МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ, МОЛОДЕЖИ И СПОРТА УКРАИНЫ
НАЦИОНАЛЬНАЯ МЕТАЛЛУРГИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ УКРАИНЫ

Г.М. БАРТЕНЕВ, А.Н. ДУК, Е.Г. ТКАЧЕНКО,
В.В. ТОЛСТОЙ, Н.В. ЦЕЛУЙКО

# ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

## Раздел “Линейная алгебра”

## Часть 4

**Утверждено на заседании Ученого совета академии
в качестве конспекта лекций. Протокол №15 от 27.12.2010**

**Днепропетровск НМетАУ 2011**

УДК 005.3:658.518(07)

Высшая математика. Часть 4. Раздел «Линейная алгебра»: Конспект лекций. /Г.М. Бартенев, А.Н. Дук, Е. Г. Ткаченко и др. – Днепропетровск: НМетАУ, 2011. – 43 с.

Содержит теоретический материал по указанному разделу дисциплин «Высшая математика» и «Математика для экономистов», излагаемый в соответствии с государственными образовательными профессиональными программами.

Предназначен для студентов экономических специальностей, а также для студентов с проблемами здоровья.

Ответственный за выпуск Г.Г. Швачич, канд. техн. наук, проф.

Рецензенты: А.А. Ивлев, канд. техн. наук, доц. (ГВУЗ)

К.У. Чуднов, канд. техн. наук, доц. (НМетАУ)

# 1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И МАТРИЦЫ

## 1.1. Понятие определителя

Пусть дана квадратная таблица, состоящая из $n \times n$, расположенных в $n$ горизонтальных и $n$ вертикальных рядах.

*Определителем* называется число, полученное в соответствии с некоторыми правилами из этой таблицы.

Определители обозначаются так:

$$|A|\ ;\ |a_{ij}|\ ;\ detA\ ;\ \Delta\ .$$

Таким образом, в общем случае определитель выглядит так:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (1.1)$$

Горизонтальные ряды в определителе называются *строками*, вертикальные - *столбцами*.

Числа $a_{ij}$ называются *элементами* определителя, причем, первый индекс - $i$, - означает номер строки, а второй - $j$, - номер столбца, на пересечении которых стоит этот элемент. Индексы $i$ и $j$ могут принимать любые натуральные значения от 1 до $n$ включительно, что обозначается так:

$$i = \overline{1, n};$$
$$j = \overline{1, n}.$$

*Порядком* определителя называется число его строк или столбцов.

Поэтому определитель (1.1) является определителем $n$-*го* порядка.

Диагональ определителя, для которой $i=j$, называется *главной*. Другая диагональ, у которой $i \neq j$, называется *побочной*.

Познакомимся с правилами вычисления определителей по мере возрастания их порядков.

Минимальный порядок определителя – первый. В этом случае вся таблица состоит из одного элемента - $a_{ij}$, - и ее определитель равен самому элементу, т.е.

$$|A| = |a_{ij}| = a_{ij}\ .$$

Определитель второго порядка вычисляется следующим образом:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}\ . \qquad (1.2)$$

В формуле (1.2) первый член представляет собой произведение элементов главной диагонали, а второй – побочной, причем, взятое с обратным знаком.

**Пример 1.1.1** $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 0$.

Заметим, что равный нулю определитель имеет пропорциональные строки.

Определитель третьего порядка – это число, полученное по такому правилу:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - \qquad (1.3)$$

$$- a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} .$$

Запоминать формулу (1.3) нет нужды, т.к. она легко воспроизводится.

В соответствии с *правилом треугольников* обозначим элементы определителя точками и соединим отрезками прямых те из них, которые дают члены определителя (1.3). При этом со своими знаками берутся произведения элементов главной диагонали и элементов, расположенных в вершинах двух треугольников, основания которых параллельны этой диагонали. С противоположными знаками берутся произведения элементов, расположенных в побочной диагонали и в вершинах двух треугольников, основания которых параллельны названной диагонали. Схематично это правило выглядит так:


Еще более просто формула (1.3) реализуется в соответствии с *правилом Саррюса*. Для этого дополним определитель справа двумя первыми столбцами:

$$\underbrace{\overbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}^{+}}_{-} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} .$$

Из схемы очевидно, какие произведения берутся со своими знаками, а какие – с противоположными.

**Пример 1.1.2**

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 0\cdot(-2)\cdot(-1)+2\cdot1\cdot3+1\cdot3\cdot2-2\cdot(-2)\cdot2-1\cdot1\cdot(-1)- \\ -0\cdot3\cdot3=0+6+6+8+1-0=21\,. \end{matrix}$$

## 1.2. Минор и алгебраическое дополнение

Представим определитель ***n-го*** порядка (1.1) в следующем виде, выделив ***i-ю*** строку и ***j-й*** столбец:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

На пересечении указанных ***i-й*** строки и ***j-го*** столбца стоит элемент $a_{ij}$ .

*Минором* $M_{ij}$ элемента $a_{ij}$ определителя ***n-го*** порядка называется определитель (***n***-1)-го порядка, получаемый вычеркиванием в исходном определителе ***i-й*** строки и ***j-го*** столбца, на пересечении которых находится элемент $a_{ij}$ .

*Алгебраическим дополнением* $A_{ij}$ элемента $a_{ij}$ называется его минор, умноженный на коэффициент $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}\,.$$

**Пример 1.2.1.** Найти минор и алгебраическое дополнение элемента $a_{23}$ для определителя

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 0 \end{vmatrix}.$$

**Решение**

Вычеркнув 2-ю стоку и 3-й столбец, получим определитель второго порядка, который и является минором заданного элемента:

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 1\cdot7-(-2)\cdot3=13\,.$$

Алгебраическое дополнение этого элемента будет отличаться от найденного минора знаком:

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = (-1)^{2+3}\cdot13 = -13\,.$$

### 1.3. Основные свойства определителей

1. Величина определителя не изменится, если все его строки заменить столбцами (математическая запись свойства показывается на примере определителя третьего порядка):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} .$$

**Примечание**. Операция замены строк столбцами называется *транспонированием* определителя.

**Следствие**. Если известно какое-либо свойство определителя, относящееся к его строкам, то оно справедливо и для его столбцов.

2. При перестановке в определителе двух строк (столбцов), меняется знак определителя:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} .$$

3. Общий множитель всех элементов строки (столбца) можно выносить за символ определителя:

$$\begin{vmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & k \cdot a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} .$$

4. Определитель равен нулю, если

а) имеет две одинаковые строки (столбца):

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0 ;$$

б) все элементы строки (столбца) равны нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = 0 ;$$

в) соответствующие элементы двух строк (столбцов) пропорциональны:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ k \cdot a & k \cdot b & k \cdot c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0 .$$

5. Если все элементы ***i-й*** строки ( ***j-го*** столбца) могут быть представлены в виде двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, у

которых все строки (столбцы), кроме ***i*-й** ( ***j*-го**), равны исходным значениям, а ***i*-я** строка (***j*-й** столбец) в одном определителе состоят из первых слагаемых, в другом – из вторых слагаемых:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

6. Если к элементам некоторой строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), предварительно умноженные на не равный нулю множитель, то величина определителя при этом не изменится:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+k\cdot a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+k\cdot a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+k\cdot a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

7. **Теорема Лапласа** (разложение определителя по элементам строки (столбца)). Определитель равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot A_{11} + a_{12}\cdot A_{12} + a_{13}\cdot A_{13} = \sum_{j=1}^{3} a_{1j}\cdot A_{1j}.$$

8. Сумма произведений всех элементов какой-либо строки (столбца) на алгебраические произведения другой строки (столбца) равна нулю:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\cdot A_{mj} = 0,\ \ k \neq m.$$

## 1.4. Вычисление определителей *n-го* порядка

Практическое вычисление определителей ***n*-го** порядка основывается на теореме Лапласа, свойстве 6 и других. Такой способ нахождения определителя часто называют методом понижения порядка определителя.

**Пример 1.4.1.** Вычислить определитель четвертого порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

**Решение**

Для того, чтобы упростить вычисления, мы не сразу применим теорему Лапласа, а сначала, используя свойство 6, добьемся, чтобы все элементы, кроме одного, в строке (столбце), по которой будет раскладываться определитель, обратились в нуль. В этом случае вычисление определителя четвертого порядка будет сведено к вычислению не четырех, а только одного определителя третьего порядка. Затем применим этот метод для получения определителя второго порядка, вычисление которого не представляет труда. Для облегчения алгебраических вычислений в качестве строки (столбца), по которой будем раскладывать определитель, выбираем строку (столбец) с наибольшим количеством нулей. Если нулевые элементы отсутствуют или их количество одинаково для нескольких строк (столбцов), то среди этих рядов предпочтение следует отдать тем, которые содержат элементы, равные $\pm 1$. В этом случае мы будем иметь дело с целочисленными значениями элементов определителя. Наконец, если и этому критерию удовлетворяют несколько рядов, выбираем тот, который состоит из наименьших чисел.

