами. Составим цикл с участием перспективной клетки (4,3). В него войдут клетки: (4,3) – (4,4) – (2,4) – (2,3). Поочерёдно клетки цикла пометим знаками ⊕ и ⊖**.** Соединим клетки цикла отрезками. Получим:

Поставщики	Потребители				Запасы
	v_1=1	v_2=-1	v_3=2	v_4=-1	
u_1 = 0	1 20	7	2 20	5	40
u_2 = -2	3	8	4 ⊖ 24	1 ⊕ 6	30
u_3 = -4	6	3	5	3 50	50
u_4 = -1	0	0 18	0 ⊕	0 ⊖ 19	37
Потребности	20	18	44	75	

Рассмотрим клетки со значком ⊖. Выберем наименьший груз в этих клетках: min$^{\ominus}$(19,24)=19. Этот груз поместим в перспективную клетку, а также прибавим к грузам в других клетках со знаком ⊕. От грузов в клетках со знаком ⊖ отнимем это значение. Получаем новый план.

Поставщики	Потребители				Запасы
	$v_1=1$	$v_2=-1$	$v_3=2$	$v_4=-1$	
$u_1 = 0$	1 20	7	2 20	5	40
$u_2 = -2$	3	8	4 5	1 25	30
$u_3 = -4$	6	3	5	3 50	50
$u_4 = -1$	0	0 18	0 19	0	37
Потребности	20	18	44	75	

N=7, циклов нет, баланс по строкам и столбцам сохранён.

2*) Вычислим новые потенциалы.

Поставщики	Потребители				Запасы
	$v_1=1$	$v_2=2$	$v_3=2$	$v_4=-1$	
$u_1 = 0$	1 20	7	2 20	5	40
$u_2 = -2$	3	8	4 5	1 25	30
$u_3 = -4$	6	3	5	3 50	50
$u_4 = 2$	0	0 18	0 19	0	37
Потребности	20	18	44	75	

3*) Проверим потенциалы небазисных клеток.

клетка	***значение*** α_{ij}	***потенциальность***	***max*** α_{ij}**>0**
(1,2)	2-0-7=-5	да	
(1,4)	-1-0-5=-6	да	
(2,1)	1+2-3=0	да	
(2,2)	2+2-8=-4	да	
(3,1)	1+4-6=-1	да	
(3,2)	2+4-3=3	нет	*
(3,3)	2+4-5=1	нет	
(4,1)	1-2-0=-1	да	
(4,4)	-1-2-0=-3	да	

1**) План не потенциален и подлежит улучшению. Клетку (3,2) считаем перспективной.

Поставщики	Потребители				Запасы
	$v_1=1$	$v_2=2$	$v_3=2$	$v_4=-1$	
$u_1 = 0$	1 20	7	2 20	5	40
$u_2 = -2$	3	8	4 $\ominus$ 5	1 $\oplus$ 25	30
$u_3 = -4$	6	3 $\oplus$	5	3 $\ominus$ 50	50
$u_4 = 2$	0	0 $\ominus$ 18	0 $\oplus$ 19	0	37
Потребности	20	18	44	75	

2**) Цикл содержит 6 клеток. Баланс не нарушен. Находим $\min^{\ominus}(18,50,5) = 5$. Составляем новый план. На этой же схеме пересчитаем потенциалы.

Поставщики	Потребители				Запасы
	v_1=1	v_2=2	v_3=2	v_4=2	
u_1 = 0	1 20	7	2 20	5	40
u_2 = 1	3	8	4	1 30	30
u_3 = -1	6	3 5	5	3 45	50
u_4 = 2	0	0 13	0 24	0	37
Потребности	20	18	44	75	

3**) Проверяем потенциалы небазисных клеток.

клетка	***значение*** $\boldsymbol{\alpha_{ij}}$	***потенциальность***	***max*** $\boldsymbol{\alpha_{ij}>0}$
(1,2)	2-0-7=-5	да	
(1,4)	2-0-5=-3	да	
(2,1)	1-1-3=-3	да	
(2,2)	2-1-8=-7	да	
(2,3)	2-1-4=-3	да	
(3,1)	1+1-6=-4	да	
(3,3)	2+1-5=-2	да	
(4,1)	1-2-0=-1	да	
(4,4)	2-2-0=0	да	

План оптимален. Матрица перевозок (транспортная матрица) имеет вид:

$$X^* = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 13 & 24 & 0 \end{pmatrix}.$$

Стоимость перевозок $\mathbf{F_{min} = 1 \cdot 20 + 2 \cdot 20 + 1 \cdot 30 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 45 = 230}$ **у.е.**

Задачи для самостоятельного решения.

Решить транспортные задачи методом потенциалов. Первоначальный опорный план составить с помощью метода северо-западного угла и с помощью метода минимальной стоимости.

Задача 1.

Поставщики	Потребители				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	4	5	1	60
A_2	2	3	9	4	70
A_3	3	4	2	5	20
Потребности	40	30	30	50	

Ответ. $F_{\min}$=310.

Задача 2.

Поставщики	Потребители				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	4	1	3	30
A_2	5	6	5	4	20
A_3	3	7	9	5	40
A_4	1	2	2	7	50
Потребности	35	20	55	30	

Ответ. F_{min}=345.

Задача 3.

Поставщики	Потребители					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	2	6	3	4	8	40
A_2	1	5	6	9	7	30
A_3	3	4	1	6	10	35
Потребности	20	34	16	10	15	

Ответ. F_{min}=352.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вітілінский В. В. Математичне програмування /В. В. Вітлінський, С. І. Наконечний, Т.О. Терещенко. – К.: КНЕУ, 2001. *Базовий підручник*.
2. Дегтярев Ю. И. Исследование операций: Учебн. пос. для студентов вузов /Ю. И. Дегтярев. – М.: Высшая школа, 1979.
3. Зайченко Ю. Н. Исследование операций / Ю.Н. Зайченко. – К.: Вища школа, 1985.
4. Зайченко Ю. Н. Исследование операций: сборник задач / Ю. Н. Зайченко, С.А. Шумилов. – К.: Вища школа, 1984.
5. Кузнецов А.В. Математическое программирование / А. В. Кузнецов, Н.И. Холод. – Минск: Вышэйш. шк., 1984.
6. Кремер Н. Ш. Исследование операций в экономике / Н. Ш. Кремер. – М.: Банки и биржи, 1997.
7. Калихман И.Л. Сборник задач по математическому программированию /И.Л. Калихман. – М.: Высшая школа, 1975.
8. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах /И.Л. Акулич. – М.: Высшая школа, 1986.
9. Мину М. Математическое программирование / М. Мину. – М.: Наука, 1990.