**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ**
**НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ**

**Г.Г. ШВАЧИЧ, В.С. КОНОВАЛЕНКОВ, Т.М. ЗАБОРОВА**

# ОЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ. НЕВЛАСТИВІ ІНТЕГРАЛИ

**Затверджено на засіданні Вченої ради академії**
**як навчальний посібник. Протокол № 1 від 30.01.2012**

**Дніпропетровськ НМетАУ 2012**

УДК 517.3

Швачич Г.Г., Коноваленков В.С., Заборова Т.М. Означений інтеграл та його застосування. Невластиві інтеграли: Навч. посібник. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2012. – 43 с.

Містить теоретичні відомості про означені та невластиві інтеграли. Розглянута велика кількість прикладів, у тому числі на застосування цих інтегралів до розв'язання прикладних задач.

Наведено завдання для самостійного розв'язання.

Призначений для студентів економічних спеціальностей.

Іл. 18. Бібліогр.: 7 найм.

Друкується за авторською редакцією.

Відповідальний за випуск Г. Г. Швачич, канд. техн. наук, проф.

Рецензенти: Ю.Н. Головко, канд. фіз.-мат.наук, доц. (НГУ)
В.П. Пошивалов, д-р техн. наук, проф. (ІТМ АН України)

## ЗМІСТ

# 1. ОЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

## 1.1. Означений інтеграл. Теорема про існування означеного інтеграла

Потужним засобом дослідження у математиці, фізиці, механіці та інших дисциплінах є *означений інтеграл* – одне з основних понять математичного аналізу.

Обчислення площ, обмежених кривими, довжини дуг, об'ємів, роботи, швидкості, шляху, моменту інерції і т. ін. зводиться до обчислення означеного інтеграла.

Нехай на відрізку $[a,b]$ задана неперервна функція $y = f(x)$. Поділимо відрізок на $n$ частин точками $a = x_0,\ x_2, ..., x_{n-1},\ x_n = b,$ причому, $x_0 < x_1 < ... < x_n$.

Покладемо $x_1 - x_0 = \Delta x_1,\ x_2 - x_1 = \Delta x_2, ..., x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$ (рис. 1.1).

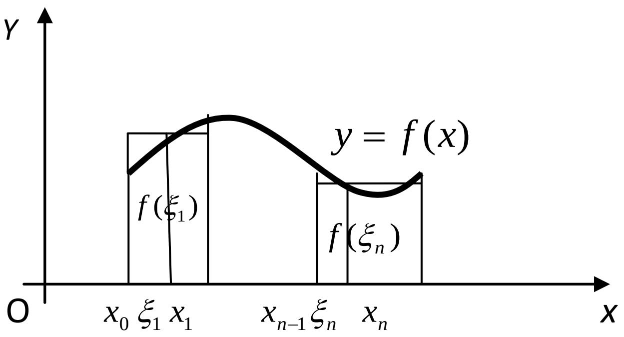



Рис. 1.1

На кожному з відрізків $[x_0, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_{n-1}, x_n]$ візьмемо по точці, які позначимо $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$. $(x_0 < \xi_1 < x_1,\ x_1 < \xi_2 < x_2, ..., x_{n-1} < \xi_n < x_n)$. У кожній з цих точок обчислимо значення функції $f(\xi_1), f(\xi_2), ..., f(\xi_n)$. Складемо суму

$$s_n = f(\xi_1)\cdot\Delta x_1 + f(\xi_2)\cdot\Delta x_2 + ... + f(\xi_n)\cdot\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i. \qquad (1.1)$$

Ця сума називається *інтегральною сумою* для функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$. Розглянемо деяку послідовність розбиттів цього відрізка, при яких $\max\Delta x_i \to 0$ при $n\to\infty$. Припустимо, що послідовність сум вигляду (1.1) при цьому прямує до деякої границі $\lim\limits_{\Delta x_i \to 0} s_n = \lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = s.$

*Визначення 1.* Якщо при будь-яких розбиттях відрізка $[a,b]$, таких, що $\max \Delta x_i \to 0$ при будь-якому виборі точок $\xi_i$ на відрізках $[x_{i-1}, x_s]$ інтегральна сума $s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ прямує до однієї й теж границі, то ця границя називається **означеним інтегралом** від функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ і позначається так: $\int\limits_a^b f(x)dx.$

Таким чином, $$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx. \qquad (1.2)$$

Число $a$ називається нижньою границею інтеграла, $b$ - верхньою границею інтеграла. Відрізок $[a,b]$ називається відрізком інтегрування, $x$ - змінною інтегрування.

*Визначення 2.* Якщо для функції $f(x)$ границя (1.2) існує, то функцію $f(x)$ називають інтегрованою на відрізку $[a,b]$.

Якщо побудувати графік підінтегральної функції $y = f(x)$, то у випадку $f(x) \geq 0$ інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ буде дорівнювати площі, так званої, криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y = f(x)$, прямими $x = a,\ x = b$ та віссю $Ox$ (рис. 1.2).

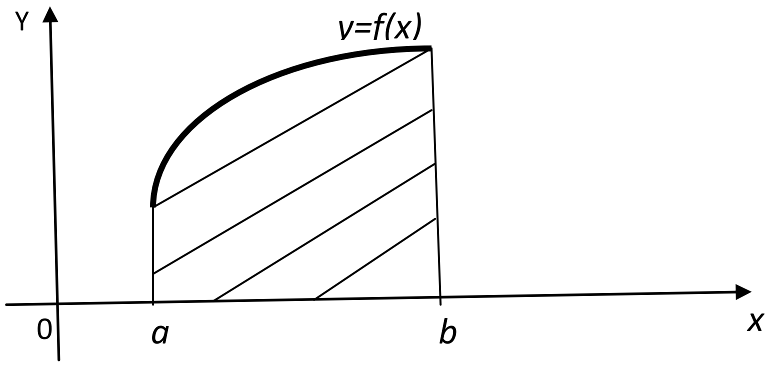



Рис. 1.2

Тому, якщо треба обчислити площу *криволінійної трапеції*, обмеженої кривою $y = f(x) \geq 0$, прямими $x = a, x = b$ та віссю $Ox$,то ця площа $Q$ обчислюється за допомогою інтеграла

$$Q = \int_a^b f(x)dx .$$

***Теорема 1.*** Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то вона інтегрована на цьому відрізку.

*Зауваження 1.* Означений інтеграл залежить лише від вигляду функції $f(x)$ та границь інтегрування, а не від змінної інтегрування, яку можна позначити будь-якою буквою

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz .$$

*Зауваження 2.* При введенні поняття означеного інтеграла ми припускали, що $a < b$. У випадку $b < a$ приймемо за визначенням

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx .$$

*Зауваження 3.* У випадку $a = b$ для будь-якої функції $f(x)$ за визначенням

$$\int_a^b f(x)dx = 0.$$

Останнє природно з геометричної точки зору. Якщо основа криволінійної трапеції має довжину, що дорівнює нулю, то площа цієї криволінійної трапеції дорівнює нулю.

### 1.2. Основні властивості означеного інтеграла

*Властивість 1.* Сталий множник можна виносити за знак означеного інтеграла: якщо $A = const$, то $\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx$ (1.3)

*Властивість 2.* Означений інтеграл від алгебраїчної суми декількох функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів. Наприклад,

$$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx. \qquad (1.4)$$

*Властивість 3*. Якщо на відрізку $[a, b]$, де $a > b$, функції $f(x)$ та $\varphi(x)$ задовольняють умові $f(x) \le \varphi(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx. \qquad (1.5)$$

*Властивість 4*. Якщо $m$ і $M$ - найменше та найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$, де $a \le b$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a). \qquad (1.6)$$

*Властивість 5* (**Теорема про середнє**). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то на цьому відрізку знайдеться така точка $\xi$, що справедлива наступна рівність

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi). \qquad (1.7)$$

*Властивість 6*. Для будь-яких трьох чисел $a, b, c$ справедлива рівність

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \qquad (1.8)$$

якщо тільки усі ці три інтеграли існують. Розглянемо приклади.

***Приклад 1.*** Обчислити $\int_a^b e^x dx.$

$$x_0 = a,\ x_1 = a + \Delta x,\ ...,\ x_n = a + n\Delta x,\ \Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

У якості точок $\xi_i$ оберемо ліві крайні точки. Складемо інтегральну суму:

$$s_n = e^a \cdot \Delta x + e^{a+\Delta x} \cdot \Delta x + ... + e^{a+(n-1)\Delta x} = e^a\left(1 + e^{\Delta x} + e^{2\Delta x} + ... + e^{(n-1)\Delta x}\right) \cdot \Delta x.$$

Вираз у дужках є геометрична прогресія із знаменником $e^{\Delta x}$,перший член якої дорівнює 1, тому

$$s_n = e^a \frac{e^{n\Delta x} - 1}{e^{\Delta x} - 1} \cdot \Delta x = e^a \left(e^{n\Delta x} - 1\right) \frac{\Delta x}{e^{\Delta x} - 1}.$$

Далі маємо $n\Delta x = b - a, \ \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{e^{\Delta x} - 1} = 1.$

(За правилом Лопіталя, $\lim\limits_{z \to 0} \frac{z}{e^z - 1} = = \lim\limits_{z \to 0} \frac{1}{e^z} = 1$). Таким чином,

$\lim\limits_{n \to \infty} s_n = Q = e^a \cdot \left(e^{b-a} - 1\right) \cdot 1 = e^b - e^a$, тобто $\int\limits_a^b e^x dx = e^b - e^a$.

*Зауваження.* Наведений приклад показує, що безпосереднє обчислення означеного інтеграла як границі інтегральної суми пов'язане із громіздкими діями, незважаючи на досить просту функцію. Тому природно знайти більш практичний метод обчислення означеного інтеграла. Такий метод існує (він використовує зв'язок між інтегруванням та диференціюванням) і буде розглядатись у наступних розділах даного посібника.