Разложим заданный определитель по элементам второй строки, предварительно получив в ней нули в третьем и четвертом столбцах. Для этого к элементам указанных столбцов прибавим значения элементов первого столбца, умноженные на коэффициенты -1 и -2 соответственно:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Определитель третьего порядка разложим по элементам первой строки, произведя почленное вычитание из элементов второго и третьего столбцов элементов первого столбца:

$$\Delta = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (3 + 15) = 36 .$$

## 1.5. Понятие матрицы

*Матрицей* размерностью $m \times n$ является прямоугольная таблица, состоящая из $m \times n$ чисел, расположенных в $m$ строках и $n$ столбцах:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}. \qquad (1.4)$$

Для матриц используются следующие обозначения:

$$A\ ;\ A_{m \times n}\ ;\ [a_{ij}];\ (a_{ij});\ \|a_{ij}\|, \text{ где } i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}.$$

Если $m = n$, матрица называется *квадратной* размерностью $n$-*го* порядка. Числа $a_{ij}$ называются *элементами* матрицы.

Воображаемая прямая, соединяющая элементы матрицы с одинаковыми индексами (т.е. $i=j$), называется *главной диагональю*.

Другая диагональ матрицы называется *побочной*.

Квадратная матрица, у которой все элементы вне главной диагонали равны нулю, называется *диагональной* матрицей:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны между собой, называется *скалярной* матрицей.

Скалярная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны 1, называется *единичной* матрицей:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}.$$

Единичная матрица играет роль единицы на множестве матриц.

Матрица, состоящая из одной стоки (столбца), называется *матрицей-строкой (матрицей-столбцом)*:

$$A_{1\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \end{bmatrix};$$

$$B_{m\times 1}=\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \ldots \\ b_{m1} \end{bmatrix}.$$

Если все элементы матрицы равны нулю, то такая матрица называется *нулевой* матрицей и может быть произвольной размерности:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}.$$

Одной из важнейших характеристик матрицы является ее определитель.

*Определителем* квадратной матрицы $A$ называется определитель, элементами которого являются элементы матрицы.

Квадратная матрица называется *невырожденной (неособенной)*, если ее определитель не равен нулю, и *вырожденной (особенной)*, если ее определитель обращается в нуль.

Две матрицы $A$ и $B$ называются *равными*, если они одинаковой размерности и их соответствующие элементы равны между собой:

$$a_{ij} = b_{ij}, \qquad i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

## 1.6. Действия над матрицами

### 1.6.1. Сложение матриц

*Суммой (разностью)* двух матриц одинаковой размерности $A$ и $B$ называется матрица $C$ такой же размерности, элементы которой равны суммам (разностям) соответствующих элементов матриц $A$ и $B$:

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}, \qquad i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

**Пример 1.6.1.** Вычислить $C = A + B$, если

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

**Решение**

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 1+(-3) & 2+0 & 3+1 \\ 4+2 & 5+(-3) & 6+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 6 & 2 & 10 \end{bmatrix}.$$

### 1.6.2. Умножение матрицы на число

*Произведением* матрицы $A$ на скаляр $\alpha$ называется матрица $C$, элементы которой равны элементам матрицы $A$, умноженным на число $\alpha$:

$$c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}, \qquad i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

**Пример 1.6.2.** Вычислить $C = \alpha \cdot A$, если

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix},\ \alpha = -2.$$

**Решение**

$$C = \alpha \cdot A = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -8 & 10 & -12 \end{bmatrix}.$$

### 1.6.3. Произведение матриц

*Произведением* матрицы $A_{m\times p}$ на матрицу $B_{p\times n}$ называется матрица $C_{m\times n}$, элементы $c_{ij}$ которой равны сумме произведений элементов $i^{й}$ строки матрицы $A$ на соответствующие элементы $j^{го}$ столбца матрицы $B$:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{ip} \cdot b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj}, \quad i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Произведение матриц $A \cdot B$ существует только в том случае, если число столбцов матрицы $A$ равно числу строк матрицы $B$. Размерность результирующей матрицы $C$ определяется внешними индексами матриц $A$ и $B$:

$$C_{m\times n}=A_{m\times p}\cdot B_{p\times j}\ \Leftrightarrow (m\times p)\cdot(p\times n)=(m\times n)\,.$$

**Пример 1.6.3.** Вычислить $C = A \cdot B$, если

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 3 & -2 & 2\end{bmatrix}.$$

**Решение**

Для определения размерности матрицы $C = A \cdot B$ выпишем размерности матриц $A$ и $B$:

$$(2\times 2)\cdot(2\times 3)=(2\times 3)\ .$$

Следовательно, $C_{2\times 3}$ и

$$C=A\cdot B=\begin{bmatrix}1\cdot 2+2\cdot 3 & 1\cdot 0+2\cdot(-2) & 1\cdot 1+2\cdot 2\\ 3\cdot 2+4\cdot 3 & 3\cdot 0+4\cdot(-2) & 3\cdot 1+4\cdot 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & -4 & 5\\ 18 & -2 & 2\end{bmatrix}.$$

Произведение матриц обладает следующими основными свойствами.

1. Произведение матриц в общем случае некоммутативно, т.е.

$$A\cdot B\neq B\cdot A\ .$$

Так, в приведенном выше примере произведение матриц $B \cdot A$ вообще не существует – внутренние индексы матриц $B$ и $A$ не совпадают.

2. Произведение матриц ассоциативно:

$$(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)\ .$$

3. Произведение матриц дистрибутивно:

$$(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C \quad \text{или}$$

$$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C\ \ .$$

4. Произведение матрицы $A$ на единичную матрицу $E$ соответствующей размерности совпадает с матрицей $A$:

$$A\cdot E=E\cdot A=A\ .$$

5. Произведение матрицы $A$ на нуль-матрицу является нуль-матрицей:

$$A\cdot O=O\ \ .$$

6. Определитель произведения двух квадратных матриц $A$ и $B$ равен произведению их определителей:

$$det(A\cdot B)=detA\cdot detB\ .$$

### 1.6.4. Транспонирование матриц

*Транспонированием* матриц называется операция замены строк столбцами.

При этом количество строк и столбцов в транспонированной матрице совпадает с количество столбцов и строк в исходной матрице. Матрица, полученная транспонированием матрицы $A_{m\times n}$, обозначается как $A'_{n\times m}$ или $A^{T}{}_{n\times m}$ .

**Пример 1.6.4.**

$$A_{2\times 3}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \end{bmatrix},\ A^T_{3\times 2}=\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 5 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}.$$

Операции транспонирования присущи следующие свойства.

1. $(A')'=A$ ;
2. $(A+B)'=A'+B'$ ;
3. $(A\cdot B)'=B'\cdot A'$ ;
4. $(\alpha\cdot A)'=\alpha\cdot A'$ ;
5. $\det A=\det A'$ .

### 1.6.5. Обращение матриц

Для произвольного числа $a$ (не равного нулю) существует обратное число $\frac{1}{a}\equiv a^{-1}$ такое, что их произведение равно единице:

$$a\cdot a^{-1}=1\ .$$

Оказывается это свойство характерно не только для чисел, но и для матриц. При этом условие $a\neq 0$ для матриц выглядит как $\det A\neq 0$ .

*Обратной* матрицей $A^{-1}$ для матрицы $A$ называется такая матрица, произведение которых является единичной матрицей:

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E\ .$$

Условие существования обратной матрицы определяется следующей теоремой.

**Теорема 1.6.5.** Для каждой невырожденной квадратной матрицы существует обратная матрица и притом только одна.

Математически эта теорема представляется как

$$\det A\neq 0\ .$$

Практическое вычисление обратной матрицы осуществляется в соответствии со следующей схемой.

1. Находим определитель исходной матрицы $\det A$ и делаем вывод о существовании для нее обратной матрицы, если $\det A\neq 0$ .
2. Для каждого элемента $a_{ij}$ исходной матрицы $A$ вычисляем его алгебраическое дополнение $A_{ij}$ .
3. Составляем из алгебраических дополнений $A_{ij}$ союзную матрицу $A^*$:

$$A^{*}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

4. Вычисляем присоединенную матрицу $\overline{A}\left(\hat{A};\check{A};\tilde{A}\right)$, транспонировав союзную $A^{*}$:

$$\overline{A}=\left(A^{*}\right)' .$$

5. Вычисляем обратную матрицу $A^{-1}$ делением всех элементов присоединенной матрицы $\overline{A}$ на число $detA$:

$$A^{-1}=\frac{1}{detA}\cdot\overline{A} .$$

**Пример 1.6.5.** Вычислить обратную матрицу $A^{-1}$ для матрицы

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} .$$

**Решение**

1. $$detA=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}=-(-4+3)=1\neq 0 .$$

2. $$A_{11}=\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-2 ; \quad A_{12}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-(2-6)=4 ; \quad A_{13}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=1 ;$$

$$A_{21}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-(2-1)=-1 ; \; A_{22}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=4-3=1 ; \; A_{23}=-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-(2-3)=1 ;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=2 ; \qquad A_{32}=-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-(4-1)=-3 ;$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1 .$$

3. $$A^{*}=\begin{bmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix} .$$

4. $$\overline{A}=\begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} .$$

5. $$A^{-1}=\frac{1}{detA}\cdot A^{*}=\begin{bmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix} .$$

Проверкой убеждаемся в правильности выполненных расчетов:

$$A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -2\cdot 2+4\cdot 1+1\cdot 3 & -2\cdot 1+4\cdot 0+1\cdot 1 & -2\cdot 1+4\cdot 2+1\cdot 2 \\ -1\cdot 2+1\cdot 1+1\cdot 3 & -1\cdot 1+1\cdot 0+1\cdot 1 & -1\cdot 1+1\cdot 2+1\cdot 2 \\ 2\cdot 2-3\cdot 1-1\cdot 3 & 2\cdot 1-3\cdot 0-1\cdot 1 & 2\cdot 1-3\cdot 2-1\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv E$$

### 1.6.6. Ранг матрицы

Пусть дана матрица ***A***:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} .$$

Рассмотрим последовательно в этой матрице миноры, начиная с низшего порядка, причем, к рассмотрению миноров более высокого порядка будем переходить только в том случае, когда среди миноров данного порядка найдем хотя бы один, отличный от нуля.

*Рангом* $\boldsymbol{r(A)}$ матрицы А называется максимальный порядок $\boldsymbol{r}$ отличных от нуля миноров этой матрицы:

$$\boldsymbol{r(A) = r} \quad .$$

Любой отличный от нуля минор порядка $\boldsymbol{r}$ называется *базисным минором*.

Таким образом, матрица может иметь несколько базисных миноров.

Строки и столбцы, входящие в состав базисного минора, называются *базисными* строками и столбцами.

Базисные строки и столбцы линейно независимы между собой.

Для базисных миноров справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.6.6.1.** Всякий столбец (строка) матрицы является линейной комбинацией ее базисных столбцов (строк).

<u>Следствие.</u> Ранг матрицы равен числу ее линейно независимых строк (столбцов).

Пусть матрица $A_{mn}$ имеет ранг $\boldsymbol{r}$ **,** т.е. $\boldsymbol{r(A) = r}$ . В этом случае базисный минор матрицы А будет иметь $\boldsymbol{r}$ столбцов.

Обозначим столбцы матрицы А таким образом:

$$\boldsymbol{A_1, A_2, \ldots, A_n} \quad ,$$

где $\boldsymbol{A_j} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{m1j} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{j = \overline{1,n}}$ .

Будем считать, без ограничения общности, что базисными будут первые ***r*** столбцов этой матрицы. Тогда матрицу А можно представить так:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \underbrace{A_1\ A_2\ \ldots\ A_r}_{\text{базисные столбцы}} & \underbrace{A_{r+1}\ \ldots\ A_n}_{\text{небазисные столбцы}} \end{bmatrix}.$$

В соответствии с теоремой о базисном миноре любой столбец этой матрицы может быть представлен в виде линейной комбинации базисных столбцов.

При этом базисные столбцы определяются с помощью *линейной* комбинации:

$$A_1 = 1 \cdot A_1 + 0 \cdot A_2 + \ldots + 0 \cdot A_r \ .$$

Для небазисных столбцов комбинация будет *линейной*:

$$A_j = \lambda_1 \cdot A_1 + \lambda_2 \cdot A_2 + \ldots + \lambda_r \cdot A_r \ , \ \ j = \overline{r+1, n} \ ,$$

Причем, среди коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ хотя бы один отличается от нуля.

При практическом вычислении рангов матриц сталкиваются с понятием *эквивалентных* матриц и *элементарных* преобразований.

*Эквивалентными* называются матрицы А и В, ранги которых совпадают, т.е. ***r(A) = r(B)***:

$$\text{A} \sim \text{B} \ .$$

*Элементарными преобразованиями* называются действия над матрицами, не изменяющие их ранг.

К таким действиям относятся:

1) транспонирование матрицы;
2) перестановка строк (столбцов);
3) вычеркивание нулевой строки (столбца);
4) умножение всех элементов строки (столбца) на не равный нулю множитель;
5) прибавление к элементам одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), предварительно умноженных на не равное нулю число.

Эквивалентность матриц определяется следующей теоремой.

**Теорема 1.6.6.2.** Если матрица А получена из матрицы В при помощи конечного числа элементарных преобразований, то эти матрицы эквивалентны:

$$\text{A} \sim \text{B} \ .$$

Для определения ранга матрицы применяются несколько методов.

1. *Метод окаймления*. Суть метода заключается в том, что мы последовательно рассматриваем миноры матрицы, начиная с минора низшего порядка. Переход к рассмотрению миноров более высокого порядка

осуществляется только в том случае, когда среди миноров данного порядка хотя бы один отличается от нуля, причем, минор более высокого порядка должен включать (окаймлять) этот не равный нулю минор. В соответствии с определением, ранг матрицы будет равен наивысшему порядку отличных от нуля миноров.

**Пример 1.6.6.1.** Найти ранг матрицы

**Решение**

Минимальный порядок минора для любой матрицы – первый: это сами элементы матрицы. Значит, ранг матрицы не меньше 1, если хотя бы один ее элемент отличается от нуля. В данной матрице в качестве минора первого порядка можно взять любой элемент. Выберем $a_{12}=2$:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{1} & (\boldsymbol{2}) & \boldsymbol{3} \\ -\boldsymbol{2} & -\boldsymbol{4} & -\boldsymbol{6} \\ \boldsymbol{5} & \boldsymbol{7} & \boldsymbol{9} \end{bmatrix} .$$

Миноров второго порядка, включающих этот минор первого порядка, т.е. $a_{12}$ , всего четыре ($M_{31}$; $M_{33}$; $M_{21}$; $M_{23}$ ), причем, хотя бы один из них, а именно $\boldsymbol{M_{23}}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{5} & \boldsymbol{7} \end{vmatrix}=-\boldsymbol{3}\neq\boldsymbol{0}$ **.** Следовательно, ранг матрицы А не может быть ниже 2. Минор $M_{23}$ окаймляет всего один минор более высокого – третьего порядка: определитель матрицы А. Нетрудно убедиться, что этот определитель равен нулю:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{3} \\ -\boldsymbol{2} & -\boldsymbol{4} & -\boldsymbol{6} \\ \boldsymbol{5} & \boldsymbol{7} & \boldsymbol{9} \end{vmatrix}\begin{matrix} \cdot\boldsymbol{2} \\ \\ \\ \end{matrix}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{3} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{5} & \boldsymbol{7} & \boldsymbol{9} \end{vmatrix}=\boldsymbol{0}$$ - по свойству 5.

А это означает, что ***r(A)=***2.

2. Метод основан на *следствии теоремы о базисном миноре*. Надо любым способом определить число линейно независимых строк (столбцов) матрицы. Это и будет ранг матрицы.

**Пример 1.6.6.2.** Найти ранг матрицы $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{3} \\ -\boldsymbol{2} & -\boldsymbol{4} & -\boldsymbol{6} \\ \boldsymbol{5} & \boldsymbol{7} & \boldsymbol{9} \end{bmatrix}$ **.**

**Решение**

Как отмечалось выше, вторая строка этой матрицы пропорциональна первой (коэффициент пропорциональности равен -2). Следовательно, у этой матрицы всего две (первая и третья) линейно независимые строки, а поэтому ***r(A)=***2.

Однако не всегда линейная зависимость строк (столбцов) матрицы столь очевидна, как в приведенном примере. Тогда линейно независимые строки определяются с помощью следующего метода.

3. *Приведение матрицы к трапециевидной форме*.

Матрица называется *трапециевидной*, если ее элементы, стоящие в главной диагонали, не равны нулю, а расположенные ниже главной диагонали обращаются в нуль.

Приведение матрицы к трапециевидной форме осуществляется с помощью элементарных преобразований.

Ранг матрицы равен числу строк трапециевидной матрицы.

**Пример 1.6.6.3.** Найти ранг матрицы $A=\begin{bmatrix} -4 & -3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 9 \\ -9 & -5 & -7 & 1 \end{bmatrix}$.

**Решение**

$$\begin{bmatrix} -4 & -3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 9 \\ -9 & -5 & -7 & 1 \end{bmatrix}_1 \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \\ 5 & 6 & 7 & 9 \\ -9 & -5 & -7 & 1 \end{bmatrix}_2 \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 10 & 15 \\ 0 & -4 & -8 & -11 \\ 0 & 13 & 20 & 37 \end{bmatrix}_3 \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 & -11 \\ 0 & 13 & 20 & 37 \end{bmatrix}_4 \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \end{bmatrix}_5 \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_6 .$$

Таким образом, $r(A)=4$.

Примечания: 1. Поменяли местами первую и вторую строки.

2. Добиваемся нулей ниже главной диагонали в первом столбце. Для этого элементы первой строки умножаем на определенный множитель и складываем с соответствующими элементами 2-4 строк. В качестве таких множителей для 2, 3 и 4 строк выступают числа 4, -5 и 9 соответственно.

3. Все элементы второй строки разделим на 5.

4. Добиваемся нулей ниже главной диагонали во втором столбце аналогично п.2. В качестве множителей для 3 и 4 строк выступают числа 4 и -13 соответственно.

5. Меняем местами третью и четверную строки.

6. Получившаяся матрица является трапециевидной. Считаем число ненулевых строк этой матрицы.

# 2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ (СЛАУ)

## 2.1. Основные понятия

Уравнение называется *линейным*, если оно содержит переменные в первой степени, причем, эти переменные не перемножаются между собой.

В общем виде система $m$ линейных уравнений с $n$ неизвестными выглядит так:

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n = b_1; \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n = b_2; \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \ldots + a_{mn}\cdot x_n = b_m. \end{cases} \tag{2.1}$$

Здесь числа $a_{ij}, i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}$ называются *коэффициентами* при переменных, $b_i, i=\overline{1,m}$ - *свободными членами*.

Совокупность $n$ чисел $k_1, k_2, \ldots, k_n$ называется *решением системы* (2.1), если при подстановке их вместо переменных во все уравнения системы последние обращаются в тождества.

СЛАУ называется *однородной,* если все свободные члены равны нулю, т.е. $b_i = 0,\ i=\overline{1,m}$ .