## 2. ОБЧИСЛЕННЯ ОЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА. ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНІЦА

Нехай у означеному інтегралі $\int\limits_a^b f(x)dx$ нижня границя зафіксована, а верхня – змінюється. Тоді буде змінюватися і значення інтеграла, тобто інтеграл є функцією верхньої границі. Позначимо верхню границю через $x$, а змінну інтегрування будемо позначати через $t$ (вище підкреслювалось, що значення інтеграла не залежать від позначення змінної інтегрування).

При сталому $a$ цей інтеграл буде функцією верхньої границі

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt. \qquad (2.1)$$

Якщо $f(x)$ неперервна функція, то величина $\Phi(x)$ дорівнює площі криволінійної трапеції $a\,A\,X\,x$(рис. 2.1). Очевидно, що ця площа змінюється у залежності від зміни $x$.

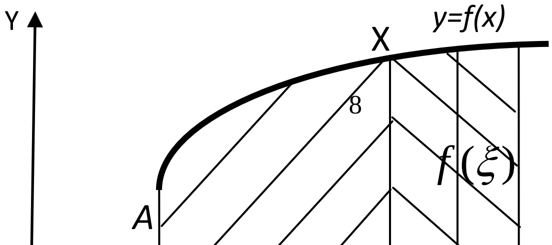


Рис. 2.1

Знайдемо похідну від $\Phi(x)$ по $x$, тобто знайдемо похідну означеного інтеграла (2.1) по верхній границі.

**Теорема 1.** Якщо $f(x)$ - неперервна функція і $\Phi(x)=\int_a^x f(x)dx$, то має місце рівність $\Phi'(x)=f(x)$.

Іншими словами, *похідна від означеного інтеграла по верхній границі дорівнює підінтегральній функції, у яку замість змінної інтегрування підставлено значення верхньої границі.*

***Доведення.*** Нехай $\Delta x$ - додатній або від'ємний приріст $x$. Тоді, використовуючи *властивість 6* , маємо

$\Phi(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$. Приріст функції $\Phi(x)$ дорівнює

$\Delta\Phi(x)=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$. Застосуємо до останнього інтеграла теорему про середнє (*властивість 5)*. Тоді

$\Delta\Phi(x)=f(\xi)(x+\Delta x-x)=f(\xi)\Delta x$, де $\xi$ міститься між $x$ та $x+\Delta x$. Розглянемо відношення приросту функції до приросту аргументу. Маємо

$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x}=f(\xi)$. Таким чином, $\Phi'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(\xi)$. Але $\xi\to x$ при $\Delta x\to 0$.

Тому, враховуючи неперервність функції $f(x)$, одержуємо

$\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(\xi)=\lim\limits_{\xi\to x} f(\xi)=f(x)$. Тобто $\Phi'(x)=f(x)$. Теорема доведена.

Дана теорема має просту геометричну інтерпретацію (рис. 2.1): приріст $\Delta\Phi = f(x)\Delta x$ дорівнює площі криволінійної трапеції з основою $\Delta x$, а похідна $\Phi'(x) = f(x)$ дорівнює довжині відрізка $xX$.

*Зауваження.* З доведеної теореми випливає, що *будь-яка неперервна функція має первісну.* Дійсно, якщо функція $f(t)$ неперервна на відрізку $[a, x]$, то означений інтеграл $\int_a^x f(t)dt$ існує, тобто існує функція $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt.$ Але, за доведеним, вона є первісною від $f(x).$

**Теорема 2.** Якщо $F(x)$ є будь-яка первісна від неперервної функції $f(x),$ то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{2.2}$$

Ця формула називається *формулою Ньютона-Лейбніца*.

***Доведення.*** Нехай $F(x)$ є деяка первісна від функції $f(x).$ За теоремою 1 функція $\int_a^x f(t)dt$ також є первісною від функції $f(x).$ Але будь-які первісні від даної функції відрізняються між собою лише довільною сталою $C^*$. Тобто, можна написати

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C^*. \tag{2.3}$$

Ця рівність при відповідному виборі $C^*$ справедлива для всіх значень $x$, тобто є тотожністю. Для знаходження сталої $C^*$ покладемо у цій тотожності $x = a$, тоді $\int_a^a f(t)dt = F(a) + C^*$, або $0 = F(a) + C^*$, $C^* = -F(a)$.

Таким чином, $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$. Поклавши в останній формулі $x = b$, одержимо формулу *Ньютона-Лейбніца*: $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$,

або , замінюючи позначення змінної інтегрування на $x$,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \qquad (2.4)$$

Можна ввести позначення $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$, тоді формула остаточно набуває вигляду:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \text{ де } \quad F'(x) = f(x).$$

Формула *Ньютона-Лейбніца* дає простий та практичний метод обчислення означеного інтеграла у тому випадку, коли відома первісна підінтегральної функції . Лише з відкриттям цієї формули означений інтеграл набув те значення у математиці, яке він має зараз. Із процесом, аналогічним обчисленню означеного інтеграла  як границі інтегральної суми, були знайомі ще у стародавні часи (Архімед), але застосування цього методу обмежувалось найпростішими випадками, коли границю інтегральної сумі можна було знайти безпосередньо. Формула *Ньютона-Лейбніца* значно розширила область застосування означеного інтеграла, тому що математика одержала загальний метод розв’язування різноманітних задач з фізиці, техніці, астрономії  тощо.

***Приклад 2***. $\int_a^b xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2}.$

***Приклад 3***. $\int_a^b x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3}.$

***Приклад 4***. $\int_a^b x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_a^b = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} \qquad (n \neq -1).$

***Приклад 5***. $\int_a^b e^x dx = e^x\Big|_a^b = e^b - e^a.$

***Приклад 6.*** $\int_0^{2\pi} \sin xdx = -\cos x\Big|_0^{2\pi} = -(\cos 2\pi - \cos 0) = 0.$

***Приклад 7***. $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2}\Big|_0^1 = \sqrt{2} - 1.$

На відміну від невизначеного інтеграла, при находженні якого будується первісна, при роботі з означеним інтегралом результат буде доводитись до числа, тому говорять, що означений інтеграл *обчислюється,* а неозначений – *знаходиться.*

## 3. ЗАМІНА ЗМІННОЇ У ОЗНАЧЕНОМУ ІНТЕГРАЛІ

**Теорема 3.** Нехай дано інтеграл $\int_a^b f(x)dx$, де $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$.

Введемо нову змінну $t$ за формулою $x = \varphi(t)$. Якщо

1) $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b,$
2) $\varphi(t)$ і $\varphi'(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha, \beta]$,
3) $f[\varphi(t)]$ визначена та неперервна на відрізку $[\alpha, \beta]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)dt. \qquad (3.1)$$

Таким чином, при заміні змінної у означеному інтегралі виконуємо наступні дії: змінюємо змінну інтегрування, змінюємо диференціал $dx$, змінюємо границі інтегрування, використовуючи зв'язок між новою та старою змінними інтегрування. При обчисленні інтеграла за формулою (3.1) ми **не повертаємось до старої змінної** . Розглянемо приклад.

***Приклад 8***. Обчислити інтеграл $\int_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}dx.$

Вводимо заміну: $x - 2 = z^3; dx = 3z^2dz, z = \sqrt[3]{x-2},$

$z_1 = 1$ (нижню границю інтегрування одержимо при підстановці у вираз $x - 2 = z^3$ значення нижньої границі інтегрування $x = 3$: $z_1 = \sqrt[3]{3-2}$), $z_2 = 3$

(верхня границя інтегрування $z_2 = \sqrt[3]{29-2}$).

Одержуємо інтеграл: $\int_1^3 \frac{z^2}{3+z^2} \cdot 3z^2dz = 3\int_1^3 \frac{(z^4-9)+9}{z^2+3}dz =$

$$= 3\int_1^3 \left(z^2 - 3 + \frac{9}{z^2+3}\right)dz = 3\left(\frac{z^2}{3} - 3z + \frac{9}{\sqrt{3}} arctg\frac{z}{\sqrt{3}}\right)\Big|_1^3 =$$

$$=3\left(9-9+\frac{9}{\sqrt{3}}arctg\sqrt{3}-\frac{1}{3}+3-\frac{9}{\sqrt{3}}arctg\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=$$

$$=3\left(2\frac{2}{3}+\frac{9}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6}\right)=8+\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi.$$

***Приклад 9.*** Обчислити інтеграл $\int\limits_0^r \sqrt{r^2-x^2}dx$.

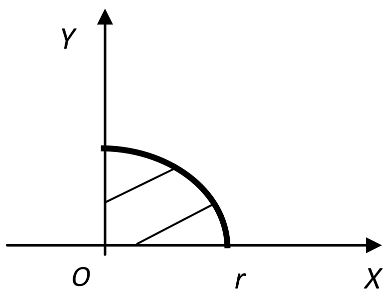
Введемо заміну: $x=r\sin t,\ dx=r\cos tdt.$

Нові границі: $x=0$ *при* $t=0,\ x=r$ *при* $t=\frac{\pi}{2}.$

Таким чином, маємо

$$\int\limits_0^r \sqrt{r^2-x^2}dx=\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{r^2-r^2\sin^2 t}\cdot\cos tdt=r^2\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2 t}\cos tdt=$$

$$=r^2\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2 tdt=r^2\int\limits_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt=r^2\left[\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\pi/2}=\frac{\pi r^2}{4}.$$




Останій інтеграл з геометричної точки зору є площа чверті круга, обмеженого колом $x^2+y^2=r^2$ (рис. 3.1).

Рис. 3.1

## 4. ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ У ОЗНАЧЕНОМУ ІНТЕГРАЛІ

Нехай $u$ та $v$ - диференційовані функції від $x$. Тоді $(uv)'=u'v+uv'.$

Інтегруючи обидві частини цієї тотожності у границях від $a$ до $b$, одержимо

$$\int\limits_a^b (uv)'dx=\int\limits_a^b u'vdx+\int\limits_a^b uv'dx. \qquad (4.1)$$

Оскільки $\int (uv)'dx = uv + C,$ то $\int\limits_a^b (uv)'dx = uv\Big|_a^b,$ тому рівність (4.1) можна переписати у вигляді $uv\Big|_a^b = \int\limits_a^b vdu + \int\limits_a^b udv,$ або остаточно $\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu$.