СЛАУ, не имеющая ни одного решения, называется *несовместной*, имеющая хотя бы одно решение – *совместной*. Совместная система, имеющая единственное решение, называется *определенной,* более одного решения – *неопределенной*.

Для решения СЛАУ могут быть использованы несколько методов. При этом каждый метод имеет свои ограничения по применимости.

## 2.2. Метод Крамера

Метод Крамера применим в том случае, если СЛАУ имеет размерность $n\times n$, т.е. число линейно независимых уравнений равно числу переменных.

**Правило Крамера**. Если определитель $\Delta$ матрицы системы, составленной из коэффициентов при переменных, отличен от нуля, то система имеет единственное решение, которое находится по формулам:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta},\ \ j=\overline{1,n}\ ,$$

где $\Delta_j$ - определитель, получаемый из $\Delta$ заменой $j^{\text{го}}$ столбца столбцом свободных членов.

**Пример_2.2.1.** Решить СЛАУ

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -2\ ; \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -8\ ; \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -13\ . \end{cases}$$

**Решение**

Для решения системы используем формулы Крамера, т.к. число уравнений и неизвестных совпадают.

Определяем совместность системы (т.е., по-сути, линейную независимость уравнений), вычислив определитель матрицы системы $\boldsymbol{\Delta}$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \\ 4 & 9 & -23 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 9 & -23 \end{vmatrix} = -23 + 54 = 31 \neq 0\ ;$$

$\times 2$ $\quad \times(-5)$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 5 \\ -8 & -3 & 4 \\ -13 & 1 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times 2 \\ \times 3 \\ \phantom{0} \end{matrix} = \begin{vmatrix} -28 & 0 & -1 \\ -47 & 0 & -5 \\ -13 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -28 & -1 \\ -47 & -5 \end{vmatrix} = -(140 - 47) = -93\ ;$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-93}{31} = 3\ ;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & -8 & 4 \\ 4 & -13 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -6 \\ 4 & -5 & -23 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -6 \\ -5 & -23 \end{vmatrix} = 92 - 30 = 62\ ;$$

$\times(-2)$ $\quad \times(-5)$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{62}{31} = 2\ ;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & -3 & -8 \\ 4 & 1 & -13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \\ 4 & 9 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 9 & -5 \end{vmatrix} = -5 + 36 = 31\ ;$$

$\times 2$ $\quad \times 2$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{31}{31} = 1\ .$$

Итак, СЛАУ имеет следующее решение:

$$\begin{cases} x_1 = -3\ ; \\ x_2 = 2\ ; \\ x_3 = 1\ . \end{cases}$$

Подстановкой найденных значений переменных во все уравнения заданной системы легко убедиться, что все эти уравнения обращаются в тождества:

$$\begin{cases} -3-2\cdot 2+5\cdot 1\equiv -2\ ; \\ 2\cdot(-3)-3\cdot 2+4\cdot 1\equiv -8\ ; \\ 4\cdot(-3)+2-3\cdot 1\equiv -13\ . \end{cases}$$

## 2.3. Матричный метод решения СЛАУ

Матричный метод, как и метод Крамера применим для решения систем размерностью $n\times n$.

Таким образом, нам надо решить СЛАУ:

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1+a_{12}\cdot x_2+\ldots+a_{1n}\cdot x_n=b_1\ ; \\ a_{21}\cdot x_1+a_{22}\cdot x_2+\ldots+a_{2n}\cdot x_n=b_2\ ; \\ \ldots \\ a_{n1}\cdot x_1+a_{n2}\cdot x_2+\ldots+a_{nn}\cdot x_n=b_n\ . \end{cases} \qquad (2.2)$$

Введем следующие обозначения:

$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$ - матрица, составленная из коэффициентов при переменных;

$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$ - матрица-столбец переменных;

$B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}$ - матрица-столбец свободных членов.

Тогда систему (2.2) можно представить в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}$$

или с учетом введенных обозначений:

$$A\cdot X=B \qquad (2.3)$$

Домножим матричное равенство (2.3) слева на матрицу $A^{-1}$:

$$A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B\ .$$

Учитывая, что $A^{-1}\cdot A=E$, $E\cdot X=X$, получим

$$X=A^{-1}\cdot B\ .$$

Таким образом, матраца неизвестных $X$ выражается через известные матрицы $A^{-1}$ и $B$ .

Для того, чтобы можно было применить для решения СЛАУ матричный метод, должна существовать обратная матрица $A^{-1}$. А это означает, что матрица $A$ должна быть невырожденной, т.е. $detA\neq 0$ .

**Пример 2.3.1.** Решить матричным методом СЛАУ

$$\begin{cases} x_1-2x_2+5x_3=-2\ ; \\ 2x_1-3x_2+4x_3=-8\ ; \\ 4x_1+x_2-3x_3=-13\ . \end{cases}$$

**Решение**

Выписываем матрицы:

$$A=\begin{bmatrix}1&-2&5\\2&-3&4\\4&1&-3\end{bmatrix};\quad X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}-2\\-8\\-13\end{bmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу $A^{-1}$ :

1. $det\,A=\begin{vmatrix}1&-2&5\\2&-3&4\\4&1&-3\end{vmatrix}=31\neq 0$ ;

2.

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-3&4\\1&-3\end{vmatrix}=9-4=5\ ;\ A_{12}=-\begin{vmatrix}2&4\\4&-3\end{vmatrix}=-(-6-16)=22\ ;\ A_{13}=\begin{vmatrix}2&-3\\4&1\end{vmatrix}=2+12=14\ ;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}-2&5\\1&-3\end{vmatrix}=-(6-5)=-1;\ A_{22}=\begin{vmatrix}1&5\\4&-3\end{vmatrix}=-3-20=-23;\ A_{23}=-\begin{vmatrix}1&-2\\4&1\end{vmatrix}=-(1+8)=-9;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}-2&5\\-3&4\end{vmatrix}=-8+15=7\ ;\ A_{32}=-\begin{vmatrix}1&5\\2&4\end{vmatrix}=-(4-10)=6\ ;\ A_{33}=\begin{vmatrix}1&-2\\2&-3\end{vmatrix}=-3+4=1\ .$$

3. $A^{*}=\begin{bmatrix}5&22&14\\-1&-23&-9\\7&6&1\end{bmatrix}$ ;

4. $\overline{A}=\begin{bmatrix}5&-1&7\\22&-23&6\\14&-9&1\end{bmatrix}$ ;

5. $A^{-1}=\dfrac{1}{31}\begin{bmatrix}5&-1&7\\22&-23&6\\14&-9&1\end{bmatrix}$ .

Тогда

$$X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{31}\begin{bmatrix}5&-1&7\\22&-23&6\\14&-9&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-2\\-8\\-13\end{bmatrix}=\frac{1}{31}\begin{bmatrix}5\cdot(-2)+(-1)\cdot(-8)+7\cdot(-13)\\22\cdot(-2)+(-23)\cdot(-8)+6\cdot(-13)\\145\cdot(-2)+(-9)\cdot(-8)+1\cdot(-13)\end{bmatrix}=\frac{1}{31}\begin{bmatrix}-93\\62\\31\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\2\\1\end{bmatrix}.$$

Итак, решением СЛАУ будет следующий набор переменных:

$$\begin{cases} x_1 = -3\ ; \\ x_2 = 2\ ; \\ x_3 = 1\ . \end{cases}$$

## 2.4. Матричный метод исключений Гаусса

Метод Гаусса является универсальным способом, который может быть применен для решения не только квадратных систем размерностью $n \times n$, но и для исследования систем общего вида размерностью $m \times n$.

Прежде чем рассматривать содержание данного метода, дадим понятие расширенной матрицы системы $\tilde{A}$ .

*Расширенной* матрицей $\tilde{A}$ называется матрица системы $A$ , дополненная столбцом свободных членов:

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right] .$$

Суть данного метода заключается в том, что на первом этапе, называемом прямым ходом преобразования Гаусса, расширенная матрица системы с помощью элементарных преобразований приводится к трапециевидной форме.

Затем на втором этапе, называемом обратным ходом преобразований Гаусса, из уравнения, соответствующего последней строке трапециевидной матрицы, находят переменную $x_n$ :

$$a_{nn}' \cdot x_n = b_n' \quad ;$$

$$x_n = \frac{b_n'}{a_{nn}'} \quad .$$

Здесь штрихи означают не производную, а то, что соответствующие коэффициенты имеют другое числовое значение по сравнению с аналогичными величинами в исходной матрице.

Далее, из уравнения, соответствующего предпоследней строке трапециевидной матрицы, с учетом уже найденного значения $x_n$, получают значение переменной $x_{n-1}$.

Алгоритм обратного хода преобразований Гаусса продолжается до тех пор, пока не будут найдены значения всех неизвестных.

**Пример 2.4.1.** Решить СЛАУ

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -2\ ; \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -8\ ; \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -13\ . \end{cases}$$

**Решение**

Составляем для указанной системы расширенную матрицу и с помощью элементарных преобразований приводим ее к трапециевидной форме:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & -2 \\ 2 & -3 & 4 & -8 \\ 4 & 1 & -3 & -13 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -6 & -4 \\ 0 & 9 & -23 & -5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 31 & 31 \end{array}\right].$$

Получившаяся трапециевидная матрица соответствует такой системе:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -2\ ; \\ \qquad x_2 - 6x_3 = -4\ ; \\ \qquad\quad 31x_3 = 31\ . \end{cases}$$

Из последнего уравнения, содержащего только одну переменную, получаем

$$x_3 = 1\ .$$

Из предпоследнего уравнения, с учетом уже найденного значения $x_3$ , вычисляем

$$x_2 - 6 \cdot 1 = -4\ ;$$
$$x_2 = 2\ .$$

Наконец, из первого уравнения найдем оставшуюся переменную $x_1$ :

$$x_1 - 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = -2\ ;$$
$$x_1 = -3\ .$$

Итак, решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = -3\ ; \\ x_2 = 2\ ; \\ x_3 = 1\ . \end{cases}$$

## 2.5. Исследование систем линейных алгебраических уравнений

До сих пор мы рассматривали различные методы решения СЛАУ размерностью $n \times n$. Однако не всегда число уравнений совпадает с числом переменных. Кроме того, не всегда уравнения системы являются линейно независимыми. Наконец, не всегда определитель матрицы системы отличен от нуля. И тогда встает вопрос – а имеет ли данная система решение, если да, то сколько – одно или множество. Ответ на эти вопросы и получается путем исследования СЛАУ.

Итак, сформулируем более четко основные задачи исследования СЛАУ и их последовательность решения.

1. Является ли заданная система совместной или нет.
2. Если система совместна, то сколько она имеет решений – одно или множество.
3. Если система определенная, то найти ее решение одним из изложенных ранее методов.
4. Если система неопределенная, то описать всю совокупность ее решений.

Рассмотрим СЛАУ размерностью $m \times n$ :

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 ; \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 ; \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n = b_m . \end{cases} \qquad (2.4)$$

Как отмечалось ранее, систему (2.4) можно представить в матричной форме:

$$A \cdot X = B \qquad (2.5)$$

$$x_1 \cdot A_1 + x_2 \cdot A_2 + \ldots + x_n \cdot A_n = B , \qquad (2.6)$$

где $$A_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \ldots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, \ j = \overline{1,n} \ .$$

Совместность (2.4 - 2.6) определяется с помощью теоремы Кронекера-Капелли.

**Теорема 2.5.1.** СЛАУ совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы системы равняется рангу матрицы системы:

$$r(A) = r(\tilde{A}) ,$$

причем, система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда

$$r(A) = r(\tilde{A}) = n .$$

**Доказательство**

1. *<u>Необходимость.</u>* Предположим, что система (2.4) совместна. Это означает, что она имеет хотя бы одно решение:

$$x_1 = \lambda_1 ; x_2 = \lambda_2 ; \ \ldots \ ; \ x_n = \lambda_n .$$

Подставив эти значения в (2.4 – 2.6), получим:

$$\lambda_1 \cdot A_1 + \lambda_2 \cdot A_2 + \ldots + \lambda_n \cdot A_n = B .$$

Это равенство означает, что матрица-столбец $\boldsymbol{B}$ является линейной комбинацией матриц-столбцов $A_1, A_2, \ldots, A_n$ . В соответствии с теоремой о базисном миноре матрица-столбец B будет небазисным столбцом, который с помощью элементарных преобразований может быть превращен в нуль-столбец и вычеркнут из расширенной матрицы системы $\tilde{A}$ без изменения ее ранга. При этом матрица $\tilde{A}$ превращается в матрицу $A$, т.е.

$$r(A)=r(\tilde{A}), \quad \text{ч.т.д.}$$

2. *Достаточность.* Предположим, что

$$r(A)=r(\tilde{A})=r .$$

В силу этого столбец $B$ не может быть базисным столбцом. Не нарушая общности, предположим, что базисными в матрицах $A$ и $\tilde{A}$ будут первые $r$ столбцов $A_1, A_2, \ldots, A_r$ . В соответствии с теоремой о базисном миноре матрицу-столбец $B$ можно представить в виде линейной комбинации базисных столбцов:

$$B=\lambda_1\cdot A_1+\lambda_2\cdot A_2+\ldots+\lambda_r\cdot A_r \; .$$

Очевидно, что последнее равенство может быть записано так

$$B=\lambda_1\cdot A_1+\lambda_2\cdot A_2+\ldots+\lambda_r\cdot A_r+0\cdot A_{r+1}\ldots+0\cdot A_n \; .$$

А это и означает, что рассматриваемая система совместна, т.к. она имеет по крайней мере одно решение

$$x_1=\lambda_1;\ x_2=\lambda_2;\ \ldots;\ x_r=\lambda_r;\ x_{r+1}=0;\ x_n=0, \quad \text{ч.т.д.}$$

Условие $r(A)=r(\tilde{A})=n$ означает, что в матрицах $A_{m\times n}$ и $\tilde{A}_{m\times(n+1)}$ линейно независимыми будут только $n$ строк, а оставшиеся $m$-$n$ строк являются линейно зависимыми и могут быть вычеркнуты. Определитель получившейся квадратной матрицы размерностью $n\times n$ не равен нулю (т.к. $r(A)=n$ ), а, следовательно, в соответствии с правилом Крамера, система имеет единственное решение, ч.т.д.

Если рассматриваемая система (2.4) совместна, причем, ранг ее матрицы $r$ меньше числа переменных $n$, т.е.

$$r(A)=r(\tilde{A})=r<n ,$$

то (2.4) будет иметь множество решений.

При этом $r$ переменных, стоящих при базисных матрицах-столбцах $A_j$ , $j=\overline{1,r}$ называются *базисными* переменными, а оставшиеся $n-r$ переменных называются *свободными* (*небазисными*). Свободные переменные не связаны между собой какими-либо условиями и им можно придавать произвольные значения.

В этом случае (2.4) после вычеркивания $m-r$ линейно зависимых уравнений можно записать в таком виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1r}x_r=b_1-a_{1,r+1}x_{r+1}-\ldots-a_{1n}x_n\ ; \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2r}x_r=b_2-a_{2,r+1}x_{r+1}-\ldots-a_{2n}x_n\ ; \\ \ldots \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\ldots+a_{rr}x_r=b_r-a_{r,r+1}x_{r+1}-\ldots-a_{rn}x_n\ . \end{cases} \tag{2.7}$$

Правые части системы (2.7) являются константами, зависящими от значений свободных переменных $x_{r+1}, \ldots, x_n$. Для каждого такого набора свободных переменных система (2.7) в соответствии с правилом Крамера имеет единственное решение. Т.к. самих наборов свободных переменных бесчисленное множество, то и система (2.7) будет иметь множество решений. При этом базисные неизвестные $x_1, \ldots, x_r$ определяются как функции свободных неизвестных $x_{r+1}, \ldots, x_n$.

**Пример 2.5.1.** Исследовать СЛАУ

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2; \\ 4x_1 \quad + x_3 - 3x_4 = 3; \\ \quad 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

**Решение**

В заданной системе число уравнений $m = 3$, число переменных $n = 4$.

Для определения совместности системы, определим ранг расширенной матрицы системы $\tilde{A}$ приведением ее к трапециевидной форме.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right].$$

Таким образом, $r(A) = r(\tilde{A}) = r = 2$, т.е. система совместна.

Так как $r = 2 < n = 4$, то система неопределенная. У нее будут 2 базисные переменные - $x_1$ и $x_2$, - и 2 свободные - $x_3$ и $x_4$.

Трапециевидной матрице соответствует система:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2; \\ -2x_2 + 3x_3 - x_4 = -1. \end{cases}$$

Отсюда базисные переменные определяются как

$$\begin{cases} x_1 = 1 - \dfrac{1}{2}x_2 + \dfrac{1}{2}x_3 + \dfrac{1}{2}x_4; \\ x_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}x_3 - \dfrac{1}{2}x_4. \end{cases}$$

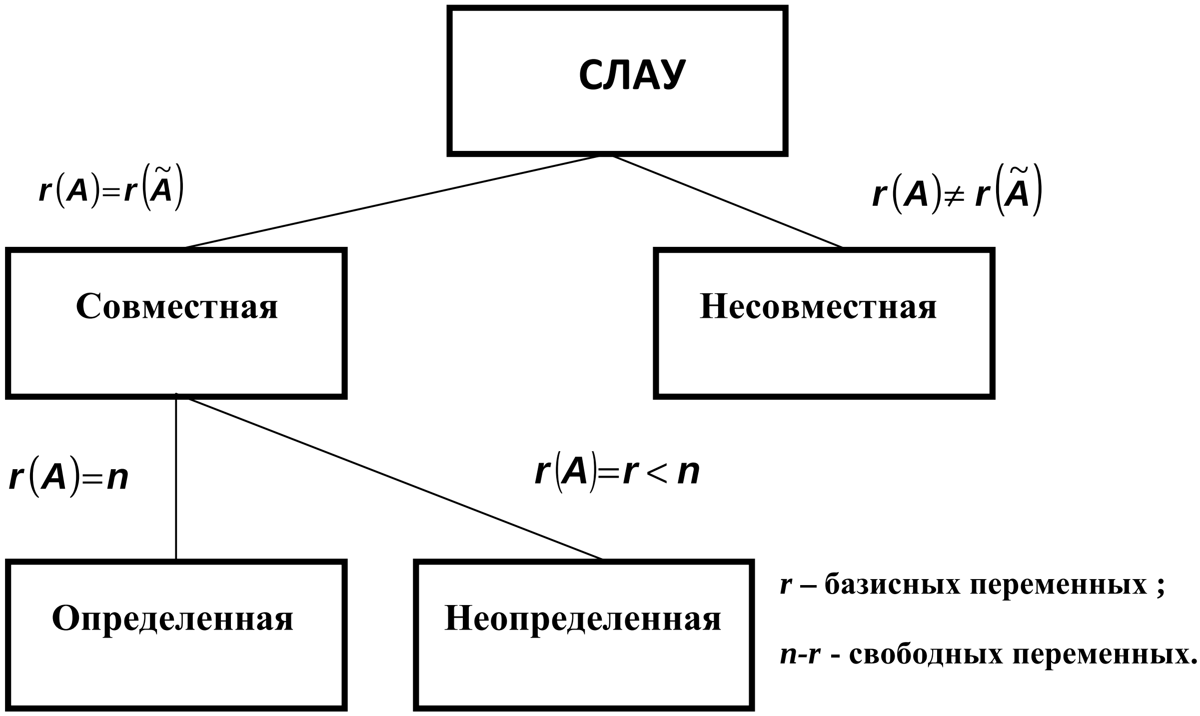
После подстановки $x_2$ в первое равенство, получим