**Слід пам'ятати, що за $u$ приймається функція, яка спрощується при диференціюванні, а за $dv$ – вираз, неозначений інтеграл якого можна знайти.** Розглянемо приклади.

***Приклад 10.*** Обчислити інтеграл

$$\int\limits_0^1 x \cdot e^{-x} dx = \left\{ \begin{matrix} u = x, & dv = e^x dx, \\ du = dx, & v = -e^{-x} \end{matrix} \right\} = -x \cdot e^{-x} \Big|_0^1 + \int\limits_0^1 e^{-x} dx =$$

$$= -e^{-1} - e^{-x} \Big|_0^1 = 1 - 2 \cdot e^{-1}.$$

***Приклад 11***. Обчислити інтеграл $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\sin^2 x}$. Знову використовуємо формулу інтегрування частинами. Одержимо

$$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\sin^2 x} = \left\{ \begin{matrix} u = x, & dv = \dfrac{dx}{\sin^2 x}, \\ du = dx, & v = -ctg\, x \end{matrix} \right\} = -x \cdot ctg\, x \Big|_{\pi/4}^{\pi/3} + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} ctgx\, dx = -\left( \frac{\pi}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{4} \right) +$$

$$+ \ln|\sin x|\Big|_{\pi/4}^{\pi/3} = \frac{\pi\left(9 - 4\sqrt{3}\right)}{36} + \ln\frac{\sqrt{3}}{2} - \ln\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi\left(9 - 4\sqrt{3}\right)}{36} + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

***Приклад 12***. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{e-1} \ln(x+1)\, dx$. Маємо $\int\limits_0^{e-1} \ln(x+1)\, dx =$

$$= \left\{ \begin{matrix} u = \ln(x+1), & dv = dx, \\ du = \dfrac{dx}{x+1}, & v = x \end{matrix} \right\} = x \cdot \ln\left(x+1\right)\Big|_0^{e-1} - \int\limits_0^{e-1} \frac{xdx}{x+1} = e - 1 -$$

$$- \int\limits_0^{e-1} \frac{(x+1) - 1}{x+1} dx = e - 1 - \int\limits_0^{e-1} \left( 1 - \frac{1}{x+1} dx \right) = e - 1 - \left(x - \ln|x+1|\right)\Big|_0^{e-1} = 1.$$

## 5. НЕВЛАСТИВІ ІНТЕГРАЛИ

### 5.1. Невластиві інтеграли з нескінченними границями

Нехай функція $f(x)$ визначена та неперервна при всіх значеннях $x$, таких, що $a \le x < \infty$. Розглянемо інтеграл $I(b) = \int_a^b f(x)dx.$ Цей інтеграл існує (має сенс) при будь-яких $b > a.$ При зміненні $b$ інтеграл змінюється, він є неперервна функція $b$. Розглянемо питання про поведінку цього інтеграла при $b \to \infty$ (рис. 5.1).

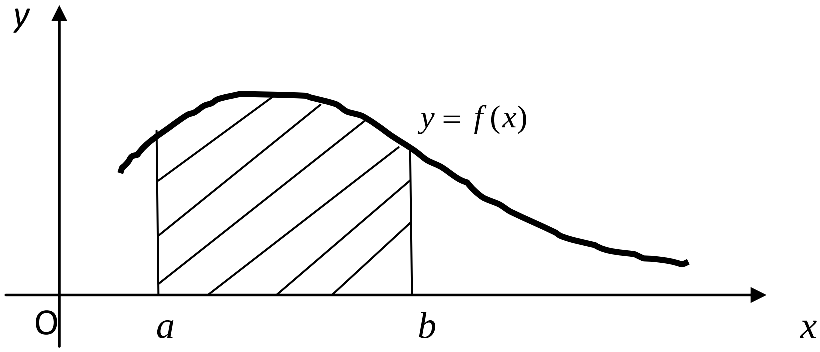
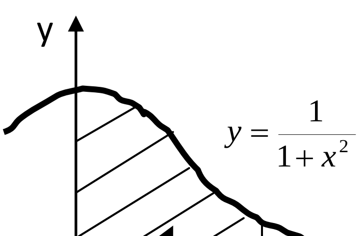



Рис. 5.1

*Визначення.* Якщо існує кінцева границя $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$, то ця границя називається *невластивім інтегралом* від функції $f(x)$ на інтервалі $[a, \infty)$ і позначається так: $\int_a^\infty f(x)dx$.

Таким чином, за означенням, маємо $\int_a^\infty f(x)dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$.

Легко уявити геометричний сенс невластивого інтеграла у випадку, коли $f(x) \ge 0$: якщо $\int_a^b f(x)dx$ виражає площу області, обмеженої кривою $y = f(x)$, віссю абсцис та ординатами $x = a, x = b$, то $\int_a^\infty f(x)dx$ виражає площу нескінченної (необмеженої) області, що міститься між лініями $y = f(x)$, $x = a$ та віссю абсцис. Коли границя (5.1) кінцева, то кажуть, що невластивій інтеграл $\int_a^\infty f(x)dx$ *існує* або *збігається.*



Якщо $\int\limits_a^b f(x)dx$ при $b \to \infty$ не має кінцевої границі, то $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ *не існує*, або *розбігається.*

$\int\limits_0^b \frac{dx}{1+x^2}$ існує, оскільки підінтегральна функція неперервна і границі інтегрування кінцеві (рис. 5.2). Щодо інтеграла $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$, то за означенням його трактують, як границю при $b \to \infty$ від інтеграла $\int\limits_0^b \frac{dx}{1+x^2}$.

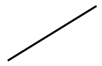
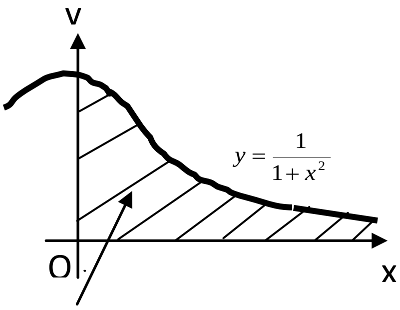


Рис. 5.2




$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ Рис. 5.3

Таким чином, маємо:

$$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty}\int\limits_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} arctgx\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty} arctgb = \frac{\pi}{2}.$$

Як бачимо, цей інтеграл збігається і дорівнює площі нескінченної криволінійної трапеції (рис. 5.3). У багатьох випадках достатньо встановити збіжність (або розбіжність) даного інтеграла та оцінити його значення. Для цього будуть корисними наступні теореми, які приймемо без доведення, але їх застосування буде розглянуто на прикладах.

**Теорема 5.1.** Якщо для всіх $x\,(x \ge a)$ виконується нерівність $0 \le f(x) \le \varphi(x)$, то якщо $\int\limits_a^\infty \varphi(x)dx$ збігається, то $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ також збігається, при цьому

$$\int_a^{\infty} f(x)dx \le \int_a^{\infty} \varphi(x)dx .$$

**Теорема 5.2.** Якщо для всіх $x\left(x \ge a\right)$ виконується нерівність $0 \le f(x) \le \varphi(x)$, причому, якщо $\int_a^{\infty}\varphi(x)dx$ розбігається, то також розбігається $\int_a^{\infty} f(x)dx$.

**Розглянемо приклади.**

***Приклад 14*** . Дослідити чи збігається інтеграл $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2\left(1+e^x\right)}$.

Очевидно, що при $x \ge 1$ $\frac{1}{x^2\left(1+e^e\right)} < \frac{1}{x^2}$. Далі $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2} = -\lim\limits_{b\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^b = 1.$ Тобто цей інтеграл збігається. Таким чином, за Теоремою 1, збігається даний інтеграл, а його значення є меншим за 1.

***Приклад 15***. Дослідити, чи збігається інтеграл $\int_1^{\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^3}}dx.$

Зауважимо, що $\frac{x+1}{\sqrt{x^3}} > \frac{x}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$ Але $\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{b\to\infty}2\sqrt{x}\Big|_1^b = +\infty.$ Тобто даний інтеграл теж розбігається (Теорема 2).

**Теорема 5.3.** Якщо $\int_a^{\infty}\left|f(x)\right|dx$ збігається, то збігається $\int_a^{\infty} f(x)dx$. У цьому випадку останній інтеграл називають *абсолютно збіжним*.

***Приклад 16***. Дослідити збіжність $\int_1^{\infty}\frac{\sin x}{x^3}dx.$

У даному випадку підінтегральна функція є знакозмінною. Має місце нерівність $\left|\frac{\sin x}{x^3}\right| \le \left|\frac{1}{x^3}\right|$. Але $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2}\Bigg|_1^{\infty} = \frac{1}{2}.$ Таким чином, $\int_1^{\infty}\left|\frac{\sin x}{x^3}\right|dx$ збігається. За теоремою збігається й даний інтеграл.

## 5.2. Інтеграли від розривних функцій

Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна при $a \le x < c$, а при $x = c$ вона або не визначена, або має розрив. У цьому випадку не можна казати про інтеграл $\int_a^c f(x)dx$ як границю інтегральних сум, оскільки $f(x)$ не є неперервною на відрізку $[a,c]$, і ця границя може не існувати. Інтеграл $\int_a^c f(x)dx$ від функції $f(x)$, що має розрив у точці $c$, визначається наступним чином: $\int_a^c f(x)dx = \lim\limits_{b\to c-0}\int_a^b f(x)dx$.

Якщо остання границя існує, то інтеграл називається *збіжним інтегралом,* у протилежному випадку – *розбіжним.*

Якщо функція $f(x)$ розривна на лівому кінці відрізка $[a,c]$ (тобто при $x = a$), то за визначенням $\int_a^c f(x)dx = \lim\limits_{b\to a+0}\int_b^c f(x)dx$.

Якщо функція має розрив у деякій точці $x = x_0$, де $a < x_0 < c$, то покладають:

$\int_a^c f(x)dx = \int_a^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^c f(x)dx$. Якщо обидва інтеграла у правій частині останньої рівності існують, то існує (збігається) інтеграл $\int_a^c f(x)dx.$

***Приклад 17*** . Обчислити $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

За визначенням $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim\limits_{b\to 1-0}\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -\lim\limits_{b\to 1-0} 2\sqrt{1-x}\Big|_0^b = -\lim\limits_{b\to 1-0}\left(2\sqrt{1-b}-1\right) = 2$.

***Приклад 18*** . Обчислити $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ або встановити його розбіжність. Очевидно, що при $x = 0$ підінтегральна функція має нескінченний розрив. Тому даний інтеграл треба представити у вигляді суми двох інтегралів:

$\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim\limits_{\varepsilon_1\to -0}\int\limits_{-1}^{\varepsilon_1}\frac{dx}{x^2}+\lim\limits_{\varepsilon_2\to +0}\int\limits_{\varepsilon_2}^{1}\frac{dx}{x^2}=I_1+I_2$. Кожний з інтегралів $I_1$ та $I_2$ треба шукати окремо: $I_1=\lim\limits_{\varepsilon_1\to -0}\int\limits_{-1}^{\varepsilon_1}\frac{dx}{x^2}=\lim\limits_{\varepsilon_1\to -0}\left.\frac{1}{x}\right|_{-1}^{\varepsilon_1}=\infty$. Аналогічно встановлюється розбіжність інтеграла $I_2$. Але в цьому немає необхідності, тому що для збіжності інтеграла треба, щоб збігались обидва інтеграли $I_1$ та $I_2$. Тому незалежно від поведінки $I_2$ даний інтеграл розбігається. Зауважимо, що якщо би ми обчислювали інтеграл, не звернувши уваги на розрив підінтегральної функції при $x=0$, то одержали б помилковий результат. Дійсно, $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=-\left.\frac{1}{x}\right|_{-1}^{1}=-2$, що неможливо (див. рис. 5.4). ***Таким чином, неодмінно звертайте увагу на поведінку підінтегральної функції на відрізку інтегрування!***

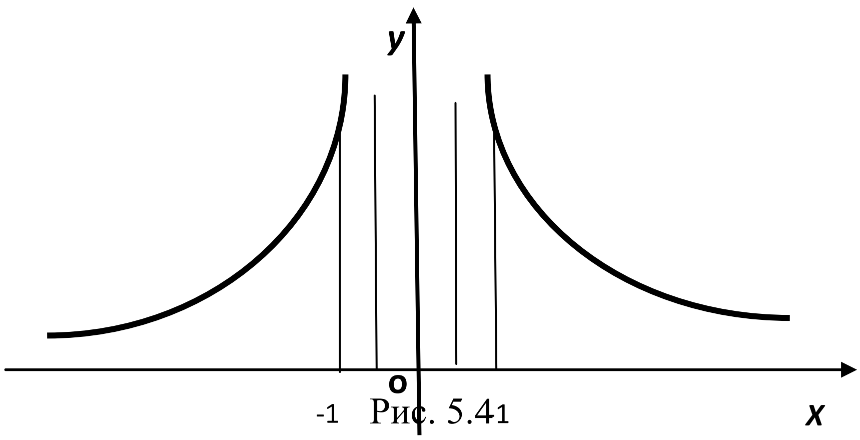


Рис. 5.4

*Зауваження.* Якщо функція $f(x)$, визначена на відрізку $[a,b]$, має в середині цього відрізка кінцеву кількість точок розриву $a_1, a_2, ..., a_n$, то інтеграл від функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ визначається у вигляді суми

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^{a_1} f(x)dx+\int\limits_{a_1}^{a_2} f(x)dx+...+\int\limits_{a_n}^{b} f(x)dx,$$

якщо кожний з невластивих інтегралів у правій частині збігається. Якщо принаймні один з них розбігається, то $\int\limits_a^b f(x)dx$ називається розбіжним.

Для встановлення збіжності невластивих інтегралів від розривних функцій та оцінки їх значення можуть бути використані теореми, аналогічні теоремам для оцінки інтегралів з нескінченними границями.

**Теорема 1***. Якщо на відрізку $[a, c]$ функції $f(x)$ та $\varphi(x)$ розривні у точці $c$, причому, у всіх точках цього відрізка виконані нерівності $\varphi(x) \geq f(x) \geq 0$ і збігається інтеграл $\int_a^c \varphi(x)dx$, тоді інтеграл $\int_a^c f(x)dx$ також збігається.

**Теорема 2*.** Якщо на відрізку $[a, c]$ функції $f(x)$ та $\varphi(x)$ розривні у точці $c$, причому у всіх точках цього відрізка виконані нерівності $f(x) \geq \varphi(x) \geq 0$ і розбігається інтеграл $\int_a^c \varphi(x)dx$, тоді інтеграл $\int_a^c f(x)dx$ також розбігається.

**Теорема 3*.** Якщо на відрізку $[a, c]$ знакозмінна функція $f(x)$ має розрив лише у точці $c$ і невласний інтеграл $\int_a^c |f(x)|dx$ від абсолютної величини цієї функції збігається, то інтеграл $\int_a^c f(x)dx$ також збігається.

У якості функції, із якою порівнюють підінтегральну функцію, часто обирають $1/(c-x)^\alpha$. Легко перевірити, що $\int_a^c \frac{dx}{(c-x)^\alpha}$ збігається при $\alpha < 1$, розбігається при $\alpha \geq 1$.

Те ж саме справедливо для інтегралів вигляду $\int_a^c \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$.

***Приклад 19*** . Чи збігається $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} + 4x^3}$?

Підінтегральна функція має розрив при $x = 0$. Порівнюючи її із функцією $\frac{1}{\sqrt{x}}$,маємо $\frac{1}{\sqrt{x}+4x^3} < \frac{1}{\sqrt{x}}$. Невласний інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ існує. Отже, невластивій інтеграл від «меншої» функції, тобто $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+4x^3}$, також існує.

# 6. ГЕОМЕТРИЧНІ ТА МЕХАНІЧНІ ЗАСТОСУВАННЯ ОЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

## 6. 1. Обчислення площ у прямокутних координатах

Якщо на відрізку $[a,b]$ функція $f(x) \geq 0$, то, як відомо, *площа криволінійної трапеції,* обмеженої кривою $y = f(x)$, віссю $Ox$ та прямими $x = a, x = b$, дорівнює

$$Q = \int_a^b f(x)dx. \qquad (6.1)$$

Якщо $f(x) \leq 0$ на $[a,b]$, то означений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ також $\leq 0$. За абсолютною величиною він дорівнює площі $Q$ відповідної криволінійної трапеції : $-Q = \int_a^b f(x)dx$.

Якщо на відрізку функція кінцеву кількість разів змінює знак, то інтеграл розкладається у суму інтегралів від цієї функції, що обчислюються по окремим частинам відрізка , на яких вона зберігає знак. Інтеграли будуть додатними там, де $f(x) > 0$ , і від'ємними там, де $f(x) < 0$. Інтеграл по відрізку $[a,b]$ буде складатись з алгебраїчної суми площ, розташованих вище та нижче осі $Ox$ (рис. 6.1 ).

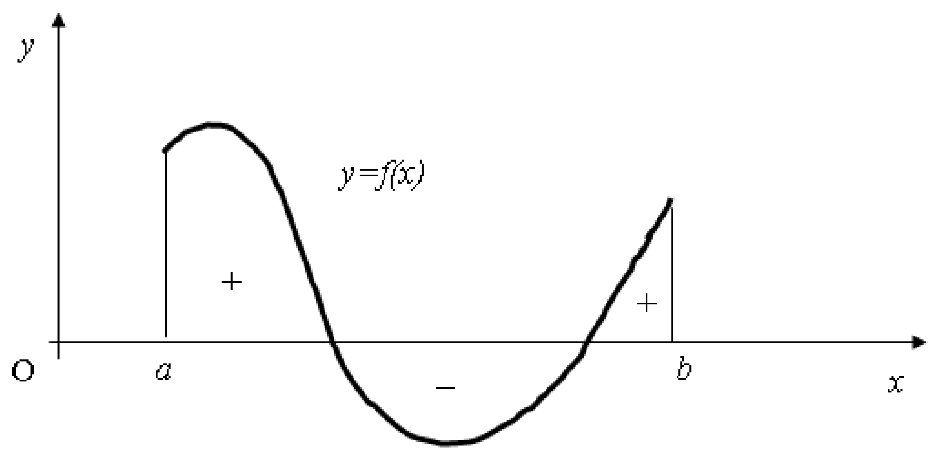



Рис. 6.1

Для одержання суми площ у звичайному сенсі треба знати суму абсолютних величин інтегралів по вказаним відрізкам або обчислити інтеграл

$Q = \int_a^b |f(x)|dx$.

***Приклад 20***. Обчислити площу $Q$ фігури, обмеженої синусоїдою $y = \sin x$ та віссю $Ox$ при $0 \le x \le 2\pi$ (рис. 6.2).

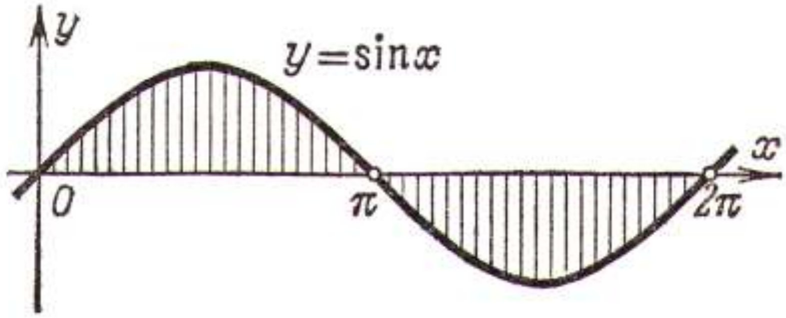



Рис. 6.2

Оскільки $\sin x \ge 0$ при $0 \le x \le \pi$, $\sin x \le 0$ при $\pi < x \le 2\pi$, то

$$Q = \int_0^{\pi} \sin x dx + \left| \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx \right| = \int_0^{2\pi} |\sin x| dx,$$ де

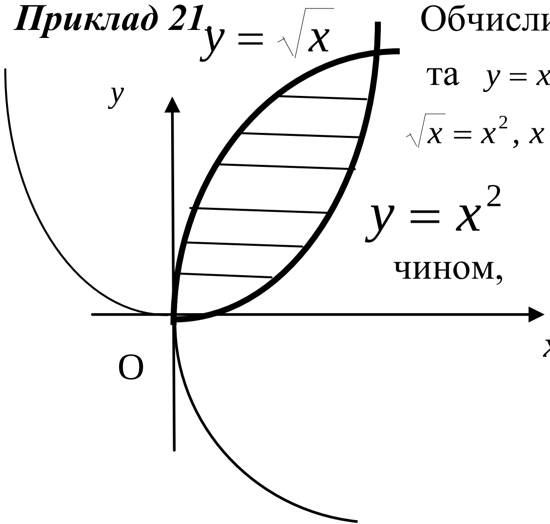
$$\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -(\cos\pi - \cos 0) = -(-1-1) = 2$$,

$$\int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} = -(\cos 2\pi - \cos\pi) = -(1+1) = -2.$$ Тобто $Q = 2 + |-2| = 4$.