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{4}x_3 + \dfrac{3}{4}x_4; \\ x_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}x_3 - \dfrac{1}{2}x_4. \end{cases}$$

Придавая свободным переменным произвольные числовые значения $x_3 = s$ и $x_4 = t$, получим бесчисленное множество решений исходной системы, описываемое матрицей-столбцом:

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{3}{4}-\frac{1}{4}s+\frac{3}{4}t \\ \frac{1}{2}+\frac{3}{2}s-\frac{1}{2}t \\ s \\ t \end{bmatrix}.$$

И в заключение рассматриваемого материала приведем схему, базирующуюся на теореме Кронекера-Капелли, которая наглядно демонстрирует классификацию систем линейных алгебраических уравнений и соответствующие ей критерии.



# 3. ЖОРДАНОВЫ ИСКЛЮЧЕНИЯ

## 3.1.Обыкновенные жордановы исключения

Как мы видели раньше, применение методов Крамера, матричного для решения СЛАУ имеет ограничение − этими методами решаются системы размерностью n×n.

Системы общего вида, состоящие из m уравнений с n неизвестными исследуются методом жордановых исключений.

Для ознакомления с сутью этого метода, рассмотрим систему m линейных форм с n независимыми переменными:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1s}x_s + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2s}x_s + \cdots + a_{2n}x_n \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{ms}x_s + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases} \qquad (3.1)$$

или в матричной форме:

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}. \qquad (3.2)$$

В системе (3.1) $x_j$, $j = \overline{1,n}$ называются независимыми переменными или аргументами, $y_i$, $i = \overline{1,m}$ зависимыми переменными.

Поменяем местами в заданной системе зависимую переменную $y_r$ и аргумент $x_s$, для которых $a_{rs} \neq 0$.

Для этого необходимо разрешить r-ю линейную форму относительно $x_s$ и подставить изученный результат во все остальные линейные формы.

Очевидно, что эта операция весьма трудоемка, громоздка. Для облегчения вычислений будем систему (3.1) записывать в виде таблицы:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Левый заглавный столбец | | $x_1$ | $x_2$ | $x_s$ | $x_n$ | Верхняя заглавная строка |
| | $y_1 =$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{1s}$ | $a_{1n}$ | |
| | $y_r =$ | $a_{r1}$ | $a_{r2}$ | $a_{rs}$ | $a_{rn}$ | |
| | $y_m =$ | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | $a_{ms}$ | $a_{mn}$ | |

(3.3)

Тогда шагом обыкновенного жорданового исключения (ОЖИ), произведенным над таблицей (3.3) с разрешающим элементом $a_{rs} \neq 0$ с r-й разрешающей строкой и s-м разрешающим столбцом, называется схематизированная операция перемены ролями между зависимой переменной $y_r$ и аргументом $x_s$, т.е. операция решения уравнения

$$y_r = a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rs}x_s + \cdots + a_{rn}x_n$$

относительно $x_s$, подстановки этого решения во все остальные равенства системы (3.1) и записи полученной системы в виде новой таблицы (3.3).

Один шаг ОЖИ осуществляется по следующей схеме, состоящей из пяти правил:

- разрешающий элемент $a_{rs}$ заменяется единицей;

- остальные элементы r-й разрешающей строки меняют свои знаки;

- остальные элементы s-го разрешающего столбца остаются без изменений;

- «обыкновенные» (рядовые) элементы $b_{ij}$, i≠r, j≠s, т.е. элементы не принадлежащие разрешающим строке или столбцу, вычисляются по формуле:

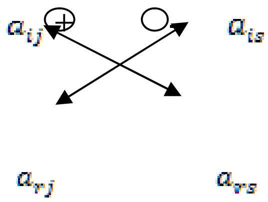
$$b_{ij} = a_{ij} \times a_{rs} - a_{is} \times a_{rj}, \qquad (3.4)$$

все элементы новой таблицы делятся на разрешающий элемент $a_{rs}$ .

Таким образом, новая жорданова таблица будет иметь вид:

$$\begin{array}{lcccc} & x_1 & x_2 & y_r & x_n \\ y_1 = & a_{11} & a_{12} & a_{1s} & a_{1n} \\ x_s = & a_{r1} & a_{r2} & a_{rs} & a_{rn} \\ y_m = & a_{m1} & a_{m2} & a_{ms} & a_{mn} \end{array} \qquad (3.5)$$

На практике при вычислении «обыкновенных» элементов таблицы по формуле (3.4) пользуются правилом прямоугольника:




Тогда преобразованный элемент $b_{ij}$ равен разности произведений элементов, расположенных на главной (содержащей разрешающий элемент $a_{rs}$) и побочной диагоналях.

Для сокращения расчетов следует пользоваться следующими соображениями:

Вычисления упрощаются, если в качестве разрешающего элемента выбрать ±1.

Если в разрешающей строке (столбце) есть нули, то соответствующий им столбец (строка) переписывается без изменений.

**Пример**. В системе $3^x$ линейных форм заменить зависимую переменную $y_1$ независимой переменной $x_3$:

$$\begin{cases} y_1 = 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 \\ y_2 = 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \\ y_3 = -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \end{cases}$$

## Решение

Сначала решим поставленную задачу алгебраическими методами.

$$\begin{cases} x_3 = -2x_1 + \frac{5}{2}x_2 + \frac{1}{2}y_1 \\ y_2 = 3x_1 + 2x_2 - 2(-2x_1 + \frac{5}{2}x_2 + \frac{1}{2}y_1) \\ y_3 = -2x_1 + 3x_2 + 4(-2x_1 + \frac{5}{2}x_2 + \frac{1}{2}y_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = -2x_1 + \frac{5}{2}x_2 + \frac{1}{2}y_1 \\ y_2 = 3x_1 + 2x_2 + 4x_1 - 5x_2 - y_1 \\ y_3 = -2x_1 + 3x_2 - 8x_1 + 10x_2 + 2y_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = -2x_1 + \frac{5}{2}x_2 + \frac{1}{2}y_1 \\ y_2 = 7x_1 - 3x_2 - y_1 \\ y_3 = -10x_1 + 13x_2 + 2y_1 \end{cases}$$

Теперь выполним эту же операцию с помощью одного шага ОЖИ:

$$\begin{array}{cccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 = & 4 & -5 & \boxed{2} \\ y_2 = & 3 & 2 & -2 \\ y_3 = & -2 & 3 & 4 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cccc} & x_1 & x_2 & y_1 \\ x_3 = & -4 & 5 & 1 \\ y_2 = & 14 & -6 & -2 \\ y_3 = & -20 & 26 & 4 \end{array} :2 \longrightarrow \begin{array}{cccc} & x_1 & x_2 & y_1 \\ x_3 = & -2 & 5/2 & 1/2 \\ y_2 = & 7 & -3 & -1 \\ y_3 = & -10 & 13 & 2 \end{array}$$

$b_{21} = 3 \cdot 2 - 4 \cdot (-2) = 14$

$b_{22} = 2 \cdot 2 - (-5) \cdot (-2) = -6$

$b_{31} = (-2) \cdot 2 - 4 \cdot 4 = -20$

$b_{32} = 3 \cdot 2 — 5 \cdot 4 = 26$

Полученная таблица соответствует системе линейных форм:

$$\begin{cases} x_3 = -2x_1 + \frac{5}{2}x_2 + \frac{1}{2}y_1 \\ y_2 = 7x_1 - 3x_2 - y_1 \\ y_3 = -10x_1 + 13x_2 + 2y_1 \end{cases}$$

Область применения алгоритма ОЖИ в линейной алгебре определяется теоремой Стейница.

**Теорема**. Если все линейные формы системы линейно независимы, причем m≤n, то произведя точно m шагов жордановых исключений, можно превратить все m зависимых переменных $y_1, y_2, \dots, y_m$ в независимые, т.е. перебросить их наверх таблицы.

**Доказательство**

Докажем теорему от противного.

Предположим, что из m линейно независимых линейных форм системы (3.1) на верх таблицы можно перебросить не все, а только s, например $y_1, y_2, \dots, y_s$ на место $x_1, x_2, \dots, x_s$. Это означает, что в строках линейных форм $y_{s+1}, y_{s+2}, \dots y_n$ под оставшимися наверху таблицы независимыми переменными $x_{s+1}, x_{s+2}, \dots x_n$ стоят нули, т.е. таблица имеет вид:

| | $y_1$ | $y_2$ | $y_s$ | $x_{s+1}$ | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1 =$ | $C_{11}$ | $C_{12}$ | $C_{1s}$ | $C_{1,s+1}$ | $C_{1n}$ |
| $x_2 =$ | $C_{21}$ | $C_{22}$ | $C_{2s}$ | $C_{2,s+1}$ | $C_{2n}$ |
| $x_s =$ | $C_{s2}$ | $C_{s2}$ | $C_{ss}$ | $C_{s,s+1}$ | $C_{sn}$ |
| $y_{s+1} =$ | $C_{s+1,1}$ | $C_{s+1,2}$ | $C_{s+1,s}$ | 0 | 0 |
| $y_m =$ | $C_{m1}$ | $C_{m2}$ | $C_{ms}$ | 0 | 0 |

(3.6)

Выпишем из таблицы линейные формы, не переброшенные наверх:

$$\begin{cases} y_{s+1} = C_{s+1,1} \cdot y_1 + C_{s+1,2} \cdot y_2 + \dots + C_{s+1,s} \cdot y_s \\ y_m - C_{m1} \cdot y_1 + C_{m2} \cdot y_2 + \dots + C_{ms} \cdot y_s \end{cases}$$

Получившаяся система означает, что линейные формы $y_{s+1}, y_{s+2}, \cdots y_m$ являются линейной комбинацией независимых переменных $y_1, y_2, \dots, y_s$, и, следовательно, эти линейные формы являются линейно зависимыми переменными, что противоречит условию теоремы. Значит, высказанное предположение неверно: наверх таблицы можно перебросить все m линейные формы, r т.д.

Как видно из доказательства теоремы Стейница, наверх таблицы могут быть переброшены только линейно независимые переменные $y_i$, а линейно зависимые линейные формы переброшены быть не могут.

Именно этот факт обусловливает следующие приложения жордановых исключений в линейной алгебре.

1. Вычисление ранга матрицы. Для этого на основании исследуемой матрицы А строят систему линейных форм Y=AX, а затем с помощью жордановых исключений перебрасывают на верх таблицы $y_i$, на место $x_j$ пока это возможно. Как известно, ранг матрицы равен числу её линейно независимых строк(столбцов).

С другой стороны, наверх таблицы могут быть переброшены только линейно независимые $y_i$. Следовательно, ранг матрицы равен числу переброшенных на верх таблицы линейных форм.

Кроме того, получившаяся таблица содержит коэффициенты линейной зависимости непереброшенных наверх таблицы переменных $y_i$ от переброшенных.

**Пример**. Вычислить ранг матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 3 \\ 7 & 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

**Решение**

Строим жорданову таблицу, а затем преобразуем её:

$$
\begin{array}{r|cccc}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\
y_1 = & \boxed{1} & 3 & 7 & 2 \\
y_2 = & 2 & 2 & 5 & 3 \\
y_3 = & 7 & 1 & 4 & 9
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{r|cccc}
 & y_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\
x_1 = & 1 & -3 & -7 & -2 \\
y_2 = & 2 & -4 & -9 & \boxed{-1} \\
y_3 = & 7 & -20 & -45 & -5
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|cccc}
 & y_1 & x_2 & x_3 & y_2 \\
x_1 = & 3 & -5 & -11 & -2 \\
\longrightarrow x_4 = & -2 & 4 & 9 & 1 \\
y_3 = & 3 & 0 & 0 & -5
\end{array}
\; : (-1)
$$

$$
\begin{array}{r|cccc}
 & y_1 & x_2 & x_3 & y_2 \\
y_1 = & -3 & 5 & 11 & 2 \\
\longrightarrow y_2 = & 2 & -4 & -9 & -1 \\
y_3 = & -3 & 0 & 0 & 5
\end{array}
$$

$y_3$ нельзя перебросить на верх таблицы на место оставшихся там независимых переменных $x_2$ , $x_3$ т. к. соответствующие разрешающие элементы равны нулю.

Следовательно, ранг матрицы A будет равен числу зависимых переменных $y$, переброшенных наверх таблицы, т. е.

***r(A)=2.***

В матрице A две линейно независимые строки, соответствующие линейным формам $y_1$и $y_2$ и одна линейно зависимая строка – $y_3$, – причем

$$y_3 = -3y_1 + 5y_2$$

2. Обращение матриц. Как известно, любая невырожденная квадратная матрица A имеет обратную матрицу A-1. Применение жордановых исключений для определения A-1 основано на следующих соображениях.

На основании заданной матрицы A размерностью n×n строят систему линейных форм

***Y=AX***

При умножении этой системы слева на A-1

A-1·Y=A-1·A·X

A-1·Y=E·X

A-1·Y=X

X= A-1·Y,

где $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$ упорядоченные матрицы-столбцы.

Таким образом, если при переброске зависимых переменных $y_i$ наверх таблицы в качестве разрешающих элементов использовать диагональные элементы, т.е. перебрасывать на место $x_i$, то получившаяся после всех преобразований матрица и будет обратной A-1.

Впрочем, A-1 может быть получена и в том случае, если в качестве разрешающих элементов использовать произвольные, а не только диагональные элементы. В этом случае после переброски наверх таблицы всех $y_i$ понадобится упорядочить по возрастанию индексов переменные $x_j$ и $y_i$. Получившаяся матрица и будет A-1 .

**Пример**. Найти обратную матрицу для

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

## Решение

Составляем жорданову таблицу и производим переброску $y_i$ наверх таблицы. В заданной матрице невозможно сразу перебросить $y_2$ вместо $x_2$ с помощью диагонального элемента $a_{22}$, т.к. он равен 0.

Поэтому в качестве разрешающих элементов будем выбирать произвольные исходя из соображений упрощения вычислений, а затем переменные $x_j$ и $y_i$ упорядочим по возрастанию индексов.

$$\begin{array}{cccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 = & 2 & \boxed{1} & 1 \\ y_2 = & 1 & 0 & 2 \\ y_3 = & 3 & 1 & 2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc} & x_1 & y_1 & x_3 \\ x_2 = & -2 & 1 & -1 \\ y_2 = & \boxed{1} & 0 & 2 \\ y_3 = & 1 & 1 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc} & y_2 & y_1 & x_3 \\ x_2 = & -2 & 1 & 3 \\ x_1 = & 1 & 0 & -2 \\ y_3 = & 1 & 1 & \boxed{-1} \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc} & y_2 & y_1 & y_3 \\ x_2 = & -1 & -4 & 3 \\ x_1 = & 1 & 2 & -2 \\ x_3 = & -1 & -1 & 1 \end{array} :(-1)$$

$$\rightarrow \begin{array}{cccc} & y_2 & y_1 & y_3 \\ x_2 = & 1 & 4 & -3 \\ x_1 = & -1 & -2 & 2 \\ x_3 = & 1 & 1 & -1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc} & y_2 & y_1 & y_3 \\ x_1 = & -1 & -2 & 2 \\ x_2 = & 1 & 4 & -3 \\ x_3 = & 1 & 1 & -1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc} & y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 = & -2 & -1 & 2 \\ x_2 = & 4 & 1 & -3 \\ x_3 = & 1 & 1 & -1 \end{array}$$

Итак,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Сделаем проверку

$$\mathrm{A} \cdot \mathrm{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4+4+1 & -2+1+1 & 4-3-1 \\ -2+0+2 & -1+0+2 & 2+0-2 \\ -6+4+2 & -3+1+2 & 6-3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.Исследование СЛАУ. Именно с помощью жордановых исключений можно провести исследование СЛАУ общего вида, т.е. размерностью m×n.

Пусть имеется СЛАУ общего вида

***A·X=B.***

Система линейных форм представляется в виде

***Y=A·X-B=0.***

После всех возможных перебросок наверх таблицы $y_i$ решение системы представляет собой линейные комбинации значений х в столбце свободных членов, также в столбцах аргументов х оставшихся наверху таблицы.

Если система имеет множество решений, то по преобразованной таблице определяем базисные и свободные линейные формы $y_i$, а также связь между ними.

**Пример**. Исследовать систему

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 6 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 4 \\ 7x_1 + x_2 + 4x_3 + 9x_4 = 2 \end{cases}.$$

**Решение**

Перенеся свободные члены в левые части уравнений, получим систему линейных форм:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 - 6 = 0 \\ y_2 = 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 - 4 = 0 \\ y_3 = 7x_1 + x_2 + 4x_3 + 9x_4 - 2 = 0 \end{cases}.$$

Составляем жорданову таблицу и перебрасываем зависимые переменные $y_i$ наверх таблицы:

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ = | $\boxed{1}$ | 3 | 7 | 2 | -6 |
| $y_2$ = | 2 | 2 | 5 | 3 | -4 |
| $y_3$ = | 7 | 1 | 4 | 9 | -2 |

$\rightarrow$

| | $y_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ = | 1 | -3 | -7 | -2 | 6 |
| $y_2$ = | 2 | -4 | -9 | $\boxed{-1}$ | 8 |
| $y_3$ = | 7 | -20 | -45 | -5 | 40 |

$\rightarrow$

| | $y_1 = 0$ | $x_2$ | $x_3$ | $y_2 = 0$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ = | -3 | 5 | 11 | 2 | -10 |
| $x_4$ = | 2 | -4 | -9 | -1 | 8 |
| $y_3$ = | -3 | 0 | 0 | 5 | 0 |

Линейную форму $y_s$ нельзя перебросить наверх таблицы вместо $x_2$ или $x_3$, т.к. соответствующие разрешающие элементы равны нулю. Следовательно, ранг матрицы системы линейных форм, совпадающих с числом переброшенных наверх таблицы $y_i$, равен 2: ***r(A)=2***.