Якщо треба обчислити площу області, обмеженої кривими $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ та прямими $x = a, x = b,$ то за умовою $f_1(x) \ge f_2(x)$ одержимо

$$Q = \int_a^b f_1(x)dx - \int_a^b f_2(x)dx = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]dx.$$

***Приклад 21***. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими $y = \sqrt{x}$ та $y = x^2$. Знайдемо точку перетину кривих: $\sqrt{x} = x^2, x = x^4$, звідси $x_1 = 0, x_2 = 1$. Таким чином,



$$Q = \int_0^1 \sqrt{x}dx - \int_0^1 x^2 dx =$$

$$= \frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^1 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Рис. 6.3

## 6. 2. Обчислення площі криволінійної трапеції, якщо крива задана рівняннями у параметричному вигляді

Нехай рівняння $x = \varphi(t),\ y = \psi(t),$ де $\alpha \le t \le \beta,\ \varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b$ визначають деяку функцію $y = f(x)$ на відрізку $[a, b]$, тобто площа криволінійної трапеції може бути обчислена за формулою:

$Q = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b ydx$. Виконаємо заміну змінної у цьому інтегралі, поклавши $x = \varphi(t),\ dx = \varphi'(t)dt$. Далі $\rho = f(\theta)$ $y = f(x) = f[\varphi(t)] = \psi(t),$ Таким чином, формула для обчислення площі у випадку кривої, заданої параметрично, має вигляд:

$$Q = \int_\alpha^\beta \psi(t) \cdot \varphi'(t)dt.$$

***Приклад 22***. Обчислити площу області, обмеженої еліпсом $x = a\cos t,\ y = a\sin t$.

Доцільно обчислити площу верхньої половини області, а одержаний результат подвоїти. Очевидно, що $x$ змінюється від $-a$ до $a$, $t$ змінюється від $\pi$ до *0*. Таким чином,

$$Q = 2\int_\pi^0 b\sin t \cdot (-a\sin t)dt = -2ab\int_\pi^0 \sin^2 tdt = 2ab\int_0^\pi \frac{1-\cos 2t}{2}dt = 2ab\left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^\pi = \pi ab.$$

### 6. 3. Площа криволінійного сектора у полярних координатах

Нехай у полярній системі координат маємо криву, що задана рівнянням $\rho = f(\theta)$, де $f(\theta)$ - неперервна функція при $\alpha \le \theta \le \beta$.

Визначимо площу сектора $OAB$, обмеженого кривою $\rho = f(\theta)$ і радіусами-векторами $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$. Поділимо дану область радіусами-векторами $\alpha = \theta_0, \theta = \theta_1, ..., \theta_n = \beta$ на $n$ частин.

Позначимо через $\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, ..., \Delta\theta_n$ кути між проведеними радіусами-векторами (рис. 6.4).

Нехай $\overline{\rho_i}$ - довільний радіус-вектор, що відповідає куту $\overline{\theta_i}$ між $\theta_{i-1}$ та $\theta_i$. Розглянемо круговий сектор із радіусом $\overline{\rho_i}$ та центральним кутом $\Delta\theta_i$. Його площа буде дорівнювати $\Delta Q_i = \frac{1}{2}\overline{\rho}_i^2 \cdot \Delta\theta_i$. Сума $Q_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\overline{\rho}_i^2 \cdot \Delta\theta_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[f\left(\overline{\theta_i}\right)\right]^2 \cdot \Delta\theta_i$ дає площу ступінчастого сектора.

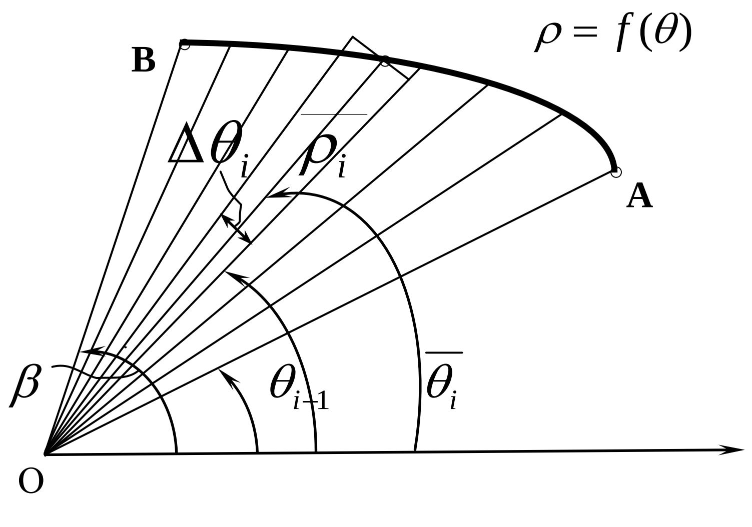



Рис. 6.4

Оскільки ця сума є інтегральною сумою для функції $\rho^2 = \left[f(\theta)\right]^2$ на відрізку $\alpha \le \theta \le \beta$, то її границя при $\max\Delta\theta_i \to 0$ є означений інтеграл $\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2 d\theta$. Він не залежить від того, який радіус-вектор $\overline{\rho_i}$ ми беремо у середині кута $\Delta\theta_i$.

Цю границю природно вважати шуканою площею фігури. Таким чином, площа сектора *OAB* дорівнює $Q = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2 d\theta$, або $Q = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[f(\theta)]^2 d\theta$.

***Приклад 22.*** Обчислити площу, що описана полярним радіусом спіралі Архімеда $\rho = a\varphi$ при одному її звороті, якщо початку руху відповідає $\varphi = 0$. При одному звороті полярний кут змінюється від $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$. Таким чином,

$$Q = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}a^2\varphi^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\varphi^3}{3}\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\pi^3 a^2.$$

## 6. 4. Довжина дуги кривої

має

Нехай у прямокутних координатах на площині рівняння деякої кривої вигляд $y = f(x)$. Знайдемо довжину дуги, розташованої між прямими $x = a$ і $x = b$. Візьмемо на дузі $AB$ точки з абсцисами $a = x_0, x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n = b$ і побудуємо хорди $AM_1,\ M_1M_2, ..., M_{n-1}B,$ довжини

яких позначимо відповідно через $\Delta s_1, \Delta s_2, ..., \Delta s_n$. Одержимо ламану лінію $AM_1M_2...M_{n-1}B,$ вписану у дугу $AB$ (рис. 6.5). Довжина ламаної дорівнює $s_n = \sum_{i=1}^{n}\Delta s_i$. $M_2$

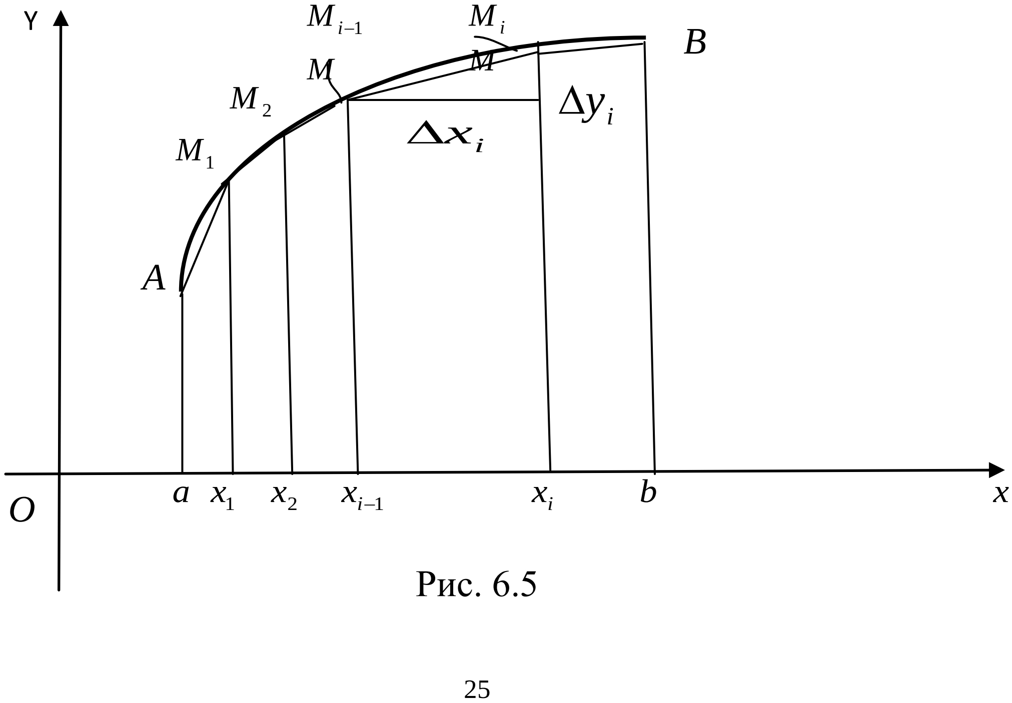



Рис. 6.5

*Довжиною дуги* називається границя, до якої прямує довжина вписаної ламаної, коли довжина її найбільшої ланки прямує до нуля:

$$s = \lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i .$$

Доведемо, що якщо на відрізку $a \le x \le b$ функція $f(x)$ та її похідна $f'(x)$ неперервні, то ця границя існує. Введемо позначення: $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$. Тоді, за теоремою Піфагора, $\Delta s_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i$. За теоремою Лагранжа (теорема про середнє) маємо: $\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i)$, де $x_{i-1} < \xi_i < x_i$.

Отже, $\Delta s_i = \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \cdot \Delta x_i$.

Таким чином, довжина вписаної ламаної дорівнює $s_n = \sum \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \Delta x_i$.

За умовою, $f'(x)$ неперервна , отже, функція $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ також неперервна. Тому існує границя інтегральної суми $s_n$, яка дорівнює означеному інтегралу:

$$s = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \cdot \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Отже, формула для обчислення довжини дуги має вигляд:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx. \tag{6.2}$$

***Приклад 23***. Визначити довжину кола $x^2 + y^2 = r^2$.

Спочатку обчислимо довжину чверті кола, розташованої у першому квадранті. Рівняння дуги буде $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$. Отже,

$$\frac{1}{4} s = \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} \cdot dx = \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = r \arcsin \frac{x}{r} \Big|_0^r = r \frac{\pi}{2}.$$

Довжина усього кола $s = 2\pi r$.

Якщо крива задана у параметричній формі: $x=\varphi(t),\ y=\psi(t)\quad(\alpha\le t\le\beta)$, де функції $\varphi(t), \psi(t)$ та їх похідні неперервні, причому, $\varphi'(t)$ не дорівнює нулю на $[\alpha,\beta]$.

У такому випадку $\frac{dy}{dx}=\frac{\psi(t)}{\varphi'(t)}$. Нехай $a=\varphi(\alpha), b=\psi(\beta)$. Тоді, виконавши у інтегралі (6.2) підстановку $x=\varphi(t), dx=\varphi'(t)dt$, одержимо

$$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{1+\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]^3}\varphi'(t)dt=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt\,.$$

***Приклад 24.*** Обчислити довжину астроїди $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t.$

Оскільки крива симетрична відносно обох координатних осей, обчислимо довжину її чверті, розташованої у першому квадранті (рис. 6. 6).

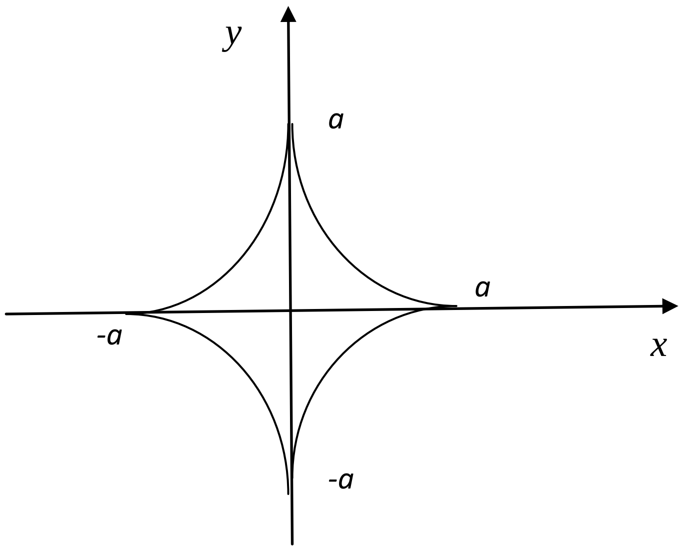



Рис. 6.6

$\frac{dx}{dt}=-3a\cos^2 t\sin t,\ \frac{dy}{dt}=3\sin^2 t\cos t.$Параметр t буде змінюватися від *0* до $\pi/2.$ Таким чином,

$$\frac{1}{4}s=\int_{o}^{\pi/2}\sqrt{9a^2\cos^4 t\cdot\sin^2 t+9a^2\sin^4 t\cdot\cos^2 t}dt=3a\int_{0}^{\pi/2}\sqrt{\cos^2 t\cdot\sin^2 t}dt=$$

$$=3a\int_{0}^{\pi/2}\sin t\cdot\cos t\,dt=3a\frac{\sin^2 t}{2}\Bigg|_{0}^{\pi/2}=\frac{3a}{2},\qquad s=6a.$$

## 6. 5. Довжина дуги у полярних координатах

Нехай у полярних координатах задано рівняння кривої $\rho = f(\theta)$, де $\rho$ - полярний радіус, $\theta$ - полярний кут. Формули переходу від полярних координат до декартових: $x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta,$ або, замінюючи $\rho$ на $f(\theta)$, одержимо $x = f(\theta)\cos\theta,\ y = f(\theta)\sin\theta.$ Ці рівняння можна розглядати як параметричні рівняння кривої, тому доцільно використати для обчислення довжини дуги формулу, одержану для цього випадку. Знайдемо похідні від $x$ та $y$ по параметру $\theta$.

$$\frac{dx}{d\theta} = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta,\ \frac{dy}{d\theta} = f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta.$$

Тоді $\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = [f'(\theta)]^2 + [f(\theta)]^2 = (\rho')^2 + \rho^2.$ Отже,

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\,d\theta.$$

***Приклад 24.*** Знайти довжину кардіоїди $\rho = a(1+\cos\theta)$.

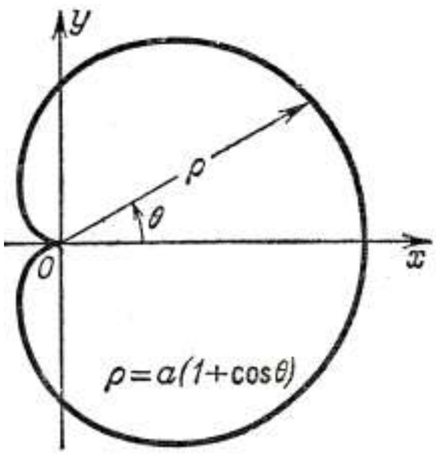



Рис. 6.7

Змінюючи полярний кут $\theta$ від 0 до $\pi$, одержимо половину шуканої довжини. Маємо: $\rho' = -a\sin\theta.$ Таким чином,

$$s = 2\int_0^\pi \sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta}\,d\theta = 2a\int_0^\pi \sqrt{2+2\cos\theta}\,d\theta = 4a\int_0^\pi \cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = 8a\sin\frac{\theta}{2}\Big|_o^\pi = 8a.$$

## 6.6. Обчислення об’ємів тіл за поперечними перетинами

Нехай маємо деяке тіло Т. Припустимо, що відома площа будь-якого поперечного перетину тіла площиною, що перпендикулярна осі $Ox$. Ця площа буде залежна від розташування січної площини, тобто буде функцією від $x$: $Q = Q(x)$.

Припустимо, що $Q(x)$ - неперервна функція від $x$. Визначимо об'єм даного тіла. Проведемо n площин $x = x_0 = a, x = x_1, x = x_2, ..., x = x_n = b$. Ці площини розіб'ють тіло на шари. У кожному з проміжків $x_{i-1} \le x \le x_i$ оберемо довільну точку $\xi_i$ і для кожного значення $i = 1, 2, ..., n$ побудуємо циліндрове тіло, твірна якого паралельна до осі $Ox$, а напрямна представляє собою контур перетину тіла Т площиною $x = \xi_i$. Об'єм такого елементарного циліндра з площею основи $Q(\xi_i)$ $(x_{i-1} \le \xi_i \le x_i)$ та висотою $\Delta x_i$ дорівнює $Q(\xi_i)\Delta x_i$. Об'єм всіх циліндрів буде $v_n = \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i)\Delta x_i$.

Границя цієї суми при $\max \Delta x_i \to 0$ (якщо вона існує) називається об'ємом даного тіла $v = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i)\Delta x_i$. Оскільки $v_n$ представляє собою інтегральну суму для неперервної функції $Q(x)$ на відрізку $a \le x \le b$, то ця границя існує і є означений інтеграл:

$$v = \int_a^b Q(x)dx. \tag{6.3}$$

***Приклад 25.*** Обчислити об'єм тривісного еліпсоїда (рис. 6.8)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

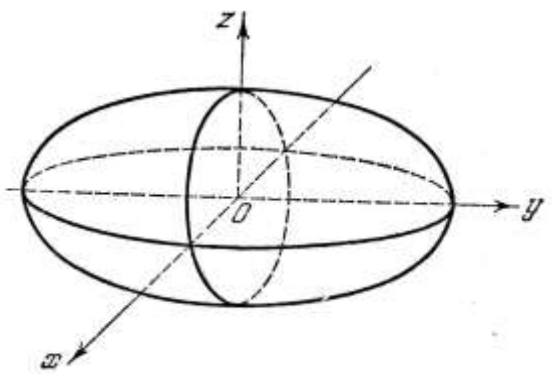


Рис. 6.8

У перетину еліпсоїда площиною, що паралельна площині $Oyz$ і віддалена від неї на відстань $x$,одержимо еліпс

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2}, \qquad \frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=1,$$

де $b_1=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, $c_1=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ -піввіси еліпса. Але площа такого еліпса дорівнює $\pi b_1c_1$, тому $Q(x)=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$. Об'єм еліпсоїда буде дорівнювати

$$v=\pi bc\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\pi bc\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi abc.$$

До речі, коли $a=b=c$ еліпсоїд перетворюється на кулю і у цьому випадку $v=\frac{4}{3}\pi a^3$.

## 6. 7. Об'єм тіла обертання

Розглянемо тіло, утворене обертанням навколо осі $Ox$ криволінійної трапеції $aABb$, обмеженою кривою $y=f(x)$, віссю $Ox$ та прямими $x=a$, $y=b$.