Аналогично, $y_3$ нельзя перебросить наверх таблицы и в столбце свободных членов вместо 1.

Следовательно,

***r($\tilde{A}$)=2.***

Так как ***r(A)= r($\tilde{A}$)=r=2***, то система совместна.

Так как ***r=2*** < ***n=4***, то система имеет бесчисленное множество решений.

Так как ***r=2***, то двумя базисными переменными будут $x_j$, стоящие в первом заглавном столбце таблицы, т.е. $x_1$ и $x_4$. Свободными переменными будут значения xj, оставшиеся наверху таблицы, т.е. x2 и x3.

Базисные переменные выражаются через свободные:

$$\begin{cases} x_1 = 5x_2 + 11x_3 - 10 \\ x_4 = -4x_2 - 9x_3 + 8 \end{cases}.$$

Если свободным переменным придать произвольные значения x2=s, x3=t, то совокупность решений исходной системы будет описываться таким образом:

$$\begin{cases} x_1 = 5s + 11t - 10 \\ x_2 = s \\ x_3 = t \\ x_4 = -4s - 9t + 8 \end{cases}.$$

Придавая s и n конкретные значения, получим множество наборов $x_j$, $j = \overline{1,4}$, удовлетворяющих заданной системе.

Например,

x2=0 x3=0 x1=-10 x4=8

x2=1 x3=0 x1=-5 x4=4.

В системе имеется 2 базисных уравнения, соответствующих линейным формам y1 и y2, и одно независимое – y3, представляющие собой линейную комбинацию базисных:

y3=-3y1+5y2

Проверим правильность указанной линейной комбинации:

-3y1=-3x1-9x2-21x3-6x4+18

5y2=10x1+10x2+25x3+15x4-20

-3y1+5y2=7x1+x2+4x3+9x4-2≡y3.

Наконец, правильность полученного решения проверяется на базисных уравнениях:

$$\begin{cases} 5s+11t\cancel{-10}\cancel{+3s}+7t-\cancel{8s}-\cancel{18t}\cancel{+16}\cancel{=6}; \\ 10s+22t\cancel{-20}\cancel{+2s}+5t-\cancel{12s}\cancel{-27t}\cancel{+24}\cancel{=4}. \end{cases} \quad => \quad \begin{cases} 6\equiv 6; \\ 4\equiv 4. \end{cases}$$

Итак, общее решение заданной системы найдено верно.

## 3.2. Модифицированные жордановы исключения

В некоторых приложениях методики жордановых исключений, например, в симплекс-методе, необходимо, чтобы элементы разрешающей строки сохраняли свои знаки, а элементы разрешающего столбца меняли их на противоположные. В этих случаях вместо обыкновенных жордановых исключений (ОЖИ) применяют модифицированные жордановы исключения (МЖИ).

В этом случае систему линейных форм (3.1) представляют в виде:

$y_i=-a_{i1}(-x_1)-a_{i2}(-x_2)-\ldots-a_{in}(-x_n),\ i=\overline{1,m}.$

Наглядно разница применения ОЖИ и МЖИ представляется с помощью матричной формы записи СЛАУ.

| ОЖИ | МЖИ |
|---|---|
| $AX=B$ | $AX=B$ |
| $Y=AX-B=0$ | $Y=B-AX=0$ |
| $\begin{array}{ccc} & X & 1 \\ Y= & A & -B \end{array}$ | $\begin{array}{ccc} & 1 & -X \\ Y= & B & A \end{array}$ |

Тогда один шаг МЖИ осуществляется по такой схеме:

1) разрешающий элемент $a_{rs}$ заменяется единицей;
2) остальные элементы *r-й* разрешающей строки остаются без изменений;
3) остальные элементы *s-го* разрешающего столбца меняют свои знаки;

4) «обыкновенные» элементы $b_{ij}$, $i\neq r$, $j\neq s$, вычисляются по формуле:

$$b_{ij}=a_{ij}\cdot a_{rs}-a_{is}\cdot a_{rj};$$

5) все элементы новой таблицы делятся на разрешающий элемент $a_{rs}$.

**Пример**. Исследовать систему с помощью МЖ И

$$\begin{cases} x_1+x_2+3x_3-0 \\ x_1-4x_2-x_3=-6 \\ 2x_1+x_2+x_3=3 \\ 3x_1-x_2+2x_3=-1 \end{cases}$$

**Решение**

В заданной системе m=4, n=3.

На основании заданной системы составим систему линейных форм:

$$\begin{cases} y_1=0-(x_1+x_2+3x_3) \\ y_2=-6-(x_1-4x_2-x_3) \\ y_3-3-(2x_1+x_2+x_3) \\ y_4--1-(3x_1-x_2+2x_3) \end{cases}$$

Для этой системы составим жорданову таблицу и преобразуем её с помощью МЖИ:

$$\begin{array}{r|cccc} & -x_1 & -x_2 & -x_3 & 1 \\ y_1= & \boxed{1} & 1 & 3 & 0 \\ y_2= & 1 & -4 & -1 & -6 \\ y_3= & 2 & 1 & 1 & 3 \\ y_4= & 3 & -1 & 2 & -1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r|cccc} & -y_1 & -x_2 & -x_3 & 1 \\ x_1= & 1 & 1 & 3 & 0 \\ y_2= & -1 & -5 & -4 & -6 \\ y_3= & -2 & \boxed{-1} & -5 & 3 \\ y_4= & -3 & -4 & -7 & -1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r|cccc} & -y_1 & -y_3 & -x_3 & 1 \\ x_1= & 1 & -1 & 2 & -3 \\ y_2= & 9 & 5 & -21 & 21 \\ x_2= & -2 & 1 & -5 & 3 \\ y_4= & -5 & 4 & -13 & 13 \end{array} :(-1) \rightarrow$$

$$\begin{array}{r|cccc} & -y_1 & -y_3 & -x_3 & 1 \\ x_1= & -1 & 1 & -2 & 3 \\ y_2= & 9 & -5 & \boxed{21} & -21 \\ x_2= & 2 & -1 & 5 & -3 \\ y_4= & 5 & -4 & 13 & -13 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r|cccc} & -y_1 & -y_3 & -y_2 & 1 \\ x_1= & -3 & 11 & 2 & 21 \\ x_3= & 9 & -5 & 1 & -21 \\ x_2= & -3 & 4 & -5 & 42 \\ y_4= & -12 & -19 & -13 & 0 \end{array} (:21) \rightarrow \begin{array}{r|cccc} & -y_1=0 & -y_3=0 & -y_2=0 & 1 \\ x_1= & -3/21 & 11/21 & 2/21 & 1 \\ x_3= & 9/21 & -5/21 & 1/21 & -1 \\ x_2= & -3/21 & 4/21 & -5/21 & 2 \\ y_4= & -12/21 & -19/21 & -13/21 & 0 \end{array}$$

Зависимую переменную $y_4$ нельзя перебросить наверх таблицы вместо 1, т.к. разрешающий элемент равен 0.

Следовательно, r(A)=r($\hat{A}$)=r=3, т.е. система совместна.

Так как r = n, то система определена и её единственное решением возьмем из столбца свободных членов:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

Исходная система имеет 3 базисных уравнения – $y_1$, $y_2$ и $y_3$ и одно зависимое – $y_4$:

$$y_4 = \frac{12}{21}y_1 + \frac{13}{21}y_2 + \frac{19}{21}y_3$$

Проверку этого соотношения выполним в таком виде:

$$12y_1 = 0 - (12x_1 + 12x_2 + 36x_3)$$

$$13y_2 = -78 - (13x_1 - 52x_2 - 13x_3)$$

$$19y_3 = 57 - (38x_1 + 19x_2 + 19x_3)$$

$$12y_1 + 13y_2 + 19y_3 = -21 - (63x_1 - 21x_2 + 42x_3) = 21y_4$$

Проверим полученные решения с помощью базисных уравнений:

$$\begin{cases} 1 + 2 - 3 = 0 \\ 1 - 8 + 1 = -6 \\ 2 + 2 - 1 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \equiv 0 \\ -6 \equiv -6 \\ 3 \equiv 3 \end{cases}$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Воеводин В.В. Линейная алгебра. – М.: Наука, 1980.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. – М.: Наука, 1978.
3. Калихман И.Л. Линейная алгебра и программирование. – М.: Высшая школа, 1967.
4. Карпелевич Ф.И., СадовскийЛ.Е. Элементы линейной алгебры. – М.: Наука, 1967.
5. Зуховицкий С.И., Авдеева Л.И. Линейное программирование. – М.: Наука, 1967.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Бартенев Георгий Михайлович
Дук Александр Николаевич
Ткаченко Елена Георгиевна
Толстой Виктор Владимирович
Целуйко Наталья Васильевна

# ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

## Раздел “Линейная алгебра”

## Часть 4

Конспект лекций

Тем. план 2011, поз. 216

Подписано к печати 04.04.2011.Формат 60х84 1/16. Бумага типогр. Печать плоская.
Уч.- изд. л. 2,52. Усл. печ. л. 2,50. Тираж 100 экз. Заказ №

Национальная металлургическая академия Украины
49600, г. Днепропетровск- 5, пр. Гагарина, 4

Редакционно-издательский отдел НМетАУ