У цьому випадку перетин тіла площиною, що перпендикулярна осі $Ox$, є круг, площа якого $Q=\pi y^2=\pi[f(x)]^2$. Використовуючи загальну формулу (6.3) для обчислення об'єму, одержимо формулу для обчислення об'єму тіла обертання

$$v=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_a^b[f(x)]^2dx.$$

***Приклад 26.*** Знайти об'єм параболоїда обертання, що одержується обертанням навколо $Ox$ параболи $y=x^2$, якщо $0\le x\le 1$.

$$v=\pi\int_0^1 y^2dx=\pi\int_0^1 x^4dx=\pi\left.\frac{x^5}{5}\right|_0^1=\frac{\pi}{5}.$$

*Зауваження.* Якщо крива обертається навколо *Oy*, то формула для обчислення об'єму тіла обертання набуває вигляду: $v=\pi\int_c^d x^2dy,$ де

$[c,\, d]$ – відрізок, на якому змінюється $y$.

### 6. 8. Площа поверхні тіла обертання

Нехай дана поверхня, що одержана обертанням кривої $y=f(x)$ навколо осі $Ox$. Визначимо площу цієї поверхні на відрізку $[a,b]$.

Припустимо, що $f(x)$ неперервна і має неперервну похідну на відрізку $[a,b]$. Проведемо хорди $AM_1, M_1M_2, ..., M_{n-1}B$, довжини яких позначимо $\Delta s_1, \Delta s_2, ..., \Delta s_n$ (рис. 6.9).

Кожна хорда довжини $\Delta s_i$ при обертанні опише усічений конус, площа поверхні якого дорівнює $\Delta P_i=2\pi\frac{y_{i-1}+y_i}{2}\Delta s_i$. Але $\Delta s_i=\sqrt{\Delta x_i^2+\Delta y_i^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\Delta x_i$.

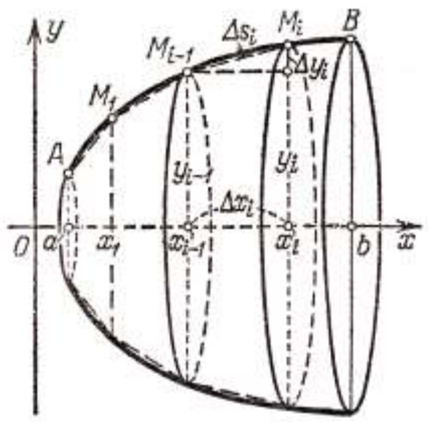



Рис. 6.9

Використовуючи теорему Лагранжа, одержимо

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}=\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}=f'(\xi_i),\text{ де } x_{i-1}<\xi_i<x_i.$$

Отже, $\Delta s_i = \sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\Delta x_i$, $\Delta P_i = 2\pi \frac{y_{i-1}+y_i}{2}\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\Delta x_i$. Площа поверхні,

описаної ламаною, буде дорівнювати

$$P_n = 2\pi \sum_{i=1}^{n} \frac{y_{i-1}+y_i}{2}\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\Delta x_i,$$

або сумі

$$P_n = \pi\left[f(x_{i-1})+f(x_i)\right]\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\Delta x_i. \tag{6.3}$$

Границя цієї суми, коли найбільша ланка ламаної прямує до нуля, називається *площею поверхні обертання.*

Сума (6.3) не є інтегральною сумою для функції

$$2\pi\, f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\ , \tag{6.4}$$

оскільки в доданку, що відповідає відрізку $[x_{i-1}, x_i]$, фігурує декілька точок цього відрізка $x_{i-1}, \xi_i, x_i$. Але можна доказати, що границя суми (6.3) дорівнює границі суми для функції (6.4), тобто

$$P = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n}\left[f(x_{i-1})+f(x_i)\right]\sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\,\Delta x_i = \lim_{va x\Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} 2f(\xi_i)\sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\,\Delta x_i,$$

або

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx. \tag{6.5}$$

***Приклад 27.*** Визначити площу поверхні параболоїда , утвореного обертанням навколо осі $Ox$ дуги параболи $y^2 = 2px$, що відповідає зміні $x$ від $x=0$ до $x=a$.

$$y=\sqrt{2px},\ y'=\frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x}},\quad \sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{1+\frac{2p}{4x}}=\sqrt{\frac{2x+p}{2x}}.$$

За формулою (6.5) одержимо $P = 2\pi\int_0^a \sqrt{2px}\sqrt{\frac{2x+p}{2x}}dx = 2\pi\sqrt{p}\int_0^a \sqrt{2x+p}\,dx =$

$$= 2\pi\sqrt{p}\,\frac{2}{3}(2x+p)^{3/2}\cdot\frac{1}{2}\Big|_0^a = \frac{2\pi\sqrt{p}}{3}\left[(2a+p)^{3/2} - p^{3/2}\right].$$

## 6. 9. Обчислення роботи за допомогою означеного інтеграла

Нехай під дією деякої сили $F$ матеріальна точка $M$ рухається по прямій $Os$, причому, напрямок сили співпадає із напрямком руху. Потрібно знайти роботу, вироблену силою $F$ при переміщенні точки $M$ із положення $s=a$ у положення $s=b$.

1.Якщо сила $F$ стала, то робота $A$ виражається добутком сили $F$ на довжину шляху, тобто $A = F(b-a)$.

2.Припустимо, що сила $F$ безперервно змінюється у залежності від положення матеріальної точки $M$, тобто представляє собою функцію, неперервну на відрізку $[a,b]$.

Розіб'ємо відрізок $[a,b]$ на $n$ довільних точок із довжинами $\Delta s_1, \Delta s_2, ..., \Delta s_n$, потім на кожному відрізку $[s_{i-1}, s_i]$ виберемо довільну точку $\xi_i$ і замінимо роботу $F(s)$ на шляху $\Delta s_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$ добутком $F(\xi_i)\Delta s_i$.

Це означає, що на кожному відрізку ми приймаємо силу $F$ за сталу, а саме, вважаємо $F = F(s)$. У такому випадку вираз $F(\xi_i)\Delta s_i$ при достатньо малому $\Delta s_i$ дає приблизне значення роботи сили $F$ на шляху $\Delta s_i$, а сума $A_n = \sum\limits_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta s_i$ буде наближеним значенням роботи сили на відрізку $[a,b]$.

Очевидно, $A_n$ представляє собою інтегральну суму, складену для функції $F = F(s)$ на відрізку $[a,b]$. Границя цієї суми при $\max \Delta s_i \to 0$ існує і виражає роботу сили $F(s)$ на шляху від точки $s=a$ до точки $s=b$:

$$A = \int_a^b F(s)ds. \qquad (6.6)$$

***Приклад 28.*** Стискування гвинтової пружини пропорційно прикладеної силі $F$. Обчислити роботу сили $F$ при стискуванні пружини на 5 см, якщо для стискування її на 1 см потрібна сила 10 Н (рис. 6.10).

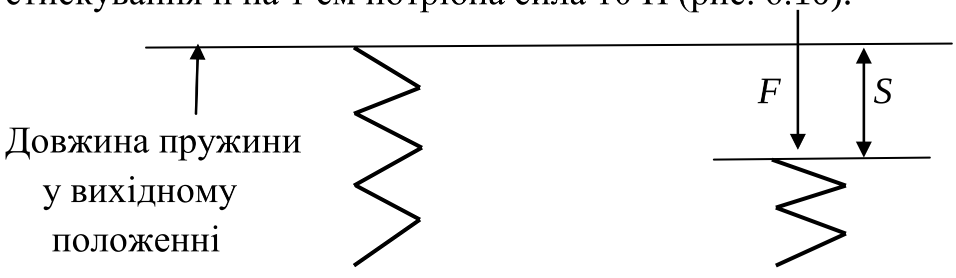


Рис. 6. 10

Сила $F$ і переміщення $S$ зв'язані залежністю $F = kS$, де $k$ – стала. Нехай $S$ виражено у метрах, $F$ у ньютонах. При $S = 0{,}01$ $F = 10$. Тобто $10 = k \cdot 0{,}01$, звідки $k = 1000$, $F = 1000S$. Використовуючи формулу (6.6), маємо:

$$A = \int_0^{0{,}05} 1000 s ds = 1000 \left.\frac{S^2}{2}\right|_0^{0{,}05} = 1{,}25 \text{ Дж}.$$

## 7. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

### 1. Обчислити інтеграли:

1) $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$.

2) $\int_{2}^{-13} \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}$.

3) $\int_0^1 (e^x - 1)^4 e^x dx$.

4) $\int_0^1 \frac{xdx}{(x^2+1)^2}$.

5) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$.

6) $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}} dx}{x^2}$.

7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin 2x dx$.

8) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$.

9) $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2} dx$.

10) $\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}} ctg^4 \varphi \, d\varphi$.

11) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$ .

12) $\int_1^2 x\log_2 x dx$.

13) $\int_0^{\pi} x^3 \sin x dx$.

14) $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx$.

15) $\int_0^{a\sqrt{7}} \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{a^2+x^2}}$.

16) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x dx$.

17) $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx$.

18) $\int_1^5 \frac{xdx}{\sqrt{4x+5}}$.

19) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$.

20) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{1+x}$ .

21) $\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$.

22) $\int_0^1 \frac{xdx}{1+\sqrt{x}}$.

23) $\int_0^1 \frac{\sqrt{e^x}dx}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}$.

24) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx$.

25) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$.

26) $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx$.

27*) $\int_0^{\pi} \sin^6 \frac{x}{2}dx$.

28*) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} ctg^7 2xdx$.

29) $\int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$.

30) $\int_0^{\pi/4} tg^3 xdx$.

**2. Обчислити невластиві інтеграли або встановити їх розбіжність (№№ 1 – 24); дослідити збіжність інтегралів (№№ 25 – 30):**

1) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^4}$.

2) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

3) $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-ax} dx \ (a > 0)$.

4) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2x dx}{x^2 + 1}$.

5) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$.

6) $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx$.

7) $\int\limits_{0}^{\infty} x e^{-x^2} dx$.

8) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$.

9) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\ln x dx}{x^2}$.

10) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^n}$.

11) $\int\limits_{0}^{\infty} x^2 e^{-x/2} dx$.

12) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{arctgx dx}{x^2}$.

13) $\int\limits_{0}^{\infty} x^2 e^{-x^3} dx$.

14) $\int\limits_{0}^{\infty} x \sin x dx$.

15) $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$.

16) $\int\limits_{1}^{2} \frac{x dx}{\sqrt{x - 1}}$.

17) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x - 1}{\sqrt[3]{x^5}}$.

18) $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x \ln x}$.

19) $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{(x - 1)^2}$.

20) $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x - 1)^2}}$.

21) $\int\limits_{0}^{1/e} \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

22) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x + 1}{\sqrt[5]{x^3}} dx$.

23) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} dx$.

24) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x - 1}{\sqrt[3]{x^5}} dx$.

25) $\int\limits_0^{\infty} \frac{x}{x^3+1}dx.$ 26) $\int\limits_1^{\infty} \frac{x^3+1}{x^4}dx.$

27) $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^{13}}{\left(x^5+x^3+1\right)^3}dx.$ 28) $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}.$

29) $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[8]{x^3-1}}.$ 30) $\int\limits_2^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^4+1}}.$

## 3. Застосування означеного інтеграла

**Обчислити площі фігур, обмежених наступними лініями (1-25):**

1) $y^2 = 2x+1,\ x-y-1=0.$ 2) $y = 6x - x^2,\ y = 0.$

3) $y = x^3,\ y = 8,\ x = 0.$ 4) $y^2 = 1 - x,\ x = -3.$

5) $y = 4 - x^2,\ y = 0.$ 6) $xy = 6,\ x + y - 7 = 0.$

7) $xy = 4,\ x = 1,\ x = 4,\ y = 0.$ 8) $y = \ln x,\ x = e,\ y = 0.$

9) $\rho = 2\cos\varphi,\ \rho = 2\sqrt{3}\sin\varphi,\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{0}.$

10) $\rho = \cos\varphi,\ \rho = \sin\varphi,\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{0}.$

11) $\rho = \cos\varphi,\ \rho = 2\cos\varphi.$ 12) $\rho = \sin\varphi,\ \rho = 2\sin\varphi.$

13) $\rho = 3\sin\varphi,\ \rho = 5\sin\varphi.$ 14) $\rho = 6\cos\varphi,\ \rho = 3\ (\rho \ge 3).$

15) $\rho = \sin 6\varphi.$ 16) $\rho = \cos 3\varphi.$

17) $\rho = 2\sin\varphi.$ 18) $\rho = \sqrt{3}\cos\varphi,\ \rho = \sin\varphi,\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{0}.$

19) $\begin{cases} x = 4\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = 2\sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 2, (x \ge 2).$ 20) $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t, \\ y = 2\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$ $y = 2, (y \ge 2).$

21) $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), & y = 4, \\ y = 4(1 - \cos t), & (0 < x < 8\pi, y \ge 4). \end{cases}$ 22) $\begin{cases} x = 16\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 2, (x \ge 2).$

23) $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 6\sin t, \end{cases}$ $y = 3, (y \ge 3).$ 24) $\begin{cases} x = 6\cos t, \\ y = 2\sin t, \end{cases}$ $y = \sqrt{3}, (y \ge \sqrt{3}).$

25) $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 3, (0 < x < 6\pi, \ y \ge 3).$

26). Круг $x^2 + y^2 \le 8$ поділенний параболою $y = x^2/2$ на дві частини. Знайти площі обох частин.

27). Знайти площу фігури, обмеженої однією аркою циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ та віссю абсцис.

**Знайти довжини дуг наступних ліній (28 - 42):**

28) $y = \ln x$ від $x_1 = \sqrt{3}$ до $x_2 = \sqrt{8}$. 29) $y = \ln(1 - x^2)$ від $x_1 = 0$ до $x_2 = \frac{1}{2}$.

30) $y = -\ln\cos x, \quad 0 \le x \le \pi/6.$

31) $y = \sqrt{1 - x^2} + \arccos x, \ 0 \le x \le 8/9.$

32) $y = 2 - e^x, \ \ln\sqrt{3} \le x \le \ln\sqrt{8}.$

33) $y = 1 - \ln\sin x, \ \pi/3 \le x \le \pi/2.$

34) $\begin{cases} x = 4(\cos t + t\sin t), \\ y = 4(\sin t - t\cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi.$

35) $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases}$ $0 \le t \le \pi.$

36) $\begin{cases} x = \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{4}\cos 2t, \\ y = \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{4}\sin 2t, \end{cases} \quad \frac{\pi}{2} \le t \le \frac{2}{3}\pi.$

37) $\rho = 3e^{3\varphi/4}, -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$

38) $\rho = 1 - \sin\varphi, -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le -\frac{\pi}{6}.$

39) $\rho = 3(1+\sin\varphi), -\frac{\pi}{6} \le \varphi \le 0.$

40) $\rho = 5(1-\cos\varphi), -\frac{\pi}{3} \le \varphi \le 0.$

41) $\rho = 2\sin\varphi,\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{6}.$

42) $\rho = 8\cos\varphi,\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}.$

43). Знайти довжину дуги спіралі Архімеда $\rho = a\varphi$ від початку до кінця першого завитка.

44). Знайти довжину однієї арки циклоїди $x = a(t - \sin t),\ y = a(t - \cos t)$ .

45). Знайти довжину дуги лінії $y = \ln(\sin x)$ від $x = \pi/3$ до $x = 2\pi/3.$

46). Знайти площу поверхні тіла, що одержується при обертанні кола $x^2 + y^2 = R^2$ навколо осі $Ox$.

47). Знайти площу поверхні тіла, що одержується при обертанні синусоїди $y = \sin x$ (від $x = 0$ до $x = \pi$) навколо осі $Ox$.

48). Знайти площу поверхні тіла, що одержується при обертанні однієї арки циклоїди $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$ навколо осі $Ox$.

**Знайти об'єми тіл, що одержуються при обертанні навколо осі $Ox$ фігур, обмежених лініями:**

49) $xy = 4,\ x = 1,\ x = 4,\ y = 0.$

50) $y = \sin x$ (від $x = 0$ до $x = \pi$).

51) $y = (x-1)^2,\ y = 1.$

52) $y = x^3,\ y = x^2.$

53) $y = (x-1)^2,\ x = 0, x = 2, y = 0.$

54) $y = x^3,\ y = x.$

55) $y = \ln x,\ x = 2, y = 0.$

**Знайти об'єми тіл, що одержуються при обертанні навколо осі $Oy$ фігур, обмежених лініями:**

56) $y^2 = 4 - x,\ x = 0.$

57) $y = 2x - x^2,\ y = -x + 2.$

58) $y = x^3,\ y = \sqrt{x}.$

59). Знайти об'єм тіла, яке одержується при обертанні навколо осі $Oy$ фігури, обмеженої параболою $y = 2x - x^2$ та віссю абсцис.

60). Обчислити об'єм тіла, обмеженого еліптичним параболоїдом $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2}$ та площиною $z = 1$.

61). Обчислити об'єми тіл, обмежених параболоїдом $z = x^2 + 2y^2$ та еліпсоїдом $x^2 + 2y^2 + z^2 = 6$.

62). Обчислити об'єм еліпсоїда $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$.

63). Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z = x^2 + 4y^2,\ z = 2$.

**Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями (64 – 66):**

64) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1,\ z = 1,\ z = 0$.

65) $z = 2x^2 + 8y^2,\ z = 4$.

66) $x^2 + \frac{1}{4}y^2 - z^2 = 1,\ z = 0,\ z = 3$.

67). Швидкість тіла дається формулою $v = \sqrt{1+t}$ *м/сек*. Знайти відстань, що пройде тіло за перші 10 *с*. після початку руху.

68). При гармонійному коливальному русі вздовж осі абсцис навколо початку координат швидкість описується формулою $\frac{dx}{dt} = \frac{2\pi}{T}\cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi_0\right)$ ($t$ - час, $T$ - період коливань, $\varphi_0$ - початкова фаза). Знайти положення точки у момент часу $t_2$, якщо відомо, що у момент $t_1$ вона знаходилась у точці $x = x_1$.

69). Визначити роботу, яку треба витратити, щоб підняти масу $m$ з поверхні землі на висоту $h$.

*Вказівка.* Сила $F$ земного тяжіння на відстані $x$ від центра землі визначається з пропорції $F : mg = R^2 : x^2$, де $R$ - радіус землі.

70). Обчислити роботу розтягування на 0,001 *м* мідного дроту довжиною 1 *м* з радіусом перетину 2 *мм*.

*Вказівка.* Сила $F$ Н натягнення дроту довжиною 1 *м* та площею перетину $s(мм^2)$ при подовженні її на $x$ *м* визначається формулою

$F = E\frac{sx}{l}$, де $E$ - модуль пружності. (Для міді треба прийняти $E \approx 1{,}2 \cdot 10^5$ Н/$мм^2$).

## ЛІТЕРАТУРА

1. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление. – Т. 1: Учебное пособие для вузов. – 13-ое изд. – М.: Наука, 1985.
2. Данко П. Е., Попов А. Г. Высшая математика в примерах и задачах: Учебное пособие, ч. 2. – М.: Высшая школа, 1967.
3. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа для втузов. – М.: Наука, 1972.
4. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учебное пособие для вузов. – 10-е издание. – М.: Наука,1990.
5. Минорский В. П. Сборник задач по высшей математике. – М.: Физматгиз, 2006. – 336 с.
6. Кузнецов Л. А. Сборник задач по высшей математике (типовые расчеты). – 2-ое изд., доп. – М.: Высшая школа, 1994. – 206 с.
7. Валєєв К. Г., Джаладова І. А., Лютий О.І. та ін. Вища математика: Навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. – К.: КНЕУ, 2002.

Навчальне видання

Швачич Геннадій Григорович

Коноваленков Володимир Степанович

Заборова Тамара Михайлівна

# ОЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ. НЕВЛАСТИВІ ІНТЕГРАЛИ

Навчальний посібник

Тем. план 2012, поз. 239

Підписано до друку 14.05.2012. Формат 60х84 1/16. Папір друк. Друк плоский.
Облік.-вид. арк. 2,52. Умов. друк. арк. 2,50. Тираж 100 пр. Замовлення №

Національна металургійна академія України
49600, м. Дніпропетровськ-5, пр. Гагаріна,4

Редакційно-видавничий відділ НМетАУ